دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و نهم، آذر و دی ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

مترهای (α,β) تعمیم‌یافته به طورهمدیس مرتبط با شرط ۱-فرمی بسته و همدیس

قربان قاسمی[۱]، **ابوالفضل بهزادی**[۲*]

[۱و۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، بابلسر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۱۰/۱۳   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۲/۲۴

چکیده

به خمینه‌ای که مجهز به متر فینسلر باشد خمینه‌ی فینسلری می‌گویند. در مترهای فینسلری باید شرایط هموار بودن، همگنی مثبت و تحدب قوی برقرار باشد. رده‌ای از مترهای فینسلری وجود دارند که انجام محاسبات در آنها آسانتر است، که آنها را مترهای (α,β) می‌نامند. در این مقاله تبدیل همدیس مترهای (α,β) تعمیم‌یافته را بررسی می‌کنیم که در آن β یک ۱-فرمی بسته و همدیس است. این نوع مترها تعمیمی از مترهای (α,β) و همچنین تعمیمی از مترهای فینسلر متقارن کروی هستند. مترهای فینسلری که تانسور خمیدگی داگلاس آن صفر باشد، متر داگلاس نامیده می‌شوند. ابتدا به تعریف مترهای b^2-به طور همدیس مرتبط می‌پردازیم. سپس شرایط لازم و کافی برای اینکه یک متر داگلاس مفروض تحت این تبدیل همدیس پایا بماند، را بدست می‌آوریم. یعنی فرض می‌کنیم F متر فینسلر داگلاس باشد و برای متر b^2-به طور همدیس مرتبط $\overline{F}$ با آن، شرط لازم وکافی را پیدا می‌کنیم که $\overline{F}$ داگلاس باشد.

واژه‌های کلیدی: هندسه فینسلر، مترهای (α,β) تعمیم‌یافته، به طور همدیس مرتبط، خمیدگی داگلاس.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: Behzadi@umz.ac.ir

۱- مقدمه

یافتن کمیت‌های پایا تحت هر تغییری، یکی از مسائل جالب در هندسه است. مطالعه هندسه همدیس قدمتی طولانی دارد. از ابتدا هندسه همدیس نقش مهمی در نظریه‌های فیزیکی برعهده داشت. هندسه همدیس مترهای ریمانی توسط افراد بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است و نتایج سرتاسری و موضعی بسیار مهمی در هندسه همدیس ریمانی وجود دارد که ما را به درک بهتری از خمینه‌های ریمانی می‌رساند. اما به طور کلی ویژگی‌های همدیس یک متر فینسلر به توجه بیشتری نیازمند است.

یک خمینه فینسلری[۱] (M,F) خمینه C^{∞}، M مجهز به متر فینسلر $F:TM\to[0,\infty)$ است که در شرایط زیر صدق کند:

۱- هموار بودن: $F(x,y)$ روی $TM_0:=TM\setminus\{0\}$ از رده‌ی C^{∞} باشد.

۲- همگنی مثبت: برای هر $\lambda>0$،
$$F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$$

۳- تحدب قوی (منظم بودن): تانسور بنیادی $(g_{ij}(x,y))$ در هر $(x,y)\in TM\setminus\{0\}$ مثبت معین باشد که در آن

$$g_{ij}(x,y):=\frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}(x,y).$$

با این تعریف می‌توان مترهای غیرریمانی بسیاری در هندسه فینسلر ساخت. متر راندرز $F=\alpha+\beta$ ساده‌ترین نوع متر فینسلر غیر ریمانی است که در آن $\alpha(x,y):=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ متر ریمانی و $\beta:=b_iy^i$ یک ۱-فرمی است. مترهای (α,β) به عنوان تعمیمی از مترهای راندرز به شکل

$$F=\alpha\phi(s),\qquad s:=\frac{\beta}{\alpha}$$

تعریف شدند که α همان متر ریمانی، β یک ۱-فرمی و ϕ تابع مثبت C^{∞}ای از s است.

یک رده کلی‌تر از این نوع مترها، مترهای (α,β) تعمیم‌یافته[۲] است که در ابتدا توسط یو و ژو در [۱] معرفی شدند. این متر فینسلر به صورت

$$F=\alpha\phi(b^2,s),\qquad s:=\frac{\beta}{\alpha}$$

تعریف می‌شود.

