دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و دوم، مهر و آبان ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

اشتقاق‌ها روی ضرب لائو $A\times_\theta B$ جبرهای باناخ

سعید شمس*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۱۷   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۴/۲۹

چکیده

توسیع جبرهای باناخ تعریف شده توسط حاصل‌ضرب دکارتی بوسیله یک تابعک خطی مانند θ را جبرهای باناخ با ضرب θ-لائو می‌نامند. این نوع از جبرهای باناخ اخیراً مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. اشتقاق‌ها نقش مهمی در ساختارهای جبری دارند که با استفاده از این نقش، می‌توان به برخی از ویژگی‌های ساختارهای جبری که یک اشتقاق روی آن تعریف شده است مانند ساده یا نیم‌ساده بودن آن‌ها پی برد. در این مقاله به اشتقاق‌های تعریف شده روی ضرب لائو جبرهای باناخ می‌پردازیم و این اشتقاق‌ها را در حالت‌های مختلف توصیف می‌کنیم. به‌عنوان توصیف اصلی، برای دو جبر باناخ A و B که $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$، نشان می‌دهیم که $D:A\times_\theta B\to A\times_\theta B$ یک اشتقاق است اگر و تنها اگر اشتقاق‌های $D_A:A\to A$، $D_B:B\to B$ و θ-اشتقاق $\Psi:B\to Z(A)$ موجود باشند که برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$، D به‌صورت زیر باشد:

$$D(a,b)=(D_A(a)+\Psi(b),D_B(b)).$$

عکس نتیجه بالا را در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم و با توجه به نتایج به‌دست آمده از توصیف اشتقاق‌ها، گروه همانستگی مرتبه اول این حاصل‌ضرب از جبرهای باناخ را بررسی و توصیف می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: اشتقاق، جبر باناخ، ضرب لائو، گروه همانستگی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: s.shams@urmia.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک باناخ A - دومدول باشد. آنگاه نگاشت $D:A\to X$ را یک اشتقاق گوییم هرگاه برای هر $a,b\in A$ داشته باشیم:

$$D(ab)=a\cdot D(b)+D(a)\cdot b.$$

اشتقاق $D:A\to X$ را یک اشتقاق درونی گوییم هرگاه $x\in X$ موجود باشد که برای هر $a\in A$ داشته باشیم: $D(a)=a\cdot x-x\cdot a$. طیف جبر باناخ A را با $\sigma(A)$ نمایش می‌دهیم که مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی ضربی (همریختی) پیوسته پوشا روی A است. آنگاه θ-اشتقاق D از A به توی X، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(ab)=\theta(a)D(b)+D(a)\theta(b).$$

فضای تمام اشتقاق‌های پیوسته D از A به‌توی X را با $Z^1(A,X)$، فضای تمام θ-اشتقاق‌های پیوسته D از A به‌توی X را با $Z_\theta^1(A,X)$، و فضای تمام اشتقاق‌های پیوسته درونی D از A به‌توی X را با $N^1(A,X)$ نمایش می‌دهیم. گروه همانستگی (هاکشیلد) مرتبه اول جبر باناخ A با ضرایب در X را با $\mathrm{H}^1(A,X)$ نمایش می‌دهیم که برابر با فضای خارج قسمتی $Z^1(A,X)/N^1(A,X)$ است. به‌وضوح $\mathrm{H}_\theta^1(A,X)\subseteq \mathrm{H}^1(A,X)$.

فرض کنید A و B دو جبر باناخ و $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$، آنگاه $A\times_\theta B$ با ضرب و نرم زیر تبدیل به یک جبر باناخ می‌شود:

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1a_2+\theta(b_2)a_1+\theta(b_1)a_2,b_1b_2),$$

و

$$\|(a,b)\|=\|a\|_A+\|b\|_B.$$

این نوع از ضرب روی جبرهای باناخ برای اولین بار توسط لائو در [1] معرفی شدو نتایج اساسی روی این حاصل‌ضرب، توسط سنگانی منفرد در [2] ارائه شد و محققین متعددی روی این حاصل‌ضرب از جبرهای باناخ و توسیع آن توسط یک ریختی مدولی،پژوهش‌هایی را انجام داده‌اند که می‌توان به مقاله‌های اشاره[3]،[4]، [5]، [6]، [7]، [8]، [9] کرد.

