دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و نهم، آذر و دی ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

حل معادلات دیفرانسیل هیبریدی فازی

نیره شهریاری[۱]، توفیق الهویرنلو[۱*]، سعید عباس بندی[۲]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.
(۲) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۱۰

چکیده

در این مقاله معادله دیفرانسیل هیبریدی فازی (HFDE) با استفاده از روش اویلر فازی تحت مشتق پذیری تعمیم یافته بررسی می شود. برای این منظور نشان داده می شود که جواب به دست آمده از روش اویلر فازی (FEM) به جواب دقیق مسئله همگرا می باشد و این همگرایی در سرتاسر دامنه تعریف وجود دارد. از طرفی روش تخصیص معرفی می شود و برای حل معادله دیفرانسیل هیبریدی فازی در حالت یک برش بکار برده می شود، سپس پهنای چپ و راست به معادله اضافه می شود. در نتیجه معادله به دو معادله دیفرانسیل خطی بر حسب پهناها تبدیل می شود و در انتها با یافتن پهنا ها جواب دستگاه به دست می آید. لذا جواب فازی دستگاه به دست می آید. در نهایت سه مجموعه جواب برای معادله دیفرانسیل فازی هیبریدی معرفی می شود و برای نشان دادن کارایی چندین مثال عددی حل می شود.

واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل هیبریدی فازی، تفاضل تعمیم یافته هاکوهارا، روش اویلر فازی، مجموعه جواب متحد (USS)، مجموعه جواب های قابل قبول (TSS)، مجموعه جواب های قابل کنترل (CSS).

* عهده‌دار مکاتبات: Email: Allahviranloo@yahoo.com

۱- مقدمه

در سال های اخیر استفاده چشمگیری از معادلات دیفرانسیل فازی در سایر علوم منجمله علوم مهندسی می شود و این نوع معادلات بسیار مورد توجه دانشمندان و پژوهشگران قرار گرفته است. اولین دانشمندی که به بیان مفاهیم نامشخص پرداخت لطفی زاده[۱] [۱] در دهه شصت بوده است. سپس این علم به سرعت توسط دانشمندان و ریاضی دانان گسترش یافت و هاکوهارا[۲] [۲] به بررسی تفریق فازی و شرایط وجود آن پرداخت و نام این تفاضل را تفاضل هاکوهارا نامید. مشتق هاکوهارا یکی از مهمترین مشتقات در مباحث فازی می باشد که توسط هاکورا در سال ۱۹۶۷ ارائه شد[۲]. سپس کالوا معادلات دیفرانسیل فازی را تحت مشتق پذیری هاکوهارا بیان نمود اما مشاهده شد که جوابهای به دست آمده از این معادلات دارای نواقصی است منجمله هر گاه زمان افزایش می یافت ابهام در جواب ها نیز افزایش می یافت[۳] لذا دانشمندان در جهت این نقص برآمدند. سپس بده[۳] و گال[۴] [۴] به تعریف مشتق تعمیم یافته قوی هاکوهارا پرداختند و این مشکل را برطرف نمودند. اما هنوز یک مشکل اساسی در این تعریف به چشم می خورد و آن این بود که این تفریق همواره وجود نداشت در نهایت بده و استیفانی[۵] برای رفع این مشکل تفریق تعمیم یافته هاکورا را تعریف کردند که با توجه به تعریف آنها هم مشکل وجود تفاضل حل شد و هم توانستند مشتق پذیری را به خوبی بیان نمایند. [۵] اخیرا توجه بسیاری از دانشمندان علوم کامپیوتر و صنایع به معادلات دیفرانسیل فازیی جلب می شود که بتواند در تعامل با یک کنترل کننده زمان مجزا باشند و از طرفی ابهام وارد شده مقادیر اولیه می باشد لذا برای دست یابی به این هدف دانشمندان با ورود یک ضریب فازی در ذات مسئله معادلات دیفرانسیل فازی ترکیبی را معرفی نمودند تا گامی نوین در جهت پیشرفت علوم مختلف مخصوصا علوم کامپیوتر و صنایع باشد[۶، ۷، ۸]. ساختار اصلی این مقاله به صورت زیر است: در بخش دوم مفاهیم بنیادی و قضایای اساسی که در سایر قسمتهای مقاله استفاده می شود بیان می شود. در بخش سوم ابتدا معادله دیفرانسیل فازی ترکیبی معرفی می شود سپس با استفاده از روش اویلر فازی حل می شود و نشان داده می شود که جواب های تقریبی پیشنهادی مقاله همگراست. در بخش چهارم از مقاله خطای موضعی برشی، خطای جامع و پایداری و سازگاری روش اویلر فازی بررسی می شود. در بخش پنجم ابتدا روش پیشنهادی مقاله اراده می شود و سپس الگوریتم روش معرفی شده و معادله دیفرانسیل فازی ترکیبی تحت مشتق پذیری قوی حل می شود و در نهایت جوابهای سه دسته جواب برای این نوع معادلات معرفی شده و درنهایت رابطه بین TSS و CSSبا جزئیات توضیح داده می شود. در بخش ششم برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی مثال های عددی ارائه شده است.

۲- تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش از مقاله مفاهیم بنیادی که در سرتاسر مقاله استفاده می شود معرفی می شود.

فرض می کنیم $u \in \mathbb{E}$ یک عدد فازی دلخواه باشد لذا در سرتاسر این مقاله به ازای هر$0 < r \leq 1$، مجموعه $[u]^r = \{\xi \in \mathbb{R} | u(\xi) \geq r\}$ و $[u]^0 = cl\{\xi \in \mathbb{R} | u(\xi) \geq 0\}$ را داریم و آر- برش عدد فازی به صورت $[u]^r = [u^-(r), u^+(r)]$ نشان داده می شود. به ازای هر دو عدد فازی دلخواه u، v و $\kappa \in \mathbb{R}$،

---

۱ Lotfi Aliasker Zadeh

۲ Hukuhara

۳ Bede

۴ Gal

۵ Stefanini

جمع و ضرب اسکالر به ترتیب به صورت $[u+v]^r=[u]^r+[v]^r$ و $[\kappa u]^r=\kappa[u]^r$ نمایش داده می شود.

تعریف ۲-۱ [۳]: فرض کنید $u,v,w,z\in\mathbb{E}$ و $\lambda\in\mathbb{R}$ باشد، فاصله هاسدورف $D:\mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ به صورت

$D(u,v)=\sup\max_{r\in[0,1]}$
$\{|u^-(r)-v^-(r)|,|u^+(r)-v^+(r)|\}.$

تعریف می شود و دارای خصوصیات زیر می باشد

۱. $D(u\oplus w,v\oplus w)=D(v,u)$
۲. $D(\lambda u,\lambda v)=|\lambda|D(u,v)$
۳. $D(u\oplus v,w\oplus z)\leq D(u,w)+D(v,z)$
۴. $D(u\ominus v,w\ominus z)\leq D(u,w)+D(v,z)$

به طوری که $u\ominus v$ و $w\ominus z$ موجود باشند. که در آن $\ominus$ نمایانگر تفاضل هاکوارا است و به صورت $w\ominus v=u$ می باشد اگر و تنها اگر $u\oplus v=w$ باشد.

تعریف ۲-۲ [۹]: فرض کنید $u,v\in\mathbb{E}$ باشد، تفاضل تعمیم یافته هاکوهارا بین دو عدد فازی u و v به صورت

$$u\ominus_{gH}v=w\Leftrightarrow\begin{cases}(i)\quad u=v+w,\\ or\ (ii)\quad v=u+(-1)w.\end{cases}$$

تعریف می شود.

گزاره ۲-۳: در سرتاسر این مقاله فرض می شود $u\ominus_{gH}v\in\mathbb{E}$ همواره وجود دارد.

توجه شود که در سرتاسر مقاله تابع $\mathcal{F}:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{E}$ تابعی مقدار فازی است و آر- برش آن به ازای هر $r\in[0,1]$ و $\xi\in[a,b]$ به صورت $\mathcal{F}(\xi;r)=[\mathcal{F}^-(\xi;r),\mathcal{F}^+(\xi;r)]$ تعریف می شود.

تعریف ۲-۴ [۱۰]: تابع مقدار فازی $\mathcal{F}:[a,b]\to\mathbb{E}$ در نقطه $\xi_0\in[a,b]$ پیوسته گویند اگر به ازای هر $\varepsilon>0$ وجود داشته باشد عدد حقیقی مانند $\delta>0$، به طوری که $D(\mathcal{F}(\xi),\mathcal{F}(\xi_0))<\epsilon$. هر گاه $\xi\in[a,b]$ و $|\xi-\xi_0|<\delta$ گوییم $\mathcal{F}$ تابعی فازی پیوسته روی بازه ی $[a,b]$است اگر $\mathcal{F}$ روی هر بازه $\xi_0\in[a,b]$ پیوسته باشد.

تعریف ۲-۵ [۵]: مشتق تعمیم یافته ی هاکوهارا برای تابع فازی مقدار $\mathcal{F}:(a,b)\to E$ در نقطه $\xi_0\in(a,b)$ به صورت

$$\mathcal{F}'_{gH}(\xi_0)=\lim_{h\to0}\frac{\mathcal{F}(\xi_0+h)\ominus_{gH}\mathcal{F}(\xi_0)}{h},\quad(1)$$

تعریف می شود. اگر $\mathcal{F}'_{gH}(\xi_0)\in\mathbb{E}$، آنگاه گوییم $\mathcal{F}$ مشتق پذیر تعمیم یافته ی هاکوهارا ($-gH$ دیفرانسیل پذیر) در نقطه ξ_0 است.

تعریف ۲-۶ [۱۱]: فرض کنید $\mathcal{F}:(a,b)\to\mathbb{E}$ و $\xi_0\in(a,b)$ باشد. گویند تابع $\mathcal{F}$ تابعی مشتق پذیر تعمیم یافته قوی در در نقطه ξ_0 است اگر وجود داشته باشد $\mathcal{F}'_{gH}(\xi_0)\in\mathbb{E}$ به طوری که

- (i) به ازای هر $h>0$ در همسایگی از نقطه 0،
- $\exists\mathcal{F}(\xi_0+h)\ominus\mathcal{F}(\xi_0),\exists\mathcal{F}(\xi_0)\ominus\mathcal{F}(\xi_0-h)$ و حد

$$\lim_{h\to0^+}\frac{\mathcal{F}(\xi_0+h)\ominus\mathcal{F}(\xi_0)}{h}=$$
$$\lim_{h\to0^+}\frac{\mathcal{F}(\xi_0)\ominus\mathcal{F}(\xi_0-h)}{h}=\mathcal{F}'_{gH}(\xi_0).$$

موجود باشد. یا

- (ii) به ازای هر $h<0$ در همسایگی از نقطه صفر،

$\exists\mathcal{F}(\xi_0+h)\ominus\mathcal{F}(\xi_0), \exists\mathcal{F}(\xi_0)\ominus\mathcal{F}(\xi_0-h)$، حد

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\mathcal{F}(\xi_0)\ominus\mathcal{F}(\xi_0+h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\mathcal{F}(\xi_0-h)\ominus\mathcal{F}(\xi_0)}{h}=\mathcal{F}'_{gH}(\xi_0).$$

موجود باشد.

تعریف ۲-۷ [۱۲]: فرض کنید $\mathcal{F}:[a,b]\to\mathbb{E}$ و $\xi_0\in(a,b)$ باشد.