در این مقاله، روی نوعی از مترهای (α,β) تعمیم‌یافته تمرکز می‌کنیم که در آن β یک ۱-فرمی بسته و همدیس باشد، یعنی

$$b_{i|j}=c(x)a_{ij} \qquad (۱)$$

که $c=c(x)\neq 0$ تابعی عددی روی M است و $b_{i|j}$ مشتق همورد β نسبت به α است. توجه کنید که از اندیس‌های 1 و 2 به ترتیب برای نشان دادن مشتق نسبت به b^2 و s استفاده خواهیم کرد.

کمیت‌های غیر ریمانی زیادی در هندسه فینسلر وجود دارند، بدین معنی که این کمیت‌ها در هندسه ریمانی صفر می‌شوند. از جمله آنها تانسور خمیدگی داگلاس[۳] است. یک متر فینسلری روی خمینه M را متر داگلاس می‌گویند هرگاه خمیدگی داگلاس آن متر صفر شود.

تاکنون مطالعات زیادی در این زمینه شده است که به عنوان نمونه در منابع [۶] و [۷] می‌توان بخشی از آن را یافت.

در [۲] صادق‌زاده و همکارانش به بررسی متر فینسلر متقارن کروی

---

[1] Finsler manifold

[2] general (α,β) -metrics

[3] Douglas curvature tensor

$$F(x,y)=|y|\,\phi\left(|x|,\frac{<x,y>}{|y|}\right)$$

پرداختند. در آن مقاله ابتدا مفهوم r-به طور همدیس مرتبط بودن دو متر متقارن کروی Fو $\overline{F}$ را تعریف نمودند که $r:=|x|$، و سپس شرط لازم و کافی برای داگلاس بودن متر $\overline{F}$ را در صورت داگلاس بودن متر F بدست آوردند.
از آنجاییکه متر فینسلر متقارن کروی یک متر خاصی از متر (α,β) تعمیم‌یافته است، در این مقاله سعی شده تا نتایج [۲] تعمیم داده شود. بدین صورت قضیه اصلی و هدف این مقاله به صورت زیر ارائه می‌شود:

۱-۱- قضیه

فرض کنیم $F=\alpha\phi(b^2,s)$ و $\overline{F}=\alpha\overline{\phi}(b^2,s)$، $s:=\beta/\alpha$، دو متر (α,β) تعمیم‌یافته و b^2-به طور همدیس مرتبط روی خمینه‌ی n-بعدی M باشند به طوریکه $c(b^2)$ عامل همدیسی است. فرض کنیم β در (۱) صدق کند. اگر F یک متر داگلاس باشد آنگاه $\overline{F}$ یک متر داگلاس است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱) این تبدیل همدیس، تجانس باشد.

۲) برای $r\neq 0$:

$$\phi(b^2,s)=s\left(h(b^2)-\int\frac{\sqrt[r]{\dfrac{b^2-s^2}{r-p(b^2-s^2)}}}{d(b^2)s^2\sqrt{b^2-s^2}}ds\right)$$

که در آن

$$p=e^{-\int(fb^2+2g)db^2}\left(\int rfe^{\int(fb^2+2g)db^2}db^2\right)$$

و

$$d=\sqrt[r]{c_0e^{\int(fb^2+2g)db^2}}.$$

۳) برای $r=0$:

$$\phi=s\left(h(b^2)-\int\frac{1}{d(b^2)s^2\sqrt{b^2-s^2}}\exp\left(\frac{1}{p(b^2-s^2)}\right)ds\right)$$

که در آن

$$p=-\int(fb^2+2g)db^2,$$
$$d=\exp\left(\int\left(\frac{f}{p}\right)db^2\right).$$

در روابط بالا $h(b^2)$ تابع حقیقی دیفرانسیل‌پذیر، $f(b^2)$ و $g(b^2)$ توابع دیفرانسیل‌پذیر، c_0 ثابت غیرصفر هستند.