در این مقاله ابتدا اشتقاق‌های روی جبر باناخ $A\times_\theta B$ را مشخص می‌کنیم و حالت‌های مختلف آن را بررسی می‌کنیم، سپس به بررسی گروه همانستگی مرتبه اول $A\times_\theta B$ با ضرایب در خودش می‌پردازیم. در پایان چند مثال را برای نتایج به‌دست آمده ارائه می‌کنیم.

۲- اشتقاق‌ها روی ضرب لائو $A\times_\theta B$

فرض کنید A و B دو جبر باناخ باشند. در این بخش به مطالعه‌ی اشتقاق‌ها از $A\times_\theta B$ به‌توی خودش می‌پردازیم و این اشتقاق‌ها را توصیف می‌کنیم. تمامی اشتقاق‌ها و نگاشت‌ها در این بخش پیوسته فرض شده‌اند و در بیان نتایج از نوشتن آن اجتناب کرده‌ایم.

قضیه ۲-۱: فرض کنید A و B دو جبر باناخ باشند و $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$، آنگاه $D:A\times_\theta B\to A\times_\theta B$ یک اشتقاق است اگر و تنها اگر اشتقاق‌های $D_A:A\to A$، $D_B:B\to B$ و θ-اشتقاق $\Psi:B\to Z(A)$ موجود باشند که برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$، D به‌صورت زیر باشد:

$$D(a,b)=(D_A(a)+\Psi(b),D_B(b)).$$

هم‌چنین، D درونی است اگر و تنها اگر D_A و D_B درونی باشند.

برهان: فرض کنید $D:A\times_\theta B\to A\times_\theta B$ یک اشتقاق باشد. نگاشت‌های کانونی $\iota_A:A\to A\times_\theta B$، $\iota_B:B\to A\times_\theta B$ و نگاشت‌های تصویری $p_A:A\times_\theta B\to A$، $p_B:A\times_\theta B\to B$ را در نظر می‌گیریم. آنگاه نگاشت‌های خطی

$D_A:=p_A\circ D\circ\iota_A$ ،$D_B:=p_B\circ D\circ\iota_B$ ،
$\Phi:=p_A\circ D\circ\iota_B$ و $\Psi:=p_B\circ D\circ\iota_A$

مرتبط با اشتقاق D وجود دارند که برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$ داریم:

$$D(a,b)=(D_A(a)+\Psi(b),D_B(b)+\Phi(a)).$$

آنگاه برای هر $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\times_\theta B$ داریم:

$$D((a_1,b_1)(a_2,b_2))$$ **Error! Bookmark not defined.**

$$=D(a_1a_2+\theta(b_2)a_1+\theta(b_1)a_2,b_1b_2)$$
$$=(D_A(a_1a_2+\theta(b_2)a_1+\theta(b_1)a_2)+\Psi(b_1b_2),D_B(b_1b_2)+\Phi(a_1a_2+\theta(b_2)a_1+\theta(b_1)a_2)).$$