(i) تابع $\mathcal{F}(t)$ را تابعی $[(i)-gH]$– دیفرانسیل پذیر در نقطه ξ_0 گویند اگر

$$\mathcal{F}'_{i.gH}(\xi_0;r)=[(\mathcal{F}^-)'(\xi_0;r),(\mathcal{F}^+)'(\xi_0;r)], \quad (۲)$$

(ii) تابع $\mathcal{F}(t)$ را تابعی $[(ii)-gH]$– دیفرانسیل پذیر در نقطه ξ_0 گویند اگر

$$\mathcal{F}'_{ii.gH}(\xi_0;r)=[(\mathcal{F}^+)'(\xi_0;r),(\mathcal{F}^-)'(\xi_0;r)] \quad (۳)$$

تعریف ۲-۸ [۱۲]: گوئیم $\xi_0\in(a,b)$ یک نقطه سویچ برای دیفرانسیل پذیری $\mathcal{F}$ است اگر به ازای هر همسایگی از نقطه ی ξ_0 وجود داشته باشد نقاط $\xi_2>\xi_0>\xi_1$ به طوری که

نوع I: در نقطه ξ_1، (۲) برقرار باشد و (۳) برقرار نباشد و در نقطه ξ_2 ، (۳) برقرار باشد و (۲) برقرار نباشد.

نوع II: در نقطه ξ_1، (۳) برقرار باشد و (۲) برقرار نباشد و در نقطه ξ_2، (۲) برقرار باشد و (۳) برقرار نباشد.

۳- حل معادله دیفرانسیل هیبریدی فازی بوسیله روش اویلر فازی

دستگاه معادله دیفرانسیل هیبریدی فازی (HFS) زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases}\varphi'(\xi)=\mathcal{F}\big(\xi,\varphi(\xi),\lambda_\kappa(\varphi_\kappa)\big),\xi\in[\xi_\kappa,\xi_{\kappa+1}],\\ \varphi(\xi_\kappa)=\varphi_\kappa.\end{cases} \quad (۴)$$

که در آن $\mathcal{F}\in C[\mathbb{R}^+\times\mathbb{E}\times\mathbb{E},\mathbb{E}]$ و به ازای $\kappa=0,1,\ldots,\infty$ داریم $0\le\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_\kappa<\ldots,$ و همچنین $\lambda_k\in C[\mathbb{E},\mathbb{E}]$ است. اکنون فرض کنید که در هر بازه ی $[t_k,t_{k+1}]$ جواب معادله (۴) وجود دارد و یکتاست لذا معادله (۵) حاصل می شود.

$$\varphi'(\xi)=\begin{cases}\varphi_0'(\xi)=\mathcal{F}\big(\xi,\varphi_0(\xi),\lambda_0(\varphi_0)\big)\\ \qquad,\varphi_0(\xi_0)=\varphi_0,\ \xi\in[\xi_0,\xi_1],\\ \varphi_1'(\xi)=\mathcal{F}\big(\xi,\varphi_1(\xi),\lambda_1(\varphi_1)\big)\\ \qquad,\varphi_1(\xi_1)=\varphi_1,\ \xi\in[\xi_1,\xi_2],\\ \vdots\\ \varphi_\kappa'(\xi)=\mathcal{F}\big(\xi,\varphi_\kappa(\xi),\lambda_\kappa(\varphi_\kappa)\big)\\ \qquad,\varphi_\kappa(\xi_\kappa)=\varphi_\kappa,\ \xi\in[\xi_\kappa,\xi_{\kappa+1}],\\ \vdots\end{cases} \quad (۵)$$

فرض کنید جواب معادله (۴) تابع $x(t)$ باشد که به صورت (۶) معرفی می شود.

$$\varphi(\xi)=\varphi(\xi,\xi_0,\varphi_0)=\begin{cases}\varphi_0(\xi),\ \xi\in[\xi_0,\xi_1],\\ \varphi_1(\xi),\ \xi\in[\xi_1,\xi_2],\\ \vdots\\ \varphi_\kappa(\xi),\ \xi\in[\xi_\kappa,\xi_{\kappa+1}],\\ \vdots\end{cases} \quad (۶)$$

۳-۱- روش اویلر فازی

اکنون می‌خواهیم روش اویلر فازی را معرفی کنیم این روش یکی از روش‌های ساده عددی برای حل مسائل مقدار اولیه مقدار فازی است. برای این منظور مسئله مقدار اولیه ترکیبی فازی (۴) را به ازای r ثابت در بازه‌های $[\xi_0,\xi_1],\ldots,[\xi_\kappa,\xi_{\kappa+1}],\ldots,$ در نظر بگیرید سپس هر بازه با یک مجموعه‌ی N_k+1 نقاط شبکه ای افراز می شود به طوری که جواب دقیق $\varphi(\xi)$ به وسیله $\mathcal{J}_\kappa(\xi)$ تخمین

زده می شود. برای یافتن نقاط شبکه ای به ازای $0 \le n \le N_k$ نقاط به صورت $\xi_{\kappa,n} = \xi_\kappa + nh_\kappa$ و طول گام $h_\kappa = \dfrac{\xi_{\kappa+1} - \xi_\kappa}{N_\kappa}$ معرفی می شود و در نهایت جواب معادله ی (۴) با توجه به نوع $-gH$ دیفرانسیل پذیری تابع $\varphi(\xi)$ به صورت زیر حاصل می شود.

- حالت اول: فرض کنید $\mathcal{J}(\xi)$ جواب یکتای معادله (۴)، تابعی $[(i)-gH]$–دیفرانسیل پذیر و متعلق به $C^2_{gH}([0,T],\mathbb{E})$ باشد به طوری که نوع دیفرانسیل پذیری آن روی بازه ی $[0,T]$ تغییر نکند آنگاه معادله (۷) حاصل می شود.

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{\kappa,n+1}(\xi) = \mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi) \oplus h_\kappa \\ \qquad \odot \mathcal{F}\left[\xi, \mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi), \lambda_\kappa\left(\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi)\right)\right], \\ \mathcal{J}(0) = \mathcal{J}_0. \end{cases} \tag{۷}$$

- حالت دوم: اگر $\mathcal{J}(\xi)$ تابعی $[(ii)-gH]$– دیفرانسیل پذیر متعلق به $C^2_{gH}([0,T],\mathbb{E})$ باشد به طوری که نوع دیفرانسیل پذیری آن در بازه ی $[0,T]$ تغییر نکند. آنگاه معادله (۸) را داریم

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{\kappa,n+1}(\xi) = \mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi) \ominus (-1)h_\kappa \\ \qquad \odot \mathcal{F}\left[\xi, \mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi), \lambda_\kappa\left(\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi)\right)\right], \\ \mathcal{J}(0) = \mathcal{J}_0. \end{cases} \tag{۸}$$

- حالت سوم: اگر $\mathcal{J}(\xi)$ در تعریف ۲-۸ نوع I صدق کند و $\mu \in [0,T]$ باشد لذا بنا به حالت اول و حالت دوم، معادله (۹) نتیجه می شود.

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{\kappa,n+1}(\xi) = \mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi) \oplus h_\kappa \odot \\ \quad \mathcal{F}\left[\xi, \mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi), \lambda_\kappa\left(\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi)\right)\right] \\ \quad ,\kappa = 0,1,\ldots,j, \\ \mathcal{J}_{\kappa,n+1}(\xi) = \mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi) \ominus (-1)h_\kappa \odot \\ \quad \mathcal{F}\left[\xi, \mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi), \lambda_\kappa\left(\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi)\right)\right] \\ \quad ,\kappa = j+1,\ldots,N-1, \\ \mathcal{J}(0) = \mathcal{J}_0. \end{cases} \tag{۹}$$

حالت چهارم: فرض کنید $\mathcal{J}(\xi)$ در تعریف ۲-۸ نوع II صدق کند و $\mu \in [0,T]$ باشد. بنابراین بنا به حالت اول و حالت دوم، معادله (۱۰) به دست می آید.

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{\kappa,n+1}(\xi) = \mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi) \ominus (-1)h_\kappa \odot \\ \quad \mathcal{F}\left[\xi, \mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi), \lambda_\kappa\left(\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi)\right)\right] \\ \quad ,\kappa = 0,1,\ldots,j, \\ \mathcal{J}_{\kappa,n+1}(\xi) = \mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi) \oplus h_\kappa \odot \\ \quad \mathcal{F}\left[\xi, \mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi), \lambda_\kappa\left(y_{\kappa,n}(\xi)\right)\right] \\ \quad ,\kappa = j+1,\ldots,N-1, \\ \mathcal{J}(0) = \mathcal{J}_0. \end{cases} \tag{۱۰}$$

اکنون به ازای هر k و $r \in [0\,,1]$ همگرایی جواب تقریبی ب معادلات (۷) تا (۱۰) را نشان می دهیم به عبارت دیگر نشان می دهیم رابطه $\lim_{h_0,\ldots,h_\kappa \to 0} \mathcal{J}_{\kappa,N_\kappa}(\xi) = \varphi(\xi_{\kappa+1})$ برقرار است.

۲-۳- همگرایی تحت مشتق پذیری تعمیم یافته

لم ۳-۱: فرض کنید $i \in \mathbb{Z}^+$، $\epsilon_i > 0$ و $h_i < 1$ ثابت باشند. اگر $\{z_{i:n}(\xi)\}_{n=0}^{N_i}$ تقریب اویلر به ازای $N = N_i$ برای مسئله مقدار اولیه فازی

$$\begin{cases} \varphi'_{gH}(\xi) = \mathcal{F}\left[\xi, \varphi(\xi), \lambda_i\left(\varphi(\xi)\right)\right] \\ \varphi(\xi) = \varphi_i \,,\, \xi \in [\xi_i \,, \xi_{i+1}]. \end{cases} \tag{۱۱}$$

باشد و $\{\mathcal{J}_{i,n}(\xi)\}_{n=0}^{N_i}$ نشان دهنده نتایج حاصل از معادلات (۷) تا (۱۰) به ازای بعضی از $\mathcal{J}_{i,0}(\xi)$ باشد، آنگاه وجود دارد $\delta_i > 0$ به طوری که $D\left(z_{i,0}(\xi) \ominus \mathcal{J}_{i,0}(\xi), 0\right) < \delta_i$ و $D\left(z_{i,N_i}(\xi) \ominus \mathcal{J}_{i,N_i}(\xi), 0\right) < \epsilon_i$ است.