۲- تعاریف اولیه

فرض کنیم F یک متر فینسلر روی خمینه M باشد. F را متر (α,β) تعمیم‌یافته می‌نامند هرگاه بتوان آن را به صورت

$$F=\alpha\phi(b^2,s),\ s:=\beta/\alpha \qquad (۲)$$

نوشت که در آن α یک متر ریمانی و $\beta:=b_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی است به طوریکه برای هر $x\in M$ داریم [۱]:

$$b^2:=\|\beta\|_\alpha<b_0.$$

تابع $\phi=\phi(b^2,s)$ یک تابع C^∞ مثبت است و برای $n\geq 3$ در شرایط

$$\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22}>0$$
$$\phi-s\phi_2>0,$$

و برای $n=2$ در شرط

$$\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22} > 0$$

صدق می‌کند که s و b اعداد دلخواه هستند و $0 < b_0 \le +\infty$ وجود دارد که $|s| \le b < b_0$. علاوه بر این

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \rho a_{ij} + \rho_0 b_i b_j \\ &\quad + \rho_1 (b_i \alpha_{y^j} + b_j \alpha_{y^i}) \\ &\quad - s\rho_1 \alpha_{y^i} \alpha_{y^j} \end{aligned} \tag{۳}$$

$$\begin{aligned} g^{ij} = \frac{1}{\rho}\Big\{ & a^{ij} + \eta b^i b^j \\ & + \eta_0 \alpha^{-1} (b^i y^j + b^j y^i) \\ & + \eta_1 \alpha^{-2} y^i y^j \Big\} \end{aligned} \tag{۴}$$

که در روابط بالا

$$\begin{aligned} &\rho := \phi(\phi - s\phi_2), \quad \rho_0 := \phi\phi_{22} + \phi_2\phi_2 \\ &\rho_1 := (\phi - s\phi_2)\phi_2 - s\phi\phi_{22} \end{aligned} \tag{۵}$$

$$\eta := -\frac{\phi_{22}}{\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22}}, \tag{۶}$$

$$\eta_0 := -\frac{(\phi - s\phi_2)\phi_2 - s\phi\phi_{22}}{\phi(\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22})}, \tag{۷}$$

$$\eta_1 := \frac{(s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2)((\phi - s\phi_2)\phi_2 - s\phi\phi_{22})}{\phi^2(\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22})}. \tag{۸}$$

برای یک متر فینسلر $F = F(x,y)$، ژئودزی F در معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \tag{۹}$$

صدق می‌کند که $G^i = G^i(x,y)$ را ضرایب افشانه[1] می‌نامند و به صورت

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il} \left\{ [F^2]_{x^m y^l} y^m - [F^2]_{x^l} \right\}$$

تعریف می‌شود.

تعریف فرض کنیم F و $\overline{F}$ دو متر فینسلر روی خمینه n-بعدی M باشند. اگر زاویه بین دو بردار دلخواه $y, v \in T_x M \setminus \{0\}$، $x \in M$، را با $\theta(y,v)$ برای F و با $\overline{\theta}(y,v)$ برای $\overline{F}$ نشان دهیم، آنگاه F را به $\overline{F}$ همدیس می‌گویند و تبدیل $F \to \overline{F}$ را تبدیل همدیس می‌نامند [۳].

فرض کنیم F و $\overline{F}$ دو متر فینسلر روی خمینه n-بعدی M باشند. آنگاه F به $\overline{F}$ همدیس است اگر و تنها اگر یک تابع عددی $\sigma(x)$ وجود داشته باشد به طوریکه

$$\overline{F}(x,y) = e^{\sigma(x)} F(x,y). \tag{۱۰}$$

تابع عددی $\sigma(x)$ را عامل همدیسی[2] می‌گویند.
به ویژه F و $\overline{F}$ به طور متجانس مرتبط می‌نامند هرگاه عامل همدیس σ عددی ثابت باشد.
فرض کنیم

$$D^i_{jkl} := \frac{\partial^3}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}\left(G^i - \frac{1}{n+1}\frac{\partial G^m}{\partial y^m} y^i \right).$$

به آسانی می‌توان بررسی نمود که

$$D := D^i_{jkl}\, dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k \otimes dx^l$$

تانسوری خوش‌تعریف روی TM_0 است. D را تانسور داگلاس می‌نامند و متر فینسلری که تانسور داگلاس آن صفر شود را متر داگلاس می‌گویند [۵].