از طرفی برای هر $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\times_\theta B$ داریم:

$$\begin{aligned}&(a_1,b_1)D((a_2,b_2))+D((a_1,b_1))(a_2,b_2)\\&=(a_1,b_1)(D_A(a_2)+\Psi(b_2),D_B(b_2)+\Phi(a_2))\\&\quad+(D_A(a_1)+\Psi(b_1),D_B(b_1)+\Phi(a_1))(a_2,b_2)\\&=(a_1D_A(a_2)+a_1\Psi(b_2)+\theta(b_1)D_A(a_2)\\&\quad+\theta(b_1)\Psi(b_2)+\theta(D_B(b_2))a_1+\theta(\Phi(a_2))a_1,\\&\quad b_1D_B(b_2)+b_2\Phi(a_2))\\&\quad+(D_A(a_1)a_2+\Psi(b_1)a_2+\theta(D_B(b_1))a_2\\&\quad+\theta(\Phi(a_1))a_2+\theta(b_2)D_A(a_1)+\theta(b_2)\Psi(b_1),\\&\quad D_B(b_1)b_2+\Phi(a_1)b_2)\end{aligned}$$

حال اگر قرار دهیم $b_1=b_2=0$، آنگاه بنابر (۲،۱) و (۳،۱)، برای هر $a_1,a_2\in A$ داریم:

$$D_A(a_1a_2)=a_1D_A(a_2)+D_A(a_1)a_2.$$

پس D_A یک اشتقاق است. اگر قرار دهیم $a_1=a_2=0$، آنگاه بنابر (۲،۱) و (۳،۱)، برای هر $b_1,b_2\in B$ داریم:

$$D_B(b_1b_2)=b_1D_B(b_2)+D_B(b_1)b_2$$

و

$$\Psi(b_1b_2)=\theta(b_1)\Psi(b_2)+\Psi(b_1)\theta(b_2).$$

این یعنی D_B یک اشتقاق روی B و Ψ یک θ-اشتقاق روی B است. اگر قرار دهیم $a_1=b_2=0$، آنگاه بنابر (۲،۱) و (۳،۱)، برای هر $a\in A$ و $b\in B$، $\Phi(a)=0$ و $\Psi(b)a+\theta(D_B(b))a=0.$ **Error! Bookmark not defined.** به‌طور مشابه، اگر قرار دهیم $a_2=b_1=0$، آنگاه دوباره بنابر (۲،۱) و (۳،۱)، برای هر $a\in A$ و $b\in B$ داریم:

$$a\Psi(b)+\theta(D_B(b))a=0.$$

Error! Bookmark not defined. بنابراین (۷،۱) و (۸،۱) نتیجه می‌دهند که برای هر $a\in A$ و $b\in B$، $a\Psi(b)=\Psi(b)a$. این یعنی Ψ نگاشتی خطی از B به توی $Z(A)$ است.

حال فرض کنید D درونی باشد، پس وجود دارد $(x,y)\in A\times_\theta B$ به‌طوری‌که برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$ داریم:

$$D(a,b)=(a,b)(x,y)-(x,y)(a,b)$$ **Error! Bookmark not defined.**

$$\begin{aligned}&=(ax+\theta(b)x+\theta(y)a,by)\\&\quad-(xa+\theta(y)a+\theta(b)x,yb)\\&=(ax-xa,by-yb).\end{aligned}$$

از طرفی برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$ داریم:

$$D(a,b)=(D_A(a)+\Psi(b),D_B(b)).$$

Error! Bookmark not defined. بنابراین (۹،۱) و (۱۰،۱) نتیجه می‌دهند که D_A و D_B درونی هستند. عکس به‌وضوح برقرار است.

گزاره ۲-۱: فرض کنید A و B دو جبر باناخ، $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$ و $d:B\to B$ یک اشتقاق باشد. آنگاه $D:A\times_\theta B\to A\times_\theta B$ با ضابطه‌ی $D(a,b)=(0,d(b))$ برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$،

یک اشتقاق است اگر و تنها اگر $R_d \subseteq \ker\theta$. هم چنین D یک اشتقاق درونی است اگر و تنها اگر d اشتقاقی درونی و $R_d \subseteq \ker\theta$ باشد.