برهان: با توجه به اینکه روند اثبات برای تمامی حالات مشابه است لذا حالت سوم بررسی می شود. فرض کنید $\mathcal{J}(\xi)$ تابعی $[(i)-gH]-$ دیفرانسیل پذیر و $\{\mathcal{J}_{i,n}(\xi)\}_{n=0}^{J_i}$ نتیجه حاصل از معادله (۷) به ازای $\mathcal{J}_{i,0}(\xi)$ باشد لذا با استفاده از معادله (۷) به ازای $\ell = 0, \ldots, J_i - 1$ نشان می دهیم که جواب تقریبی معرفی شده با استفاده روش پیشنهادی مقاله به جواب تقریبی (۱۱) همگراست، لذا داریم

$$\begin{aligned} &D\left(z_{i,\ell+1}(\xi) \ominus \mathcal{J}_{i,\ell+1}(\xi), 0\right) = D\left(z_{i,\ell}(\xi)\right. \\ &\oplus h_i \odot \mathcal{F}\left[\xi_{i,\ell}, z_{i,\ell}(\xi), \lambda_i\left(z_{i,\ell}(\xi)\right)\right] \\ &\ominus \mathcal{J}_{i,\ell}(\xi) \ominus h_i \odot \mathcal{F}\left[\xi_{i,\ell}, \mathcal{J}_{i,\ell}(\xi), \lambda_i\right. \\ &\left.\left(\mathcal{J}_{i,\ell}(\xi)\right)\right], 0\Big) \le D\left(z_{i,\ell}(\xi) \ominus \mathcal{J}_{i,\ell}(\xi), 0\right) \\ &\oplus h_i D\left(\mathcal{F}\left[\xi_{i,\ell}, z_{i,\ell}(\xi), \lambda_i\left(z_{i,\ell}(\xi)\right)\right]\right. \\ &\left.\ominus \mathcal{F}\left[\xi_{i,\ell}, \mathcal{J}_{i,\ell}(\xi) \lambda_i\left(\mathcal{J}_{i,\ell}(\xi)\right)\right], 0\right). \end{aligned} \tag{۱۲}$$

اکنون فرض کنید $\alpha_{J_i} \equiv \epsilon_i$ باشد و از آنجایی که بر طبق فرضیات وجود دارد $\eta_{J_i} > 0$ به طوری که $D\left(z_{i,J_i-1}(\xi) \ominus \mathcal{J}_{i,J_i-1}(\xi), 0\right) < \eta_{J_i}$ لذا

$$\begin{aligned} &D\left(\mathcal{F}\left[\xi_{i,J_i-1}, z_{i,J_i-1}(\xi), \lambda_i\left(z_{i,J_i-1}\right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left.(\xi)\right)\right] \ominus \mathcal{F}\left[\xi_{i,J_i-1}, \mathcal{J}_{i,J_i-1}(\xi),\right.\right. \\ &\left.\left.\lambda_i\left(\mathcal{J}_{i,J_i-1}(\xi)\right)\right], 0\right) < \frac{\epsilon_i}{2} = \frac{\alpha_{J_i}}{2}. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

لذا ثابت شد که فاصله بین دو تقریب، از مقدار $\frac{\alpha_{J_i}}{2}$ کوچکتر است بنابراین تقریب حاصل از روش پیشنهادی مقاله و تقریب حاصل از معادله (۱۱) همگراست اکنون کافیست این همگرایی را برای تمامی نقاط نیز اثبات کنیم لذا فرض کنید

$$\alpha_{J_i-1} \equiv \min\left\{ \frac{\epsilon_i}{2} \,,\, \frac{\eta_{J_i}}{2} \right\}$$

و $D\left(z_{i,J_i-1}(\xi) \ominus \mathcal{J}_{i,J_i-1}(\xi), 0\right) \le \alpha_{J_i-1}$ باشد آنگاه با فرض $\ell = J_i - 1$ و استفاده از معادلات (۱۲) و (۱۳) داریم

$$\begin{aligned} &D\left(z_{i,J_i}(\xi) \ominus \mathcal{J}_{i,J_i}(\xi), 0\right) \\ &\le D\left(z_{i,J_i-1}(\xi) \ominus \mathcal{J}_{i,J_i-1}(\xi), 0\right) \oplus h_i \odot \\ &D\left(\mathcal{F}\left[\xi_{i,J_i-1}, z_{i,J_i-1}(\xi), \lambda_i\left(z_{i,J_i-1}(\xi)\right)\right] \ominus\right. \\ &\left.\mathcal{F}\left[\xi_{i,J_i-1}, \mathcal{J}_{i,J_i-1}(\xi), \lambda_i\left(\mathcal{J}_{i,J_i-1}(\xi)\right)\right], 0\right) \\ &< \alpha_{J_i-1} \oplus h_i \odot \frac{\epsilon_i}{2} < \epsilon_i. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

معادله (۱۴) به استقراء به ازای هر $\kappa = 2, \ldots, J_i$ نیز برقرار است و از آنجایی که $\mathcal{F}$ تابعی پیوسته است لذا وجود دارد $\eta_{J_i-(\kappa-1)} > 0$ به طوری که $D\left(z_{i,J_i-\kappa}(\xi) \ominus \mathcal{J}_{i,J_i-\kappa}(\xi), 0\right) \le \eta_{J_i-(\kappa-1)}$ است. در نتیجه

$$\begin{aligned} &D\left(\mathcal{F}\left[\xi_{i,J_i-\kappa}, z_{i,J_i-\kappa}(\xi), \lambda_i\right.\right. \\ &\left.\left(z_{i,J_i-\kappa}(\xi)\right)\right] \ominus \mathcal{F}\left[\xi_{i,J_i-\kappa},\right. \\ &\left.\left.\mathcal{J}_{i,J_i-\kappa}(\xi), \lambda_i\left(\mathcal{J}_{i,J_i-\kappa}(\xi)\right)\right], 0\right) \\ &< \frac{\alpha_{J_i-(\kappa-1)}}{2}. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

اکنون فرض کنید

$\alpha_{J_i-1}=\min\{\frac{\alpha_{J_i-(\kappa-1)}}{2},\frac{\eta_{J_i-(\kappa-1)}}{2}\}$ باشد، اگر

$$D\big(z_{i,J_i-\kappa}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,J_i-\kappa}(\xi),0\big)<\alpha_{J_i-\kappa}$$

باشد آنگاه با فرض $\ell=J_i-\kappa$ و با در نظر گرفتن معادلات (۱۲) و (۱۵)، داریم

$$\begin{aligned}&D\big(z_{i,J_i-(\kappa-1)}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,J_i-(\kappa-1)}(\xi),0\big)\\&\le D\big(z_{i,J_i-(\kappa-1)}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,J_i-(\kappa-1)}(\xi),0\big)\\&\oplus h_i\odot D\big(\mathcal{F}\big[\xi_{i,J_i-\kappa},z_{i,J_i-\kappa}(\xi),\lambda_i\big(z_{i,J_i-\kappa}(\xi)\big)\big]\\&\ominus\mathcal{F}\big[\xi_{i,J_i-\kappa},\mathcal{J}_{i,J_i-\kappa}(\xi),\lambda_i\big(\mathcal{J}_{i,J_i-\kappa}(\xi)\big)\big],0\big)\\&<\frac{\alpha_{J_i-(\kappa-1)}}{2}\oplus h_i\odot\frac{\alpha_{J_i-(\kappa-1)}}{2}<\alpha_{J_i-(\kappa-1)}.\end{aligned}\tag{۱۶}$$

بنابراین به ازای $\kappa=J_i$، داریم $D\big(z_{i,0}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,0}(\xi),0\big)<\alpha_0$ ، در نتیجه $D\big(z_{i,1}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,1}(\xi),0\big)<\alpha_1$ را داریم و به ازای مقادیر حقیقی $\kappa=J_i-1$ ، معادله $D\big(z_{i,2}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,2}(\xi),0\big)<\alpha_2$ برقرار است و با ادامه روند کاهشی به ازای $\kappa=2$ داریم $D\big(z_{i,J_i-1}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,J_i-1}(\xi),0\big)<\alpha_{J_i-1}$. از آنجایی که معادله (۱۴) نمایانگر رابطه $D\big(z_{i,J_i-1}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,J_i-1}(\xi),0\big)<\alpha_{J_i-1}$ است بنابراین با استفاده از این رابطه می توان $D\big(z_{i,J_i}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,J_i}(\xi),0\big)<\epsilon_i$ را نتیجه گرفت. در نتیجه اثبات قسمت اول لم فوق با شرط $\delta_i=\alpha_0$ به ازای تمامی نقاط اثبات شد.

برای اثبات قسمت دوم لم فرض کنید $\mathcal{J}(\xi)$ تابعی $[(ii)-gH]$–دیفرانسیل پذیر است باشد، لذا بر طبق معادله (۸) و به ازای $\ell=J_i,\dots,N_i-1$ داریم

$$\begin{aligned}&D\big(z_{i,\ell+1}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,\ell+1}(\xi),0\big)\\&=D\big(z_{i,\ell}(\xi)\ominus(-1)h_i\\&\odot\mathcal{F}\big[\xi_{i,\ell},z_{i,\ell}(\xi)\lambda_i\big(z_{i,\ell}(\xi)\big)\big]\\&\ominus\mathcal{J}_{i,\ell}(\xi)\oplus(-1)h_i\\&\odot\mathcal{F}\big[\xi_{i,\ell},\mathcal{J}_{i,\ell}(\xi)\lambda_i\big(\mathcal{J}_{i,\ell}(\xi)\big)\big],0\big)\\&\le D\big(z_{i,\ell}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,\ell}(\xi),0\big)\\&\ominus(-1)h_iD\big(\mathcal{F}\big[\xi_{i,\ell},z_{i,\ell}(\xi)\lambda_i\big(z_{i,\ell}(\xi)\big)\big]\\&\ominus\mathcal{F}\big[\xi_{i,\ell},\mathcal{J}_{i,\ell}(\xi)\lambda_i\big(\mathcal{J}_{i,\ell}(\xi)\big)\big],0\big).\end{aligned}\tag{۱۷}$$

اکنون فرض کنید $\alpha_{N_i}\equiv\epsilon_i$، از آنجایی که وجود دارد $\eta_{N_i}>0$ به طوری که

$$D\big(z_{i,N_i-1}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,N_i-1}(\xi),0\big)<\eta_{N_i}$$

است، بنابراین داریم

$$\begin{aligned}&D\big(\mathcal{F}\big[\xi_{i,N_i-1},z_{i,N_i-1}(\xi),\lambda_i\big(\\&z_{i,N_i-1}(\xi)\big)\big]\ominus\mathcal{F}\big[\xi_{i,N_i-1},\\&\mathcal{J}_{i,N_i-1}(\xi),\lambda_i\big(\mathcal{J}_{i,N_i-1}(\xi)\big)\big],0\big)\\&<\frac{\epsilon_i}{2}=\frac{\alpha_{N_i}}{2}.\end{aligned}\tag{۱۸}$$

حال اگر

$$\alpha_{N_i-1}\equiv\min\{\frac{\epsilon_i}{2},\frac{\eta_{N_i}}{2}\}$$

باشد و

$$D\big(z_{i,N_i-1}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,N_i-1}(\xi),0\big)<\alpha_{J_i-1}$$

در نتیجه به ازای $\ell=N_i-1$ با استفاده از معادلات (۱۷) و (۱۸)، داریم

$$\begin{aligned}&D\big(z_{i,N_i}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,N_i}(\xi),0\big)\\&\le D\big(z_{i,N_i-1}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,N_i-1}(\xi),0\big)\ominus(-1)\\&h_i\odot D\big(\mathcal{F}\big[\xi_{i,N_i-1},z_{i,N_i-1}(\xi),\lambda_i\big(z_{i,N_i-1}(\xi)\big)\big]\\&\ominus\mathcal{F}\big[\xi_{i,N_i-1},\mathcal{J}_{i,N_i-1}(\xi),\lambda_i\big(\mathcal{J}_{i,N_i-1}(\xi)\big)\big],0\big)\\&<\alpha_{N_i-1}\ominus(-1)h_i\odot\frac{\epsilon_i}{2}<\epsilon_i.\end{aligned}\tag{۱۹}$$

بنابراین بر طبق معادلات (۱۵) و (۱۶) می توان نتیجه گرفت

$$D\left(z_{i,N_i}(\xi)\ominus\mathcal{J}_{i,N_i}(\xi),0\right)<\epsilon_i .$$

لذا به ازای $[(ii)-gH]$–دیفرانسیل پذیری همگرایی در تمامی نقاط اثبات شد.■

قضیه ۳-۲: معادلات (۴)- (۸) را در نظر بگیرید. اگر $\kappa\in\mathbb{Z}^+$ باشد آنگاه داریم

$$\lim_{h_0,\dots,h_\kappa\to 0}\mathcal{J}_{\kappa,N_\kappa}(\xi)=\varphi(\xi_{\kappa+1}). \qquad (۲۰)$$

برهان: رجوع شود به رفرنس [۱۳] .

۴- آنالیز روش اویلر فازی

می دانیم که در روش های عددی خطا امری اجتناب ناپذیر است از این رو در این بخش خطاهای برشی موضعی و خطای جامع بررسی می شود سپس با استفاده از این مفاهیم به بررسی همگرایی، سازگاری و پایداری پرداخته می شود.