۲-۱- تعریف

دو متر (α, β) تعمیم‌یافته $F = \alpha\phi(b^2, s)$ و $\overline{F} = \alpha\overline{\phi}(b^2, s)$ روی خمینه n-بعدی M را b^2- به طور همدیس مرتبط می‌نامند هرگاه یک تابع

[1] Spray coefficient

[2] Conformal factor

دیفرانسیل‌پذیر عددی مانند $\sigma=\sigma(b^2)$ برحسب b^2 وجود داشته باشد به طوریکه $\bar{\phi}(b^2,s)=e^{\sigma(b^2)}\phi(b^2,s)$. به ویژه اگر σ ثابت باشد، آنگاه Fو $\bar{F}$، b^2-به طور همدیس مرتبط هستند.

۳_ b^2-تبدیل همدیس مترهای داگلاس

با یک محاسبه مستقیم نتیجه زیر بدست می‌آید:

۳-۱- لم [۱]

فرض کنیم $F=\alpha\phi(b^2,\beta/\alpha)$ یک متر (α,β) تعمیم‌یافته غیر ریمانی روی خمینه n-بعدی M باشد. همچنین فرض می‌کنیم β در معادله (۱) صدق کند. آنگاه ضرایب افشانه G^i به ضرایب افشانه متر ریمانی $G^i{}_\alpha$ مربوط می‌شود و داریم:

$$G^i:=G^i_\alpha+c\alpha Ey^i+c\alpha^2Hb^i \qquad (۱۱)$$

که در آن

$$E:=\frac{\phi_2+2s\phi_1}{2\phi}-H\frac{s\phi+(b^2-s^2)\phi_2}{\phi} \qquad (۱۲)$$

$$H:=\frac{\phi_{22}-2(\phi_1-s\phi_{12})}{2(\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22})}. \qquad (۱۳)$$

۳-۲- قضیه [۴]

فرض کنیم $F=\alpha\phi(b^2,\beta/\alpha)$ یک متر (α,β) تعمیم‌یافته غیر ریمانی روی خمینه n-بعدی M باشد. همچنین فرض می‌کنیم β در (۱) صدق کند. آنگاه F متر داگلاس است اگر و تنها اگر PDE

$$H_2-sH_{22}=0. \qquad (۱۴)$$

برقرار باشد.

۳-۳- لم

فرض کنیم مترهای (α,β) تعمیم یافته $F=\alpha\phi(b^2,s)$ و $\bar{F}=\alpha\bar{\phi}(b^2,s)$ روی خمینه n-بعدی M، b^2-به طور همدیس مرتبط باشند. آنگاه

$$\bar{H}=H-\sigma'(b^2)A \qquad (۱۵)$$

که در آن

$$A:=\frac{\phi-s\phi_2}{\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22}} \qquad (۱۶)$$

اثبات. برای دو متر (α,β) تعمیم‌یافته $F=\alpha\phi(b^2,s)$ و $\bar{F}=\alpha\bar{\phi}(b^2,s)$ با $\bar{\phi}=e^\sigma\phi$ به آسانی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_1&=e^\sigma(\sigma'\phi+\phi_1)\\
\bar{\phi}_2&=e^\sigma\phi_2\\
\bar{\phi}_{12}&=e^\sigma(\sigma'\phi_2+\phi_{12})\\
\bar{\phi}_{22}&=e^\sigma\phi_{22}.
\end{aligned}$$

با جاگذاری این روابط خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\bar{H}&=\frac{\bar{\phi}_{22}-2(\bar{\phi}_1-s\bar{\phi}_{12})}{2(\bar{\phi}-s\bar{\phi}_2+(b^2-s^2)\bar{\phi}_{22})},\\
&=\frac{\phi_{22}-2(\phi_1-s\phi_{12})}{2[\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22}]}\\
&\quad-\sigma'\frac{\phi-s\phi_2}{\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22}}
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\bar{H}=H-\sigma'A.$$

۳-۴- نتیجه

فرض کنیم Fو $\bar{F}$ دو متر (α,β) تعمیم‌یافته b^2-به طور همدیس مرتبط روی یک خمینه n-بعدی

M باشند. آنگاه Fو $\overline{F}$، b^2-به طور متجانس مرتبط هستند اگر و تنها اگر $\overline{H}=H$.