برهان: برای هر $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in A\times_\theta B$ داریم:

Error! Bookmark not defined.

$$D((a_1,b_1)(a_2,b_2)) = (0, d(b_1b_2))$$
$$= (0, b_1 d(b_2) + d(b_1)b_2).$$

از طرفی برای هر $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in A\times_\theta B$ داریم:

$$\begin{aligned}&(a_1,b_1)D((a_2,b_2)) + D((a_1,b_1))(a_2,b_2)\\ &= (a_1,b_1)(0,d(b_2)) + (0,d(b_1))(a_2,b_2)\\ &= (\theta(d(b_2))a_1, b_1 d(b_2))\\ &\quad + (\theta(d(b_1))a_2, d(b_1)b_2).\end{aligned}$$

اما چون **Error! Bookmark not defined.** $R_d \subseteq \ker\theta$، پس (۱۱،۱) و (۱۲،۱) نتیجه می‌دهند که D یک اشتقاق است. عکس به وضوح برقرار است. هم‌چنین، به‌راحتی می‌توان نشان داد که D یک اشتقاق درونی است اگر وتنها اگر d اشتقاقی درونی باشد.

نتیجه ۲-۱: فرض کنید A یک جبر باناخ، $\theta \in \sigma(A)\cup\{0\}$ و $d: A\to A$ یک اشتقاق باشد. آنگاه $D: A\times_\theta A \to A\times_\theta A$ با ضابطه‌ی $D(a,b)=(d(a),d(a))$ برای هر $(a,b)\in A\times_\theta A$، یک اشتقاق است اگر و تنها اگر $R_d \subseteq \ker\theta$. هم چنین D یک اشتقاق درونی است اگر و تنها اگر d اشتقاقی درونی و $R_d \subseteq \ker\theta$ باشد.

قضیه ۲-۲: فرض کنید A و B دو جبر باناخ، $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$ و $H^1(A,A)=H^1_\theta(B,A)=0$. اگر برای هر $d\in Z^1(B,B)$، $R_d \subseteq \ker\theta$، آنگاه

$$\mathrm{H}^1(A\times_\theta B, A\times_\theta B) \cong \mathrm{H}^1(B,B).$$

برهان: برای $T\in Z^1(B,B)$، عضو $D_T \in \mathrm{Z}^1(A\times_\theta B, A\times_\theta B)$، با ضابطه‌ی $D_T(a,b)=(0,T(b))$ را در نظر بگیرید. کلاس هم ارزی D_T در $\mathrm{H}^1(A\times_\theta B, A\times_\theta B)$ را با $\overline{D_T}$ نمایش می‌دهیم. نگاشت $\Lambda: Z^1(B,B)\to \mathrm{H}^1(A\times_\theta B, A\times_\theta B)$ را با ضابطه‌ی $\Lambda(T)=\overline{D_T}$ برای هر $T\in Z^1(B,B)$ در نظر می‌گیریم. آنگاه بنابر گزاره ۲-۱، Λ خوش‌تعریف و خطی است.

فرض کنید $D\in \mathrm{Z}^1(A\times_\theta B, A\times_\theta B)$. بنابر قضیه ۲-۱، اشتقاق‌های $D_A: A\to A$، $D_B: B\to B$ و θ-اشتقاق $\Psi: B\to Z(A)$ موجود هستند که برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$، داریم:

$$D(a,b) = (D_A(a)+\Psi(b), D_B(b)).$$

چون $H^1(A,A)=H^1_\theta(B,A)=0$، بنابراین $x\in A$ وجود دارد که $D_A=\mathrm{ad}_x$ و $\Psi=0$. اگر قرار دهیم $T=D_B$، پس T یک اشتقاق روی A خواهد بود. آنگاه برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$ داریم:

$$\begin{aligned}D(a,b) - D_T(a,b) &= (\mathrm{ad}_x(b), 0)\\ &= \mathrm{ad}_{(x,0)}(a,b).\end{aligned}$$