۴-۱- خطای برشی موضعی

تعریف۴-۱[۱۴] : فرض کنید $\Re_\kappa$نشان دهنده باقی مانده روش عددی برای معادله (۷) به صورت

$$\Re_\kappa=\mathcal{J}_{\kappa,n+1}(\xi)\ominus_{gH}\Big(\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi)\oplus\mathcal{F}\big[\xi,\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi),\lambda_\kappa\big(\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi)\big)\big]\Big).$$

باشد که در آن $\tau_\kappa=\frac{1}{h}\Re_\kappa$ را خطای برشی موضعی گویند و

$$\Re_\kappa=\frac{h^2}{2}\odot\mathcal{J}''_{i.gH}(\eta_\kappa),\tau_\kappa=\frac{h}{2}\odot\mathcal{J}''_{i.gH}(\eta_\kappa).$$

است. به ازای روش عددی معادله (۸) داریم

$$\Re_\kappa=\mathcal{J}_{\kappa,n+1}(\xi)\ominus_{gH}\Big(\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi)\ominus(-1)\mathcal{F}\big[\xi,\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi),\lambda_\kappa\big(\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi)\big)\big]\Big).$$

بنابراین

$$\Re_\kappa=\ominus(-1)\frac{h^2}{2}\odot\mathcal{J}''_{ii.gH}(\eta_\kappa),$$

$$\tau_\kappa=\ominus(-1)\frac{h}{2}\odot\mathcal{J}''_{ii.gH}(\eta_\kappa).$$

ابتدا سازگاری روش اویلر فازی را شرح می دهیم برای این منظور فرض می کنیم $D\left(\mathcal{J}''_{i.gH}(\eta_\kappa),0\right)\le M_2$ ، بنابراین با در نظر گرفتن نوع دیفرانسیل پذیری اگر $\mathcal{J}(\xi)$ تابعی $[(i)-gH]$– دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$\lim_{h\to0}\max_{\xi_\kappa\le b}D\left(\tau_\kappa,0\right)=\lim_{h\to0}\max_{\xi_\kappa\le b}D\left(\frac{h}{2}\odot\mathcal{J}''_{i.gH}(\eta_\kappa),0\right)=\lim_{h\to0}\frac{h}{2}\max_{\xi_\kappa\le b}D\left(\mathcal{J}''_{i.gH}(\eta_\kappa),0\right)\le\lim_{h\to0}\frac{h}{2}M_2=0.$$

اگر $\mathcal{J}(\xi)$ تابعی $[(ii)-gH]$– دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$\lim_{h\to0}\max_{\xi_\kappa\le T}D(\tau_\kappa,0)=\lim_{h\to0}\max_{\xi_\kappa\le T}D\left(\ominus(-1)\frac{h}{2}\odot\mathcal{J}''_{ii.gH}(\eta_\kappa),0\right)$$
$$=\lim_{h\to0}|(-1)\frac{h}{2}|\max_{\xi_\kappa\le T}D\left(\ominus\mathcal{J}''_{ii.gH}(\eta_\kappa),0\right)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h}{2}D\left(\mathcal{J}''_{ii.gH}(\eta_\kappa),0\right)$$
$$\le\lim_{h\to0}\frac{h}{2}M_2=0.$$

لم ۴-۲[۱۵]: به ازای تمام اعداد حقیقی z داریم $1+z \le e^{z}$.

۲-۴- خطای جامع

تعریف۴-۳: خطای جامع در روش اویلر در لحظه ی $\xi_{\kappa+1}$ با نماد $e_{\kappa+1}$ نشان داده می شود

- اگر $\mathcal{J}(\xi)$ تابعی $[(i)-gH]$–دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه خطای جامع به صورت

$$e_{\kappa+1}=\mathcal{J}_{\kappa,n+1}(\xi)\ominus_{gH}\Big(\mathcal{J}_{0,n}(\xi)\oplus h \odot\mathcal{F}\big[\xi,\mathcal{J}_{0,n}(\xi),\lambda_0\big(\mathcal{J}_{0,n}(\xi)\big)\big]\oplus \cdots\oplus h\odot\mathcal{F}\big[\xi,\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi),\lambda_\kappa\big(\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi)\big)\big]\Big).$$

- اگر $\mathcal{J}(\xi)$ تابعی $[(ii)-gH]$–دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه خطای جامع به صورت

$$e_{\kappa+1}=\mathcal{J}_{\kappa,n+1}(\xi)\ominus_{gH}\Big(\mathcal{J}_{0,n}(\xi)\ominus(-1)h\odot\mathcal{F}\big[\xi,\mathcal{J}_{0,n}(\xi),\lambda_0\big(\mathcal{J}_{0,n}(\xi)\big)\big]\ominus(-1)\cdots\ominus(-1)h\odot\mathcal{F}\big[\xi,\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi),\lambda_\kappa\big(\mathcal{J}_{\kappa,n}(\xi)\big)\big]\Big).$$

تعریف ۴-۴: همگرایی جواب های عددی به جوابهای دقیق به صورت

$$\lim_{h\to 0}\max_{\kappa} D(e_{\kappa+1},0)=0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\max_{\kappa} D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\big)=0.$$

می باشد.

قضیه۴-۵: فرض کنید $\mathcal{J}''_{gH}(\xi)$ موجود و $\mathcal{F}\big(\xi,\mathcal{J}(\xi),\lambda(\mathcal{J}_\kappa)\big)$ در شرط لیپ شیتس روی مجموعه ی

$$\Big\{\big(\xi,\mathcal{J}(\xi),\lambda(\mathcal{J}_\kappa)\big)\,\Big|\,\xi\in[0,p],\ \mathcal{J}\in\bar{B}(\mathcal{J}_0,q),p,q>0\Big\},$$

صدق کند آنگاه روش اویلرفازی تحت انواع دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته به جواب مسأله اولیه فازی (۴) همگرا می شود.

برهان: فرض کنید $\mathcal{J}(\xi)$ تابعی $[(i)-gH]$– دیفرانسیل پذیر باشد، بنابراین با استفاده از معادله (۷) و با فرض $d_\kappa=\frac{h^2}{2}\odot\mathcal{J}''_{i.gH}(\xi_\kappa)$، جواب دقیق معادله (۴) در معادله

$$\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1})=\mathcal{J}(\xi_\kappa)\oplus h\odot \mathcal{F}\big(\xi_\kappa,\mathcal{J}(\xi_\kappa),\lambda(\mathcal{J}(\xi_\kappa))\big)\oplus d_\kappa. \tag{۲۱}$$

صدق می کند. با کم کردن معادله فوق از معادله (۷) داریم

$$D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\big)=D\big(\mathcal{J}(\xi_\kappa),\mathcal{J}_\kappa\big)+h[D\big(\mathcal{F}\big(\xi_\kappa,\mathcal{J}(\xi_\kappa),\lambda(\mathcal{J}(\xi_\kappa))\big),\mathcal{F}\big(\xi_\kappa,\mathcal{J}_\kappa,\lambda(\mathcal{J}_\kappa)\big)\big)]+D(d_\kappa,0).$$

از آنجایی که $\mathcal{F}\big(\xi,\mathcal{J}(\xi),\lambda(\mathcal{J}_\kappa)\big)$ در شرط لیپ شیتس صدق می کند درنتیجه

$$D\big(\mathcal{F}\big(\xi_\kappa,\mathcal{J}(\xi_\kappa),\lambda(\mathcal{J}(\xi_\kappa))\big),\mathcal{F}\big(\xi_\kappa,\mathcal{J}_\kappa,\lambda(\mathcal{J}_\kappa)\big)\big)\le\mathcal{L}_\kappa D\Big(\big(\mathcal{J}(\xi_\kappa),\lambda(\mathcal{J}(\xi_\kappa))\big),\big(\mathcal{J}_\kappa,\lambda(\mathcal{J}_\kappa)\big)\Big).$$

با در نظر گرفتن تعریف ۲-۱ و استفاده از شرط لیپشیتس داریم

$$D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\big)\le(1+h\mathcal{L}_\kappa)D\big(\mathcal{J}(\xi_\kappa),\mathcal{J}_\kappa\big)+D\big(d_\kappa,0\big)$$

فرض کنید $d=\max_{0\le\kappa\le N}D(d_\kappa,0)$ و $\mathcal{L}=\max_{0\le\kappa\le N}\mathcal{L}_\kappa$، لذا

$$D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\big)\le(1+h\mathcal{L})D\big(\mathcal{J}(\xi_\kappa),\mathcal{J}_\kappa\big)+d.$$

از آنجایی که نامساوی به ازای تمامی κ ها برقرار است، لذا داریم

$$D\left(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\right)\le(1+h\mathcal{L})\left[(1+h\mathcal{L})D\left(\mathcal{J}(\xi_{\kappa-1}),\mathcal{J}_{\kappa-1}\right)+d\right]+d=(1+h\mathcal{L})^2D\left(\mathcal{J}(\xi_{\kappa-1}),\mathcal{J}_{\kappa-1}\right)+d\left[1+(1+h\mathcal{L})\right].$$

با ادامه همین روند داریم

$$D\left(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\right)\le(1+h\mathcal{L})^{\kappa+1}D\left(\mathcal{J}(\xi_0),\mathcal{J}_0\right)+d\left[1+(1+h\mathcal{L})+\cdots+(1+h\mathcal{L})^{\kappa}\right].$$

از طرفی داریم $\sum_{i=0}^{k}(1+hL)^i=\frac{(1+hL)^{k+1}-1}{hL}$ در نتیجه داریم

$$D\left(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\right)\le(1+h\mathcal{L})^{\kappa+1}D\left(\mathcal{J}(\xi_0),\mathcal{J}_0\right)+\frac{d}{h\mathcal{L}}\left[(1+h\mathcal{L})^{\kappa+1}-1\right].$$

با استفاده از لم ۴-۲ و $0\le(\kappa+1)h\le T$ به ازای مقادیر $(\kappa+1)\le(N-1)$ داریم

$$D\left(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\right)\le e^{\mathcal{L}T}D\left(\mathcal{J}(\xi_0),\mathcal{J}_0\right)+\frac{d}{h\mathcal{L}}[e^{\mathcal{L}T}-1].$$

همچنین فرض کنید

$$d=\max_{0\le\kappa\le N-1}D(d_\kappa,0)=\frac{h^2}{2}\max_{0\le\xi\le T}D\left(\mathcal{J}''_{i.gH}(\xi),0\right)$$

لذا $D\left(\mathcal{J}(\xi_0),\mathcal{J}_0\right)=0,$ در نتیجه

$$D\left(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\right)\le\frac{h}{h\mathcal{L}}[e^{\mathcal{L}T}-1]\max_{0\le\xi\le T}D\left(\mathcal{J}''_{i.gH}(\xi),0\right).$$

بنابراین

$$\lim_{h\to0}D\left(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\right)\to0$$

در نتیجه روش اویلر تحت $[(i)-gH]-$ دیفرانسیل پذیری همگرا است. اکنون فرض کنید $\mathcal{J}(\xi)$ تابعی $[(ii)-gH]-$دیفرانسیل پذیر باشد و فرض کنید

$$d_\kappa=\ominus(-1)\frac{h^2}{2}\odot\mathcal{J}''_{ii.gH}(\xi_\kappa),$$

بنابراین با استفاده از معادله (۸) جواب دقیق معادله (۴) در معادله زیر صدق می کند

$$\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1})=\mathcal{J}(\xi_\kappa)\ominus(-1)h\odot\mathcal{F}\left(\xi_\kappa,\mathcal{J}(\xi_\kappa),\lambda(\mathcal{J}(\xi_\kappa))\right)\oplus d_\kappa.$$