اثبات. با توجه به لم ۳-۱، داریم: $\overline{H}-H=\sigma' A$. می‌دانیم که $F=\alpha\phi(b^2,s)$ متر فینسلر است اگر و تنها اگر تابع مثبت ϕ برای $n\geq 3$ در شرایط

$$\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22}>0$$
$$\phi-s\phi_2>0,$$

و برای $n=2$ در شرط

$$\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22}>0$$

صدق کند. بنابراین

$$A:=\frac{\phi-s\phi_2}{\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22}}>0\,.$$

از اینرو $\overline{H}-H=0$ اگر و تنها اگر $\sigma'=0$. یعنی σ ثابت است.

۴- اثبات قضیه ۰

فرض کنیم مترهای (α,β) تعمیم‌یافته $F=\alpha\phi(b^2,s)$ و $\overline{F}=\alpha\overline{\phi}(b^2,s)$ روی خمینه n-بعدی M، b^2-به طور همدیس مرتبط باشند. آنگاه با توجه به لم ۰، داریم:

$$\overline{H}=H-\sigma' A$$

پس

$$s\overline{H}_{22}-\overline{H}_2=(sH_{22}-H_2)-\sigma'(sA_{22}-A_2).$$

F از نوع داگلاس است لذا بنابر لم ۰،

$$\overline{H}_2-s\overline{H}_{22}=\sigma'(sA_{22}-A_2).$$

پس $\overline{F}$ متر داگلاس است اگر و تنها اگر $\sigma'=0$ یا $sA_{22}-A_2=0$.

اگر $\sigma'=0$، آنگاه b^2-تبدیل همدیس یک تجانس است.

اگر $\sigma'\neq 0$، آنگاه $sA_{22}-A_2=0$ و داریم:

$$A=p(b^2)\frac{s^2}{2}+q(b^2) \tag{۱۷}$$

که $p(b^2)$ و $q(b^2)$ توابع حقیقی دیفرانسیل‌پذیر دلخواه برحسب b^2 است.

حالت I: $\mathbf{pb^2+2q\neq 0}$.

فرض کنیم $p\neq 0$ و قرار می‌دهیم:

$$\Psi:=\sqrt{b^2-s^2}\,(\phi-s\phi_2)\,.$$

در اینصورت

$$\Psi_1=\frac{1}{2\sqrt{b^2-s^2}}(\phi-s\phi_2)+\sqrt{b^2-s^2}\,(\phi_1-s\phi_{12})$$
$$\Psi_2=\frac{-s}{\sqrt{b^2-s^2}}[\phi-s\phi_2+(b^2-s^2)\phi_{22}]$$

با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۶) داریم:

$$H=\frac{s}{b^2-s^2}\frac{\Psi_1}{\Psi_2}+\frac{1}{2(b^2-s^2)} \tag{۱۸}$$

$$A=-\frac{s\Psi}{(b^2-s^2)\Psi_2} \tag{۱۹}$$

با جاگذاری رابطه (۱۷) در (۱۹) داریم:

$$\frac{\Psi_2}{\Psi}=-\frac{2s}{(b^2-s^2)(ps^2+2q)} \tag{۲۰}$$

برای محاسبات از نرم افزار میپل[1] استفاده می‌کنیم. با حل معادله دیفرانسیل (۲۰)

$$d(b^2)\Psi=\exp\left(\frac{1}{pb^2+2q}\ln\frac{b^2-s^2}{ps^2+2q}\right) \tag{۲۱}$$

[1] Maple

که $d(b^2)$ تابع مثبت دیفرانسیل‌پذیری از b^2 است. لذا

$$\phi - s\phi_2 = \frac{\exp\left(\frac{1}{pb^2+2q}\ln\frac{b^2-s^2}{ps^2+2q}\right)}{d(b^2)\sqrt{b^2-s^2}}$$

در نتیجه

$$\left(\frac{\phi}{s}\right)_s = -\frac{\exp\left(\frac{1}{pb^2+2q}\ln\frac{b^2-s^2}{ps^2+2q}\right)}{d(b^2)s^2\sqrt{b^2-s^2}}$$

از اینرو

$$\phi(b^2,s) = s\left(h(b^2) - \int\frac{\exp\left(\frac{1}{pb^2+2q}\ln\frac{b^2-s^2}{ps^2+2q}\right)}{d(b^2)s^2\sqrt{b^2-s^2}}ds\right) \qquad (۲۲)$$

توجه کنید که $b^2 - s^2 > 0$ و $s \neq 0$.