بنابراین $\overline{D}=\overline{D_T}$ و درنتیجه $\Lambda(T)=\overline{D}$. این یعنی Λ پوشاست. هم‌چنین:

$$\begin{aligned}\ker\Theta &= \{T\in Z^1(B,B): \Lambda(T)=\overline{D_T}=0\}\\ &= \{T\in Z^1(B,B): D_T \text{ is inner}\}\\ &= \{T\in (B,B): D_T=\mathrm{ad}_a, a\in B\}\\ &= N^1(B,B).\end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathrm{H}^1(A\times_\theta B, A\times_\theta B) \cong \mathrm{H}^1(B,B).$$

گزاره ۲-۲: فرض کنید A و B دو جبر باناخ، $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$، $d: A\to A$ و $D: A\times_\theta B\to A\times_\theta B$ با

ضابطه‌ی $D(a,b)=(d(a),0)$ نگاشت‌های خطی پیوسته باشد. آنگاه D یک اشتقاق (درونی) است اگر و تنها اگر d یک‌اشتقاق (درونی) باشد.

برهان: با محاسبه‌ای ساده نتیجه حاصل می‌شود.

قضیه ۲-۳: فرض کنید A و B دو جبر باناخ، $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$ و $H^1(B,B)=H^1_\theta(B,A)=0$. آنگاه به‌عنوان فضاهای برداری داریم:

$$\mathrm{H}^1(A\times_\theta B,A\times_\theta B)\cong \mathrm{H}^1(A,A)\bigcap\frac{\mathrm{Hom}_B(A,A)}{N^1(A,A)}.$$

برهان: برای $T\in Z^1(A,A)\bigcap\mathrm{Hom}_B(A,A)$، عضو $D_T\in \mathrm{Z}^1(A\times_\theta B,A\times_\theta B)$، با ضابطه‌ی $D_T(a,b)=(T(a),0)$ را در نظر بگیرید. کلاس هم‌ارزی D_T در $\mathrm{H}^1(A\times_\theta B,A\times_\theta B)$ را با $\overline{D_T}$ نمایش می‌دهیم. نگاشت

$$\Theta: Z^1(A,A)\bigcap\mathrm{Hom}_B(A,A)\to \mathrm{H}^1(A\times_\theta B,A\times_\theta B)$$

را برای هر $T\in Z^1(A,A)\bigcap\mathrm{Hom}_B(A,A)$ با ضابطه‌ی $\Theta(T)=\overline{D_T}$ در نظر می‌گیریم. آنگاه بنابر گزاره ۲-۲، Θ خوش‌تعریف و خطی است.

فرض کنید $D\in \mathrm{Z}^1(A\times_\theta B,A\times_\theta B)$. بنابر قضیه ۲-۱، اشتقاق‌های $D_A:A\to A$، $D_B:B\to B$ و θ-اشتقاق $\Psi:B\to Z(A)$ موجود هستند که برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$، D به‌صورت زیر است:

$$D(a,b)=(D_A(a)+\Psi(b),D_B(b)).$$

چون $H^1(B,B)=H^1_\theta(B,A)=0$، بنابراین $x\in B$ وجود دارد که $D_B=\mathrm{ad}_x$ و $\Psi=0$. اگر قرار دهیم $T=D_A$، آنگاه چون D_A یک اشتقاق روی A است پس T یک اشتقاق روی A است. هم‌چنین، برای هر $a\in A$ و $b\in B$ داریم:

$$\begin{aligned}T(b\cdot a)&=T(\theta(b)a)\\&=D_A(\theta(b)a)\\&=\theta(b)D_A(a)\\&=b\cdot T(a)\end{aligned}$$

Error! Bookmark not defined.