در نتیجه

$$D\left(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\right)=D\left(\mathcal{J}(\xi_\kappa),\mathcal{J}_\kappa\right)+h\left[D\left(\mathcal{F}\left(\xi_\kappa,\mathcal{J}(\xi_\kappa),\lambda(\mathcal{J}(\xi_\kappa))\right),\mathcal{F}\left(\xi_\kappa,\mathcal{J}_\kappa,\lambda(\mathcal{J}_\kappa)\right)\right)\right]+D\left(d_\kappa,0\right).$$

از آنجایی که $\mathcal{F}\left(\xi,\mathcal{J}(\xi),\lambda(y)\right)$ در شرط لیپ شیتس صدق می کند، بنابراین

$$D\left(\mathcal{F}\left(\xi_\kappa,\mathcal{J}(\xi_\kappa),\lambda(\mathcal{J}(\xi_\kappa))\right)\ominus_{gH}\mathcal{F}\left(\xi_\kappa,\mathcal{J}_\kappa,\lambda(\mathcal{J}_\kappa)\right),0\right)=D\left(\mathcal{F}\left(\xi_\kappa,\mathcal{J}(\xi_\kappa),\lambda(\mathcal{J}(\xi_\kappa))\right),\mathcal{F}\left(\xi_\kappa,\mathcal{J}_\kappa,\lambda(\mathcal{J}_\kappa)\right)\right)\le\mathcal{L}_\kappa D\left(\left(\mathcal{J}(\xi_\kappa),\lambda(\mathcal{J}(\xi_\kappa))\right),\left(\mathcal{J}_\kappa,\lambda(\mathcal{J}_\kappa)\right)\right).$$

با استفاده از تعریف۲-۱ و شرط لیپ شیتس، معادله زیر حاصل می شود

$$D\left(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\right)\le(1-h\mathcal{L}_\kappa)D\left(\mathcal{J}(\xi_\kappa),\mathcal{J}_\kappa\right)+D\left(d_\kappa,0\right). \quad (۲۲)$$

فرض کنید

$$\mathcal{L}=\max_{0\le\kappa\le N-1}\mathcal{L}_{\kappa},$$
$$d=\max_{0\le\kappa\le N-1}D(d_{\kappa},0),$$

لذا داریم

$$D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\big)\le(1-h\mathcal{L})D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa}),\mathcal{J}_{\kappa}\big)+d. \quad (۲۳)$$

از آنجایی که معادله (۲۳) به ازای تمامی κ صدق می کند لذا داریم

$$D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\big)\le(1-h\mathcal{L})\big[(1-h\mathcal{L})D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa-1}),\mathcal{J}_{\kappa-1}\big)+d\big]+d=(1-h\mathcal{L})^2D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa-1}),\mathcal{J}_{\kappa-1}\big)+d\big[1+(1-h\mathcal{L})\big].$$

با ادامه همین روند، داریم

$$D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\big)\le(1-h\mathcal{L})^{\kappa+1}D\big(\mathcal{J}(\xi_{0}),\mathcal{J}_{0}\big)+d\big[1+(1-h\mathcal{L})+\cdots+(1-h\mathcal{L})^{\kappa}\big]$$

با توجه به $\sum_{i=0}^{k}(1-hL)^i=\dfrac{1-(1-hL)^{k+1}}{hL}$ داریم

$$D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\big)\le(1-h\mathcal{L})^{\kappa+1}D\big(\mathcal{J}(\xi_{0}),\mathcal{J}_{0}\big)+\frac{d}{h\mathcal{L}}\big[1-(1-h\mathcal{L})^{\kappa+1}\big]. \quad (۲۴)$$

با استفاده از لم ۴-۲ و $z=-h\mathcal{L}$، معادله زیر به دست می آید

$$(1-h\mathcal{L})^{\kappa+1}\le e^{-h\mathcal{L}(\kappa+1)}\le\frac{1}{e^{\mathcal{L}T}}, \quad (۲۵)$$

از آنجایی که به ازای $(\kappa+1)\le(N-1)$ رابطه $(\kappa+1)h\le T$، برقرار است، لذا با استفاده از معادلات (۲۴-۲۵) داریم

$$D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\big)\le\frac{1}{e^{\mathcal{L}T}}D\big(\mathcal{J}(\xi_{0}),\mathcal{J}_{0}\big)+\frac{d}{h\mathcal{L}}\big[1-\frac{1}{e^{\mathcal{L}T}}\big].$$

اکنون فرض کنید

$$d=\max_{0\le k\le N-1}D\big(d_{\kappa},0\big)=-\frac{h^2}{2}\max_{0\le\xi\le T}D\big(\mathcal{J}''_{ii.gH}(\xi),0\big).$$

لذا $D\big(\mathcal{J}(\xi_{0}),\mathcal{J}_{0}\big)=0$ بنابراین داریم

$$D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\big)\le\frac{h}{h\mathcal{L}}[1-\frac{1}{e^{\mathcal{L}T}}]\max_{0\le t\le T}D\big(\mathcal{J}''_{ii.gH}(\xi),0\big).$$

بنابراین

$$\lim_{h\to0}D\big(\mathcal{J}(\xi_{\kappa+1}),\mathcal{J}_{\kappa+1}\big)\to0$$

در نتیجه تحت $[(ii)-gH]$–دیفرانسیل پذیری نیز روش اویلر فازی همگرا است. ■

۳-۴- پایداری روش اویلر فازی

تعریف۴-۶[۱۴]: فرض کنید $\mathcal{J}_{\kappa+1}$ و$\kappa=0,1,\ldots,$ جواب معادله اویلر فازی با $\mathcal{J}_0\in E$ باشد به طوری که $\kappa+1\ge0$ و همچنین فرض کنید $z_{\kappa+1}$ جواب روش عددی مشابه با $z_0=\mathcal{J}_0\oplus\delta_0\in\mathbb{E}$ باشد. روش اویلر فازی پایدار است اگر مقادیر مثبتی مانند $\mathbb{H}$و η وجود داشته باشدبه طوری که

$$D(z_{\kappa+1},\mathcal{J}_{\kappa+1})\le\eta\delta,$$
$$\forall(\kappa+1)h\le T,$$
$$\kappa\le N-1,h\in(0,\mathbb{H}).$$

با $D(\delta_0,0)\leq\delta$. با استفاده از تعریف۴-۶ و مرجع[۱۴] پایداری روش تحت مشتق پذیری تعمیم یافته به راحتی محاسبه می شود.

۱-۵- حل معادلات دیفرانسیل فازی ترکیبی با استفاده از روش تخصیص

در این بخش ابتدا جزئیات روش تخصیص معرفی می شود و سپس با توجه به آن معادله دیفرانسیل فازی ترکیبی تحت مشتق پذیری تعمیم یافته قوی حل شده و در نهایت سه مجموعه جواب معرفی می شود.

۱-۵- روش تخصیص

[۱۶] فرض کنید $x_\kappa\in\mathbb{E}$ در معادله (۴) و $[(i)-gH]$–دیفرانسیل باشد اکنون با استفاده از روش تخصیص[1] ابتدا ۱-برش معادله (۴) را به صورت زیر به دست می آوریم

$$\begin{cases}(\xi;1)=\mathcal{F}\Big(\xi,\varphi(\xi;1),\lambda\big(\varphi(\xi;1)\big)\Big)\\ \quad,\xi\in[\xi_\kappa,\xi_{\kappa+1}],\\ \varphi(0;1)=\varphi_0(1).\end{cases}\qquad(۲۶)$$

سپس با توجه به روش تخصیص پهناهای مجهول به معادله (۲۶) به ازای $r\in[0,1]$ اضافه و کم می شود

$$\varphi'(\xi;1)-\alpha'(\xi;r)=\mathcal{F}\Big[\Big(\xi,\varphi(\xi;1)-\alpha(\xi;r),\lambda\big(\varphi(\xi;1)-\alpha(\xi;r)\big)\Big)\Big],\qquad(۲۷)$$

$$\varphi'(\xi;1)+\beta'(\xi;r)=\mathcal{F}\Big[\Big(\xi,\varphi(\xi;1)+\beta(\xi;r),\lambda\big(\varphi(\xi;1)+\beta(\xi;r)\big)\Big)\Big].\qquad(۲۸)$$

که در آن پهناهای مجهول به ازای $r\in[0,1]$ به صورت $\alpha'(\xi;r)=\frac{\partial\alpha(\xi;r)}{\partial\xi}$ و $\beta'(\xi;r)=\frac{\partial\beta(\xi;r)}{\partial\xi}$ است.

با بکار بردن معادلات (۲۷) و (۲۸) داریم

$$\begin{cases}\alpha'(\xi;r)=\varphi'(\xi;1)-\mathcal{F}\Big[\Big(\xi,\varphi(\xi;1)\\ -\alpha(\xi;r),\lambda\big(\varphi(\xi;1)-\alpha(\xi;r)\big)\Big)\Big],\\ \alpha(0;r)=\varphi(0;1)-\underline{\varphi}(0;r),\xi\in[\xi_\kappa,\xi_{\kappa+1}].\end{cases}\qquad(۲۹)$$

$$\begin{cases}\beta'(\xi;r)=\mathcal{F}\Big[\Big(\xi,\varphi(\xi;1)+\beta(\xi;r),\\ \quad\lambda\big(\varphi(\xi;1)+\beta(\xi;r)\big)\Big)\Big]-\varphi'(\xi;1),\\ \beta(0;r)=\overline{\varphi}(0;r)-\varphi(0;1),\xi\in[\xi_\kappa,\xi_{\kappa+1}].\end{cases}\qquad(۳۰)$$

اکنون می خواهیم پهناهای $\alpha(\xi;r)$ و $\beta(\xi;r)$ با حل معادلات دیفرانسیل (۲۹) و (۳۰) به دست آوریم لذا سه پهنای زیر را معرفی می کنیم

$$\alpha^l(\xi;r)=\min_{r\in[0,1]}\{\alpha(\xi;r),\beta(\xi;r)\},\qquad(۳۱)$$

$$\alpha^u(\xi;r)=\max_{r\in[0,1]}\{\alpha(\xi;r),\beta(\xi;r)\},\qquad(۳۲)$$

$$\alpha^\varrho(\xi;r)=\varrho\alpha^u(\xi;r)+(1-\varrho)\alpha^l(\xi;r),r\in[0,1],\varrho\in[0,1].\qquad(۳۳)$$

در نتیجه با استفاده از پهناهای (۳۱) تا (۳۳) جواب های جدید به صورت زیر حاصل می شود.

$$\varphi^l(\xi)=[\varphi(\xi;1)-\alpha^l(\xi;r),\varphi(\xi;1)+\alpha^l(\xi;r)],\qquad(۳۴)$$

$$\varphi^u(\xi)=[\varphi(\xi;1)-\alpha^u(\xi;r),\varphi(\xi;1)+\alpha^u(\xi;r)],\qquad(۳۵)$$

$$\varphi^\varrho(\xi)=[\varphi(\xi;1)-\alpha^\varrho(\xi;r),\varphi(\xi;1)+\alpha^\varrho(\xi;r)].\qquad(۳۶)$$

اکنون فرض کنید $\varphi(\xi)$ موجود در معادله (۲۶) تابعی $[(ii)-gH]$–دیفرانسیل پذیر باشد لذا داریم

(۳۷)

$$\varphi'(\xi)=[\varphi'(\xi,1)+\beta'(\xi,r),\varphi'(\xi,1)-\alpha'(\xi,r)].$$