اکنون قرار می‌دهیم: $B(b^2) := \frac{1}{pb^2+2q}$،

پس

$$d(b^2)\Psi = \exp\left(B(b^2)\ln\frac{b^2-s^2}{ps^2+2q}\right) \qquad (۲۳)$$

با مشتقگیری از رابطه (۲۳) نسبت به b^2 خواهیم داشت:

$$\frac{\Psi_1}{\Psi} = B'\ln\frac{b^2-s^2}{ps^2+2q} + B\left(\frac{1}{b^2-s^2} - \frac{p's^2+2q'}{ps^2+2q}\right) - \frac{d'}{d} \qquad (۲۴)$$

با جاگذاری روابط (۲۰) و (۲۴) در (۱۸) نتیجه می‌گیریم:

$$H = -\frac{B'}{2}(ps^2+2q)\ln\frac{b^2-s^2}{ps^2+2q} + \frac{(ps^2+2q)}{2}\left(\frac{d'}{d} - \frac{B}{b^2-s^2}\right) + \frac{B}{2}(p's^2+2q') + \frac{1}{2\left(b^2-s^2\right)} \qquad (۲۵)$$

با یک محاسبات مستقیم داریم:

$$H_2 - sH_{22} = -\frac{2(pb^2+2q)^2B's^3}{(b^2-s^2)^2(ps^2+2q)}$$

می‌دانیم H در $H_2 - sH_{22} = 0$ صدق می‌کند، پس $B' = 0$. بنابراین یک ثابت غیرصفر r وجود دارد به طوریکه

$$pb^2 + 2q = r$$

با استفاده از روابط (۲۱)، (۲۵) و (۲۲) داریم:

$$\Psi = \frac{1}{d(b^2)}\exp\left(\frac{1}{r}\ln\frac{b^2-s^2}{ps^2+2q}\right) = \frac{1}{d(b^2)}\sqrt[r]{\frac{b^2-s^2}{ps^2+2q}} \qquad (۲۶)$$

$$H = \frac{(ps^2+2q)}{2}\left(\frac{d'}{d} - \frac{1}{r(b^2-s^2)}\right) + \frac{p's^2+2q'}{2r} + \frac{1}{2(b^2-s^2)} \qquad (۲۷)$$

و در نتیجه

$$\phi(b^2,s) = s\left(h(b^2) - \int\frac{\exp\left(\frac{1}{b^2p+2q}\ln\frac{b^2-s^2}{ps^2+2q}\right)}{d(b^2)s^2\sqrt{b^2-s^2}}ds\right) = s\left(h(b^2) - \int\frac{\sqrt[r]{\frac{b^2-s^2}{r-p(b^2-s^2)}}}{d(b^2)s^2\sqrt{b^2-s^2}}ds\right) \qquad (۲۸)$$

از طرفی می‌دانیم F داگلاس است، لذا توابع هموار $f(b^2)$ و $g(b^2)$ وجود دارند به طوریکه

$$H=\frac{f(b^2)}{2}s^2+g(b^2) \tag{۲۹}$$

که با توجه به (۲۵)

$$H=s^2\left(p\frac{d'}{d}+\frac{p'}{r}\right)+2q\frac{d'}{d}-\frac{p'}{r}b^2. \tag{۳۰}$$

در نتیجه

$$f=p\frac{d'}{d}+\frac{p'}{r} \tag{۳۱}$$

$$g=q\frac{d'}{d}-\frac{p'}{2r}b^2 \tag{۳۲}$$

پس

$$fb^2+2g=r\frac{d'}{d} \tag{۳۳}$$

با حل این معادله دیفرانسیل معمولی داریم:

$$d=\sqrt[r]{c_0e^{\int(fb^2+2g)db^2}} \tag{۳۴}$$

که c_0 یک ثابت غیرصفر است. سپس با استفاده از (۳۱) و (۳۲) معادله دیفرانسیل معمولی

$$p'+p(fb^2+2g)-rf=0$$

بدست می‌آید که با حل آن خواهیم داشت:

$$p=e^{-\int(fb^2+2g)db^2}\left(\int rfe^{\int(fb^2+2g)db^2}db^2\right) \tag{۳۵}$$