و به‌طور مشابه

$$\begin{aligned}T(a\cdot b)&=T(\theta(b)a)\\&=D_A(\theta(b)a)=\theta(b)D_A(a)\\&=T(a)\cdot b.\end{aligned}$$

بنابراین**Error! Bookmark not defined.** (۱۳،۱) و (۱۴،۱) نتیجه می‌دهند که T یک همریختی B-دومدولی است. یعنی $T\in\mathrm{Hom}_B(A,A)$. آنگاه برای هر $(a,b)\in A\times_\theta B$ داریم:

$$\begin{aligned}D(a,b)-D_T(a,b)&=(0,\mathrm{ad}_x(b))\\&=\mathrm{ad}_{(0,x)}(a,b).\end{aligned}$$

Error! Bookmark not defined.

بنابراین $\overline{D}=\overline{D_T}$ و در نتیجه $\Theta(T)=\overline{D}$. این یعنی Θ پوشاست. هم‌چنین:

$$\begin{aligned}\ker\Theta&=\{T\in Z^1(A,A)\bigcap\mathrm{Hom}_B(A,A):\Theta(T)=\overline{D_T}=0\}\\&=\{T\in Z^1(A,A)\bigcap\mathrm{Hom}_B(A,A):D_T \text{ is inner}\}\\&=\{T\in Z^1(A,A)\bigcap\mathrm{Hom}_B(A,A):D_T=\mathrm{ad}_a, a\in A\}\\&=N^1(A,A).\end{aligned}$$

Error! Bookmark not defined.

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1(A\times_\theta B,A\times_\theta B)&\cong\frac{Z^1(A,A)\bigcap\mathrm{Hom}_B(A,A)}{N^1(A,A)}\\&\cong \mathrm{H}^1(A,A)\bigcap\frac{\mathrm{Hom}_B(A,A)}{N^1(A,A)}.\end{aligned}$$

قضیه‌های ۲-۲ و ۲-۳ نتیجه زیر را به‌دست می‌دهند:

نتیجه ۲-۲: فرض کنید A و B دو جبر باناخ، $\theta\in\sigma(B)\cup\{0\}$ و $H^1(A,A)=H^1(B,B)=H^1_\theta(B,A)=0$. اگر برای هر $d\in Z^1(B,B)$، $R_d\subseteq\ker\theta$، آنگاه $\mathrm{H}^1(A\times_\theta B,A\times_\theta B)=0.$

بنابر نتیجه‌های ۲-۱ و ۲-۲ داریم:

نتیجه ۲-۳: فرض کنید A یک جبر باناخ، $\theta \in \sigma(A)\cup\{0\}$ و $H^1(A,A)=0$. اگر برای هر $d\in Z^1(A,A)$، $R_d \subseteq \ker\theta$، آنگاه

$$\mathrm{H}^1(A\times_\theta A, A\times_\theta A)=0.$$

مثال ۲-۱: فرض کنید G گروه به‌طور موضعی فشرده گسسته (آبلی)، H گروه به‌طور موضعی فشرده دلخواهی باشد و فرض کنید $0=\theta\in\sigma(L^1(H))$. آنگاه $L^1(G)\times_0 L^1(H)=L^1(G)\times L^1(H)$ و بنابر [11] داریم

$$\mathrm{H}^1(L^1(G),L^1(G))=\mathrm{H}^1_0(L^1(H),L^1(G))=0$$

بنابراین بنابر قضیه ۲-۲، داریم

مثال۲-۲: جبر باناخ $A=B=c_0$ را با ضرب نقطه‌به‌نقطه در نظر بگیرید. بنابرقضیه ۲,۸,۶۳ از [10] داریم $\mathrm{H}^1(c_0,c_0)=0$. بنابراین برای هر $\theta\in\sigma(c_0)$ داریم $\mathrm{H}^1_\theta(c_0,c_0)=0$. بنابراین بنابر قضیه ۲-۳ داریم

$$\mathrm{H}^1(c_0\times_\theta c_0, c_0\times_\theta c_0)=0$$

مثال ۲-۳: فرض کنید G گروه به‌طور موضعی فشرده باشد. اگر قرار دهیم $B=L^1(G)$ و $A=M(G)$، آنگاه بنابر [11] داریم