[1] Alocating method

به طور مشابه با استفاده از معادله (۲۷) و (۲۸) داریم

$$\begin{cases} \varphi'(\xi;1)+\beta'(\xi;r)=\mathcal{F}\Big[\Big(\xi,\varphi(\xi;1) \\ +\beta(\xi;r),\lambda\Big(\varphi(\xi;1)+\beta(\xi;r)\Big)\Big)\Big], \\ \varphi'(\xi;1)-\alpha'(\xi;r)=\mathcal{F}\Big[\Big(\xi,\varphi(\xi;1) \\ -\alpha(\xi;r),\lambda\Big(\varphi(\xi;1)-\alpha(\xi;r)\Big)\Big)\Big], \\ \underline{\varphi}(\xi_0;r)=\varphi(\xi_0;1)-\alpha(\xi_0;r), \\ \overline{\varphi}(\xi_0;r)=\varphi(\xi_0;1)+\beta(\xi_0;r). \end{cases} \quad (۳۸)$$

اکنون همانند حالت اول پهناهای $\alpha(\xi;r)$ و $\beta(\xi;r)$ را به دست می آوریم

$$\begin{cases} \beta'(\xi;r)=\mathcal{F}\Big[\Big(\xi,\varphi(\xi;1)+\beta(\xi;r) \\ ,\lambda\Big(\varphi(\xi;1)+\beta(\xi;r)\Big)\Big)\Big]-\varphi'(\xi;1), \\ \\ \beta(0;r)=\overline{\varphi}(0;r)-\varphi(0;1). \end{cases} \quad (۳۹)$$

$$\begin{cases} \alpha'(\xi;r)=\varphi'(\xi;1)-\mathcal{F}\Big[\Big(\xi,\varphi(\xi;1) \\ -\alpha(\xi;r),\lambda\Big(\varphi(\xi;1)-\alpha(\xi;r)\Big)\Big)\Big], \\ \\ \alpha(0;r)=\varphi(0;1)-\underline{\varphi}(0;r). \end{cases} \quad (۴۰)$$

اکنون با استفاده از معادلات (۳۹) و(۴۰) به روش مشابه جواب به ازای $0\le r\le 1$ داریم

$$\varphi(\xi;r)=[\varphi(\xi,1)+\beta(\xi,r),\varphi(\xi,1)-\alpha(\xi,r)]. \quad (۴۰)$$

در نهایت مشابه با حالت قبل جواب های $\varphi^{l}(\xi),\varphi^{u}(\xi)$ و $\varphi^{\varrho}(\xi)$ به دست می آید.

۲-۵- مجموعه جواب جدید سه تایی برای معادله دیفرانسیل ترکیبی فازی

در این زیر بخش سه مجموعه از جواب برای معادلات دیفرانسیل ترکیبی فازی در نظر گرفته و معرفی می شود. این مجموعه جواب ها به جواب های سه تایی به نام های مجموعه جواب متحد (USS)، مجموعه جواب های قابل قبول (TSS) و مجموعه جواب های قابل کنترل (CSS) نامیده می شوند.

تعریف۵-۱: معادله دیفرانسیل ترکیبی فازی (۴) را در نظر بگیرید، مجموعه جواب متحد (USS)، مجموعه جواب های قابل قبول (TSS) و مجموعه جواب های قابل کنترل (CSS) به ترتیب به صورت زیر معرفی می شود.

$$X_{\exists\exists}=\Big\{\varphi(\xi)\,\Big|\,\varphi'(\xi)\cap\mathcal{F}\Big(\xi,\varphi(\xi),\lambda_{\kappa}(\varphi_{\kappa})\Big)\neq \varnothing,\varphi(\xi_{\kappa})\cap\varphi_{\kappa},\qquad \xi\in[\xi_{\kappa},\xi_{\kappa+1}]\Big\},$$

$$X_{\forall\exists}=\Big\{\varphi(\xi)\,\Big|\,\varphi'(\xi)\subseteq\mathcal{F}\Big(\xi,\varphi(\xi),\lambda_{\kappa}(\varphi_{\kappa})\Big), \varphi(\xi_{k})\subseteq\varphi_{\kappa},\qquad \xi\in[\xi_{\kappa},\xi_{\kappa+1}]\Big\},$$

$$X_{\exists\forall}=\Big\{\varphi(\xi)\,\Big|\,\varphi'(\xi)\supseteq\mathcal{F}\Big(\xi,\varphi(\xi),\lambda_{\kappa}(\varphi_{\kappa})\Big), \varphi(\xi_{\kappa})\supseteq\varphi_{\kappa},\qquad \xi\in[\xi_{\kappa},\xi_{\kappa+1}]\}.$$

اکنون می خواهیم جواب معادله (۴) را به فرم این سه مجموعه جواب بیابیم. ابتدا اصطلاحات بدبینانه / خوش بینانه را برای روش مد نظر در نظر می گیریم و سپس این اصطلاحات را برای این مجموعه از جواب ها بکار می بریم و در نهایت مشاهده می شود که نگرش بدبینانه در جواب های TSS و نگرش خوش بینانه در جواب های CSS به چشم می خورد. علاوه بر آن ارتباط بین مجموعه جواب TSS و مجموعه جواب CSS معرفی می شود قابل ذکر است که استفاده از این مجموعه جواب ها و اصلاحات بدبینانه / خوش بینانه به نظر فرد خبره بستگی دارد و فرد خبره می تواند به صلاح دید خود

و بنا به شرایط مسئله این اصلاحات و در نتیجه جواب ها را تغییر دهد.

همانند روش تخصیص در این بخش نیز ابتدا پهنای چپ و راست به صورت زیر معرفی می شود

$$\alpha^{l}(\xi;r)=\min_{r\in[0,1]}\{\alpha(\xi;r),\beta(\xi;r)\}, \quad (۴۲)$$

$$\alpha^{u}(\xi;r)=\max_{r\in[0,1]}\{\alpha(\xi;r),\beta(\xi;r)\}, \quad (۴۳)$$

$$\begin{aligned}&\alpha^{\varrho}(\xi;r)=\varrho\alpha^{u}(\xi;r)+\\&(1-\varrho)\alpha^{l}(\xi;r), r\in[0,1], \varrho\in[0,1].\end{aligned} \quad (۴۴)$$

و با استفاده از معادلات (۴۲-۴۴) جواب ها به صورت زیر معرفی می شود.

$$\begin{aligned}&\varphi^{l}(\xi)=[\varphi(\xi;1)-\alpha^{l}(\xi;r)\\&,\varphi(\xi;1)+\alpha^{l}(\xi;r)],\end{aligned} \quad (۴۵)$$

$$\begin{aligned}&\varphi^{u}(\xi)=[\varphi(\xi;1)-\alpha^{u}(\xi;r)\\&,\varphi(\xi;1)+\alpha^{u}(\xi;r)],\end{aligned} \quad (۴۶)$$

$$\begin{aligned}&\varphi^{\varrho}(\xi)=[\varphi(\xi;1)-\alpha^{\varrho}(\xi;r)\\&,\varphi(\xi;1)+\alpha^{\varrho}(\xi;r)].\end{aligned} \quad (۴۷)$$

گزاره۵-۲: فرض کنید پهنای (۴۲) و (۴۳) به ترتیب مربوط به جواب های (۴۵) و (۴۶) باشد آنگاه $\varphi^{l}(\xi)\in TSS$ و $\varphi^{u}(\xi)\in \mathrm{CSS}$.

گزاره۵-۳: فرض کنید φ^{ϱ} جواب معادله (۴۷) و $\{\varrho_{\kappa}\}_{\kappa=0}^{n}$ یک دنباله غیرکاهشی با مقدار اولیه $\varrho_0=0$ باشد به طوری که هر گاه $\kappa\to\infty$ داریم $\varrho_{\kappa}\to 1$ آنگاه

$$\begin{aligned}&\left(\varphi^{\varrho_{\kappa}}(\xi)=\varphi^{l}(\xi)\in \mathcal{TSS}\right)\to\\&\left(\varphi^{u}(\xi)\in\mathcal{CSS}\right), \kappa\to\infty, \varrho_0=0.\end{aligned}$$

گزاره۵-۴: اگر دنباله $\{\varrho_{\kappa}\}_{\kappa=0}^{n}$ یک دنباله غیر افزایشی با مقدار اولیه $\varrho_0=1$ باشد به طوری که هر گاه $\kappa\to\infty$ داریم $\varrho_{\kappa}\to 1$ آنگاه

$$\begin{aligned}&\left(\varphi^{\varrho_{\kappa}}(\xi)=\varphi^{u}(\xi)\in \mathrm{CSS}\right)\to\\&\left(\varphi^{l}(\xi)\in TSS\right), \kappa\to\infty, \varrho_0=1.\end{aligned}$$

۶- مثال ها

در این بخش با توجه به روش پیشنهادی مقاله مثال های عددی ارائه می شود.

مثال۶-۱: معادله دیفرانسیل فازی ترکیبی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases}\varphi'_{gH}(\xi)=\varphi(\xi)+\mathfrak{M}(\xi)\\ \quad\lambda_{\kappa}\big(\varphi(\xi_{\kappa})\big),\ \xi\in[\xi_{\kappa},t_{\kappa+1}],\\ \quad\xi_{\kappa}=k,\kappa=0,1,2,\ldots,\\ \varphi(0;r)=[0.75+0.25r\\ \quad,1.125-0.125r],\ 0\le r\le 1.\end{cases}$$

که در آن $\mathfrak{M}(\xi)=|\sin(\pi\xi)|$ و $\kappa=0,1,2,\ldots$ و

$$\lambda_{\kappa}(\mu)=\begin{cases}\hat{0}, & \text{if}\quad \kappa=0,\\ \mu, & \text{if}\quad \kappa\in\{1,2,\ldots\}.\end{cases}$$

است. جواب دقیق $[(i)-gH]-$ دیفرانسیل پذیری با حل معادله (۴۸) به دست می آید. اگر $\kappa=0$، $\xi\in[0,1]$ باشد داریم

$$\begin{cases}\underline{\mathcal{J}}'(\xi;r)=\underline{\mathcal{J}}(\xi;r),\\ \overline{\mathcal{J}}'(\xi;r)=\overline{\mathcal{J}}(\xi;r),\\ \mathcal{J}(0;r)=[0.75+0.25r,\\ \quad 1.125-0.125r],\ 0\le r\le 1.\end{cases} \quad (۴۸)$$

اکنون با استفاده از روش اویلر تقریبی از جواب را داریم

$$\begin{cases}\mathcal{J}_1=\mathcal{J}_0\oplus h\odot\mathcal{J}_0,\\ \mathcal{J}_0=[0.75+0.25r,1.125-0.125r].\end{cases}$$

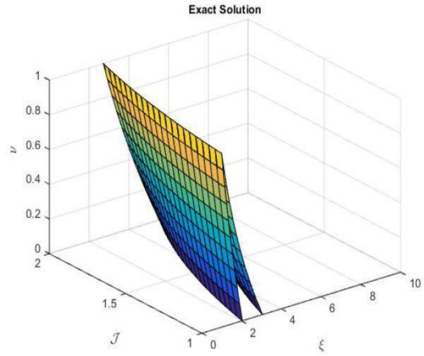
به ازای $\kappa=1,2,\ldots$ و $\xi\in[\xi_{\kappa},\xi_{\kappa+1}]$, جواب دقیق از حل معادله زیر به دست می آید

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{J}}'(\xi;r)=\underline{\mathcal{J}}(\xi;r)+|\sin(\pi\xi)|\,\underline{\mathcal{J}}(\xi;r),\\ \overline{\mathcal{J}}'(\xi;r)=\overline{\mathcal{J}}(\xi;r)+|\sin(\pi\xi)|\,\overline{\mathcal{J}}(\xi;r),\\ \mathcal{J}(0;r)=[0.75+0.25r\\ \quad ,1.125-0.125r],\ 0\le r\le 1. \end{cases}$$

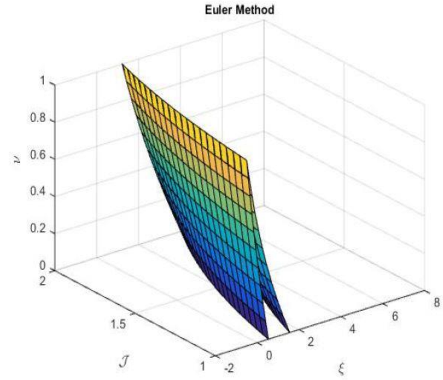
بنابراین

$$\begin{cases} \mathcal{J}_2=\mathcal{J}_1\oplus h\odot\left(\mathcal{J}_1\oplus|\sin(\pi\xi)|\,\mathcal{J}_1\right),\\ \mathcal{J}_0=[0.75+0.25r,1.125-0.125r]. \end{cases}$$

شکل۱. جواب دقیق مثال ۶-۱



شکل۲. تقریب جواب مثال ۶-۱



اکنون معادله را با استفاده از روش الوکیتین حل می کنیم برای این منظور ابتدا یک کات مسئله (۴) را در نظر گرفته و به ازای $\kappa=0$ و $\xi\in[0,1]$ داریم

$$\begin{cases} (\varphi^{(1)})'(\xi)=\varphi^{(1)}(\xi),\\ \varphi^{(1)}(0)=1. \end{cases}$$

که جواب دقیق $\varphi(\xi)=e^{\xi}$ است. با توجه به معادلات دیفرانسیل معمولی (۲۹) و (۳۰) داریم

$$\begin{cases} \alpha'(\xi;r)=\alpha(\xi;r),\alpha(0;r)=0.25(1-r),\\ \beta'(\xi;r)=\beta(\xi;r),\beta(0;r)=0.125(1-r). \end{cases} \quad (۴۹)$$

با حل معادله (۴۹)، داریم

$$\alpha(\xi;r)=0.25(1-r)e^{\xi},$$
$$\beta(\xi;r)=0.125(1-r)e^{\xi}.$$

اکنون با توجه به بخش ۵-۲ و استفاده از معادلات (۴۲-۴۴) داریم

$$\alpha^{l}(\xi;r)=\min_{0\le r\le 1}\{\alpha(\xi;r),\beta(\xi;r)\}=0.125(1-r)e^{\xi},$$
$$\alpha^{u}(\xi;r)=\max_{0\le r\le 1}\{\alpha(\xi;r),\beta(\xi;r)\}=0.25(1-r)e^{\xi},$$
$$\alpha^{\varrho}(\xi;r)=\varrho\alpha^{u}+(1-\varrho)\alpha^{\ell}=0.125e^{\xi}(1-r)(1+\varrho).$$

که در آن $\xi\in[0,1]$، $0\le r\le 1$ و $\varrho\in[0,1]$ است. بنابراین

$$\varphi^{-}(\xi;r)=\left[\varphi^{(1)}(\xi)-\alpha^{l}(\xi;r),\varphi^{(1)}(\xi)+\alpha^{l}(\xi;r)\right],$$
$$\varphi^{-}(\xi;r)=\left[e^{\xi}\left(1-0.125(1-r)\right),e^{\xi}\left(1+0.125(1-r)\right)\right],$$
$$\varphi^{+}(\xi;r)=\left[\varphi^{(1)}(\xi)-\alpha^{u}(\xi;r),\varphi^{(1)}+\alpha^{u}(\xi;r)\right],$$
$$\varphi^{+}(\xi;r)=\left[e^{\xi}\left(1-0.25(1-r)\right),e^{\xi}\left(1+0.25(1-r)\right)\right],$$
$$\varphi^{\varrho}(\xi;r)=\left[\varphi^{(1)}(\xi)-\alpha^{\varrho}(\xi;r),\varphi^{(1)}(\xi)+\alpha^{\varrho}(\xi;r)\right],$$
$$\varphi^{\varrho}(\xi;r)=\left[e^{\xi}\left(1-0.125(1-r)(1+\varrho)\right),e^{\xi}\left(1+0.125(1-r)(1+\varrho)\right)\right].$$

حاصل می شوند به وضوح روشن است که $\varphi^-(\xi)\in \mathrm{TSS}$ و $\varphi^+(\xi)\in \mathcal{CSS}$، و φ^{ϱ} یک جواب بدبینانه/خوشبینانه است. به ازای $\kappa=0$, $\xi\in[1,2]$ داریم

$$\begin{cases}\varphi'(\xi)=\varphi(\xi)+|\sin(\pi\xi)|\,\varphi(\xi),\\ \varphi(0;r)=[0.75+0.25r,1.125-0.125r].\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi'^{(1)}(\xi)=\varphi^{(1)}(\xi)+|\sin(\pi\xi)|\,\varphi^{(1)}(\xi),\\ \varphi'^{(1)}(0)=1.\end{cases}$$

در نتیجه جواب $\varphi(\xi)=e^{\xi-\frac{\cos\pi\xi}{\pi}}$ به دست می آید و با توجه به پهناها داریم

$$\begin{cases}\alpha(\xi;r)=0.25(1-r)e^{\xi-\frac{\cos\pi\xi}{\pi}},\\ \beta(\xi;r)=0.125(1-r)e^{\xi-\frac{\cos\pi\xi}{\pi}}.\end{cases}$$

حال با استفاده ازمعادلات (۳۳-۳۱) پهناهای زیر به دست می آید

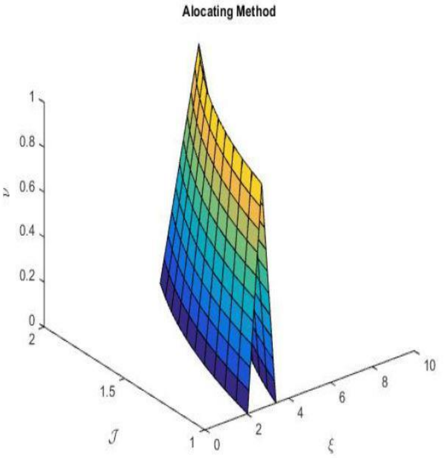
$$\alpha^{l}(\xi;r)=0.125(1-r)e^{\xi-\frac{\cos\pi\xi}{\pi}},$$
$$\alpha^{u}(\xi;r)=0.25(1-r)e^{\xi-\frac{\cos\pi\xi}{\pi}},$$
$$\alpha^{\varrho}(\xi;r)=0.125(1-r)e^{\xi-\frac{\cos\pi\xi}{\pi}}(1+\varrho).$$

نهایتا جواب ها به صورت زیر به دست می آید

$$\varphi^-(\xi;r)=\Big[e^{\xi-\frac{\cos\pi\xi}{\pi}}\big(1-0.125(1-r)\big),\ e^{\xi-\frac{\cos\pi\xi}{\pi}}\big(1+0.125(1-r)\big)\Big],$$
$$\varphi^+(\xi;r)=\Big[e^{\xi-\frac{\cos\pi\xi}{\pi}}\big(1-0.25(1-r)\big),\ e^{\xi-\frac{\cos\pi\xi}{\pi}}\big(1+0.25(1-r)\big)\Big],$$
$$\varphi^{\varrho}(\xi;r)=\Big[e^{\xi-\frac{\cos\pi\xi}{\pi}}\big(1-0.125(1-r)(1+\varrho)\big),\ e^{\xi-\frac{\cos\pi\xi}{\pi}}\big(1+0.125(1-r)(1+\varrho)\big)\Big].$$

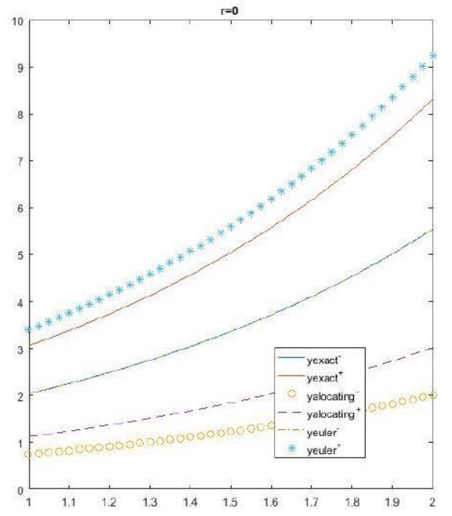
جواب های تحلیلی در شکل (۳) رسم شده است

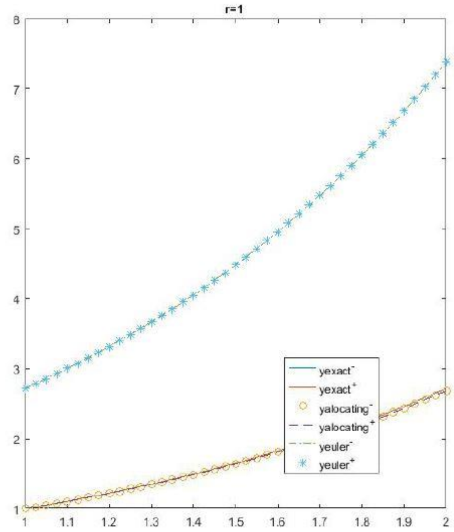
شکل ۳. جواب تقریبی $[(i)-gH]$- دیفرانسیل پذیری به فرم آر- برشی برای مثال ۶-۱



در شکل (۴) به وضوح روشن است که جواب به دست آمده در روش تخصیص و روش اویلر به جواب واقعی مسئله همگرا هستند

شکل ۴. مقایسه بین جواب های مثال۶-۱





مثال۶-۲: معادله دیفرانسیل فازی ترکیبی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \varphi'_{gH}(\xi) = -\varphi(\xi) + \mathfrak{M}(\xi)\lambda_\kappa\big(\varphi(\xi_\kappa)\big), \\ \quad \xi \in [\xi_\kappa, \xi_{\kappa+1}],\ \xi_\kappa = \kappa,\ \kappa = 0,1,2,\dots, \\ \varphi(0;r) = [0.75+0.25r, 1.125-0.125r] \\ \quad , 0 \le r \le 1. \end{cases}$$

که در آن

$$\mathfrak{M}(\xi) = \begin{cases} 2\big(\xi(\mathrm{mod}1)\big), & \text{if } \xi(\mathrm{mod}1) \le 0.5, \\ 2\big(1-\xi(\mathrm{mod}1)\big), & \text{if } \xi(\mathrm{mod}1) > 0.5. \end{cases}$$

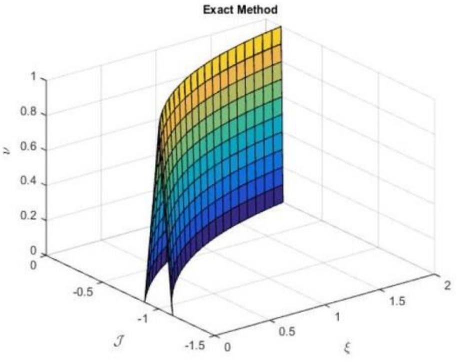
$$\lambda_\kappa(\mu) = \begin{cases} \hat{0}, & \text{if } \kappa = 0, \\ \mu, & \text{if } \kappa \in \{1,2,\dots\}. \end{cases}$$

لذا جواب $[(ii)-gH]$–دیفرانسیل پذیری داریم

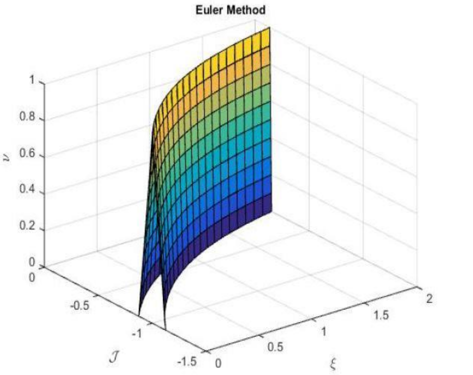
$$\begin{cases} \underline{\mathcal{J}}'(\xi;r) = -\overline{\mathcal{J}}(\xi;r) + \mathfrak{M}(\xi)\overline{\mathcal{J}}(\xi;r), \\ \overline{\mathcal{J}}'(\xi;r) = -\underline{\mathcal{J}}(\xi;r) + \mathfrak{M}(\xi)\underline{\mathcal{J}}(\xi;r), \\ \mathcal{J}(0;r) = [0.75+0.25r, 1.125r-0.125]. \end{cases}$$

نمایشی از $\mathcal{J}(\xi)$ و $\mathcal{J}'_{ii.gH}(\xi)$ در شکل‌های (۵) و (۶) به ترتیب رسم شده اند.