$$\mathrm{H}^1(L^1(G),L^1(G))=\mathrm{H}^1(M(G),M(G))=0$$

و بنابر قضیه ۳,۸ از [9] داریم $\mathrm{H}^1(M(G),L^1(G))=0$. این‌ها با هم و به‌همراه قضیه ۳-۳ نتیجه می‌دهند که برای هر $\theta\in\sigma(L^1(G))$،

$$\mathrm{H}^1(L^1(G)\times_\theta M(G), L^1(G)\times_\theta M(G))=0.$$

مثال ۳-۴: فرض کنید G گروه فشرده آبلی باشد و $1\le p<\infty$. آنگاه $L^p(G)$ یک جبرباناخ جابجایی نیم‌ساده با ضرب پیچشی است که ایده‌آل دوطرفه بسته از $L^1(G)$ نیز است. بنابراین بنابر [12]، داریم $H^1(L^p(G),L^p(G))=0$. چون $\mathrm{H}^1(L^1(G),L^1(G))=0$ (بنابر [13]) و بنابر قضیه ۱,۳ از [14] داریم $\mathrm{H}^1(L^1(G),L^p(G))=0$، پس برای هر $\theta\in\sigma(L^1(G))$، قضیه ۳-۳ نتیجه می‌دهد که

$$\mathrm{H}^1(L^p(G)\times_\theta L^1(G), L^p(G)\times_\theta L^1(G))=0.$$

فهرست منابع

[1] A. T.-M. Lau. Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups. Fundamenta Mathematicae 118: 161-175(1983)

[2] M. Sangani-Monfared. On certain products of Banach algebras with applications to harmonic analysis. Studia Mathematica. 178(3): 277-294(2007)

[3] S. J. Bhatt, P. A. Dabhi. Arens regularity and amenability of Lau product of Banach algebras", Bulletin of the Australiain Mathematical Society. 87: 195–206(2013)

[4] Y. Choi.,Triviality of the generalised Lau product associated to a Banach algebra homomorphism. Bulletin of the Australiain Mathematical Society. 94(2): 286-289(2016)

[5] P. A. Dabhi, S. K. Patel. Spectral properties of the Lau product of Banach algebras. Annals of Functional Analysis. 9(2): 246-257(2018)

[6] P. A. Dabhi, A. Jabbari, K. Haghnejad Azar. Some notes on amenability and weak amenability of Lau product of Banach algebras defined by a Banach algebra morphism. Acta Mathematica Sinica, English Series. 31(9): 1461–1474(2015)

[7] E. Ghaderi, R. Nasr-Isfahani, M. Nemati. Some notions of amenability for certain products of Banach algebras. Colloquium Mathematicum. 130(2):147-157 (2013)

[8] A. R. Khoddami, H. R. Ebrahimi Vishki. Biflatness and biprojectivity of Lau product of Banach algebras. Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 39(3): 559-568(2013)

[9] H. Pourmahmood Agababa. Derivations and generalized semidirect products of Banach algebras. Banach Journal of Mathematical Analysis. 10(3): 1735-8787(2016)

[11] H. G. Dales. Banach algebras and automatic continuity. London Mathematical Society (2000)

[12] V. Losert. The derivation problem for group algebras. Annals of Mathematics. 168(2): 221-246 (2008)

[13] I. M. Singer, J. Wermer. Derivations on commutative normed algebras. Mathematische Annalen. 129: 260-264(1955)

[14] W. G. Bade, P. C. Curtis, H. G. Dales. Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras. Proceedings of the London Mathematical Society. 55(3): 359-377(1987)

[15] M. Eshaghi Gordji, T. Yazdanpanah. Derivations into duals of ideals of Banach algebras. Proceedings of the Indian Academy of Sciences. 114(4): 399-408(2004)