شکل ۵. جواب دقیق مثال ۶-۲



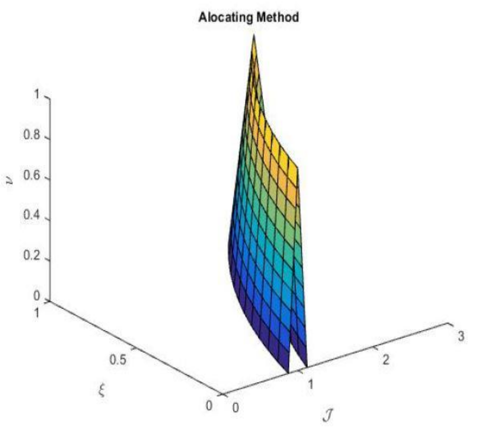
شکل ۶. تقریب جواب مثال ۶-۲



اکنون با استفاده از روش الوکیتین در بخش ۵، جواب های تحلیلی $[(ii)-gH]$–دیفرانسیل

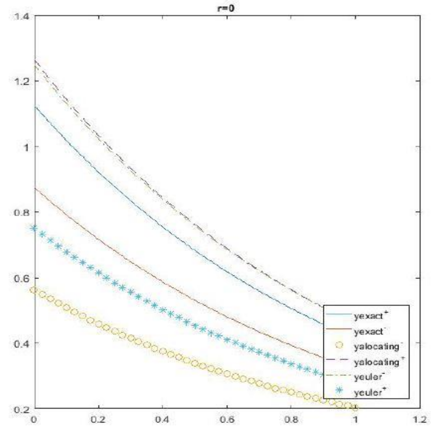
پذیری به دست می آوریم. جواب تقریبی به دست آمده از این روش در شکل (۷) نمایش داده شده است.

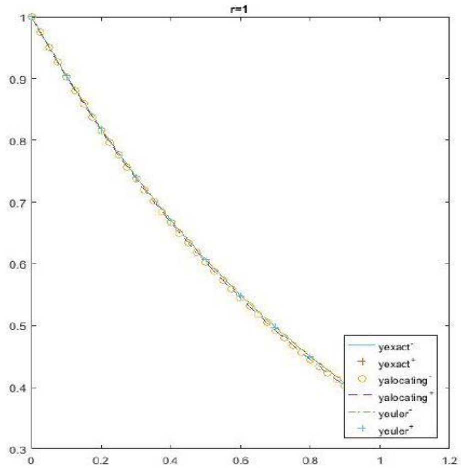
شکل ۷. جواب $[(ii)-gH]$– دیفرانسیل پذیری به فرم آر-برش مثال ۶-۲



در شکل (۸) به وضوح روشن است که جواب به دست آمده در روش تخصیص و روش اویلر به جواب واقعی مسئله همگرا هستند.

شکل۸. مقایسه روش اویلر و تخصیص با جواب واقعی





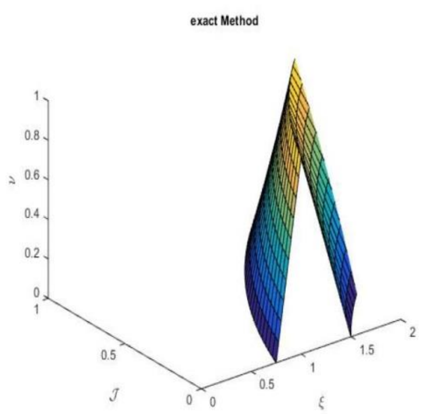
مثال ۶-۳ معادله دیفرانسیل فازی ترکیبی زیر را در نظر بگیرید که

$$\begin{cases} \varphi'_{gH}(\xi) = -\varphi^2(\xi) + \mathfrak{M}(\xi)\lambda_\kappa\big(\varphi(\xi_\kappa)\big), \\ \quad \xi \in [\xi_\kappa, \xi_{\kappa+1}],\ \xi_\kappa = \kappa,\ \kappa = 0,1,2,\dots, \\ \varphi(0;r) = [0.75+0.25r, 1.5-0.5r], \\ \quad 0 \le r \le 1. \end{cases}$$

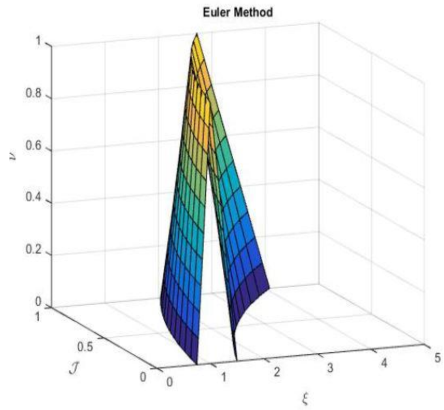
$$\mathfrak{M}(\xi) = \begin{cases} 2\big(\xi(\mathrm{mod}1)\big), \text{if } \xi(\mathrm{mod}1) \le 0.5, \\ 2\big(1-\xi(\mathrm{mod}1)\big), \text{if } \xi(\mathrm{mod}1) > 0.5, \end{cases}$$

$$\lambda_\kappa(\mu) = \begin{cases} \hat{0}, & \text{if } \kappa = 0, \\ \mu, & \text{if } \kappa \in \{1,2,\dots\}. \end{cases}$$

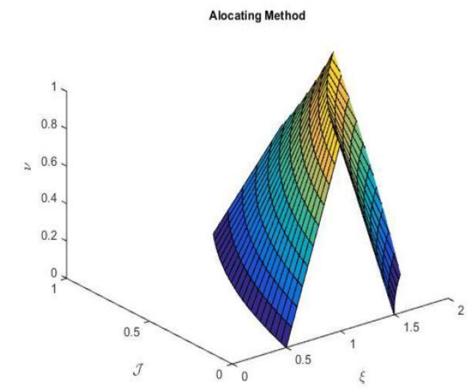
شکل ۹. جواب دقیق مثال۶-۳



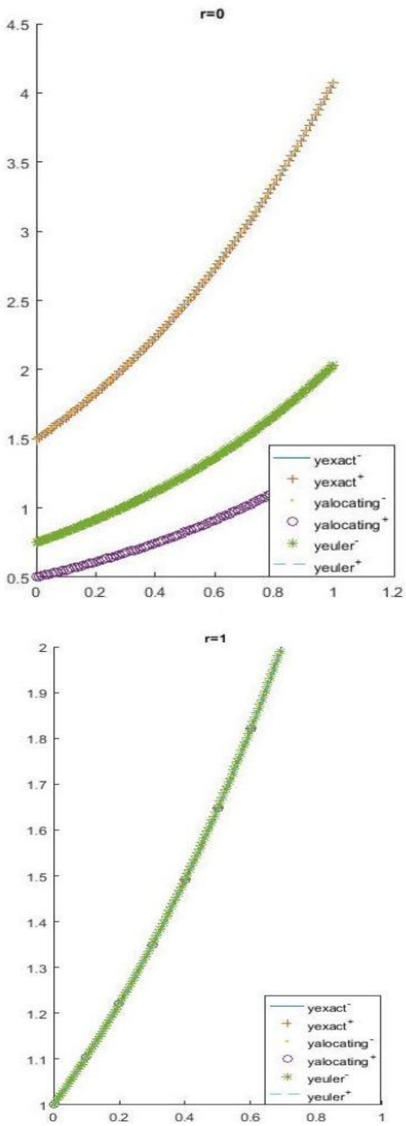
شکل ۱۰. جواب تقریبی مثال ۶-۳



شکل۱۱. جواب تقریبی $[(i)-gH]$-دیفرانسیل پذیری به فرم آر- برشی مثال ۶-۳



در شکل (۱۲) به وضوح روشن است که جواب به دست آمده در روش تخصیص و روش اویلر به جواب واقعی مسئله همگرا هستند



شکل ۱۲. مقایسه روش اویلر و تخصیص با جواب واقعی

نتیجه گیری: در این مقاله ابتدا روش اویلر فازی معرفی شد و از این روش برای یافتن جواب های تقریبی معادلات دیفرانسیل فازی ترکیبی استفاده شدو سپس در این راستا خطای موضعی برشی و خطای جامع، پایداری و همگرایی روش مورد بررسی قرار گرفت. سپس با استفاده از مشتق پذیری تعمیم یافته به معرفی روش تخصیص برای حل معادله دیفرانسیل ترکیبی فازی پرداخته شد و با استفاده ازجوابهای روش تخصیص و روش اویلر فازی همگرایی جواب ها بررسی شد.

فهرست منابع:

[1] Zadeh L.A, Fuzzy sets, Information and Computation, Vol 8, 1965, 338-353.

[2] Hukuhara, M. Integration Des Applications Mesurables Dont La Valeur Est Un Compact Convexe, (in French) Funkcial. Ekvac, 10 (1967) 205–223.

[3] O. Kaleve, Fuzzy differential equations, Fuzzy sets and systems, Vol ۲۴, ۱۹۸۷, ۳۰۱-۳۱۷.

[4] B. Bede, S.G Gal, Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, Fuzzy sets and systems, Vol 151, 2005, 581-599.

[5] L. Stefanini, B. Bede, Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, Nonlinear Analysis, Vol 71, 2009, 1311-1328.

[6] P. Parkash, V. Kalaiselvi, Numerical solution of hybrid fuzzy differential equations by predictor-corrector method. International Journal of Computer Mathematics, Vol 86, 2009, 121-134.

[7] V. Lakshmikantham, X.Z. Liu, Impulsive hybrid systems and stability theory,Internat. J.Nonlinear Differential Equations, Vol 5, 1999, 9-17.

[8] S. Pederson, M. Sambandham, The Runge-kutta method for hybrid fuzzy differential equations. Nonlinear Anal, Hybrid System, Vol 2, 2008, 626-634.

[9] B. Bede, L. Stefanini, Generalized differentiability of fuzzy valued functions, Fuzzy Sets and Systems, Vol 230, 2013, 119-141.

[10] Z. Guang-Quan, Fuzzy continuous function and its properties, Fuzzy Sets and Systems, Vol 43(2), 1991, 159-171.

[11] B. Bede, S.G Gal, Remark on the new solutions of fuzzy differential equations, Chaos Soluitons Fractals, 2006.

[12] R.Goetschel, W. Voxman, Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems, Vol 24, 1987, 31-43.

[13] S. Pederson, M. Sambandham, Numerical solution to hybrid fuzzy systems, Mathematical and Computer Modelling, Vol 45, 2007, 1133-1144.

[14] T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh, A. Armand, A full fuzzy method for solving differential equation based on Taylor expansion. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, Vol 29, 2015, 1039-۱۰۵۵.

[15] J.F. Epperson, An Introduction to Numerical Methods and Analysis, John Wiley and Sons, 2007.

[16] T. Allahviranloo, S. Salahshour, Fuzzy symmetric solutions of fuzzy linear systems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 4545- 4553.