با جاگذاری روابط (۳۴) و (۳۵) در (۲۸) حکم ثابت می‌شود. اکنون فرض کنیم $p=0$. لذا $A=q(b^2)$. رابطه (۲۰) به

$$\frac{\Psi_2}{\Psi}=-\frac{s}{q(b^2-s^2)}$$

تقلیل می‌یابد. البته $\Psi_2<0$ و $\Psi>0$ و $n\geq 0$، پس $q>0$. با حل این معادله دیفرانسیل داریم:

$$\Psi=\frac{1}{d(b^2)}\exp\left(\frac{1}{2q}\ln(b^2-s^2)\right)$$

و بنابراین

$$\phi=s\left(h(b^2)-\int\frac{\exp(B\ln(b^2-s^2))}{d(b^2)s^2\sqrt{b^2-s^2}}ds\right) \tag{۳۶}$$

که در آن $B(b^2):=\frac{1}{2q}$. در نتیجه

$$\frac{\Psi_1}{\Psi}=B'\ln(b^2-s^2)+\frac{B}{b^2-s^2}-\frac{d'}{d} \tag{۳۷}$$

از اینرو

$$H=-B'q\ln(b^2-s^2)+q\frac{d'}{d} \tag{۳۸}$$

اما F داگلاس است و با توجه به (۱۴) داریم:

$$H_2-sH_{22}=-4qB'\frac{s^3}{(b^2-s^2)^2}=0$$

می‌دانیم $A\neq 0$ لذا $q\neq 0$. بنابراین $B'=0$. از اینرو

$$B:=\frac{1}{2q}\Rightarrow B'=\frac{-q'}{2q^2}=0\Rightarrow q'=0$$

در اینصورت عدد حقیقی ثابت مثبت λ_0 چنان وجود دارد که $q=\lambda_0$. آنگاه $B=\frac{1}{2\lambda_0}$. در نتیجه

$$\Psi=\frac{1}{d(b^2)}\exp\left(\frac{1}{2\lambda_0}\ln(b^2-s^2)\right) \tag{۳۹}$$

$$\phi=s\left(h(b^2)-\int\frac{\sqrt[2\lambda_0]{b^2-s^2}}{d(b^2)s^2\sqrt{b^2-s^2}}ds\right) \tag{۴۰}$$

$$H=\lambda_0\frac{d'}{d} \tag{۴۱}$$

طبق روابط (۲۹) و (۴۱) و مقایسه آنها، $f=0$ و $g=\lambda_0\frac{d'}{d}$ بدست می‌آیند. آنگاه با حل معادله اخیر

$$d=\frac{1}{\gamma_0}\sqrt[2\lambda_0]{e^{\int 2gdb^2}} \qquad (۴۲)$$

را بدست می‌آوریم که γ_0 ثابتی مثبت است.

بنابراین

$$\phi=s\left(h(b^2)-\int\frac{\gamma_0}{s^2\sqrt{b^2-s^2}}\sqrt[2\lambda_0]{\frac{b^2-s^2}{e^{\int 2gdb^2}}}ds\right) \qquad (۴۳)$$

که حالت خاصی از (۲۸) است.

حالت II: $\mathbf{pb^2+2q=0}$

در این حالت

$$q=-\frac{pb^2}{2}\Rightarrow A=p\frac{s^2}{2}-p\frac{b^2}{2}=-\frac{p}{2}(b^2-s^2)$$

لذا

$$\frac{\Psi_2}{\Psi}=\frac{2s}{p(b^2-s^2)^2} \qquad (۴۴)$$

$$d(b^2)\Psi=\exp\left(\frac{1}{p(b^2-s^2)}\right) \qquad (۴۵)$$

در اینصورت

$$\phi=s\left(h(b^2)-\int\frac{1}{d(b^2)s^2\sqrt{b^2-s^2}}\exp\left(\frac{1}{p(b^2-s^2)}\right)ds\right) \qquad (۴۶)$$

ملاحظه کنید که برای $n\geq 3$، $\frac{\Psi_2}{\Psi}<0$، پس $p<0$. به طور مشابه

$$\frac{\Psi_1}{\Psi}=-\frac{p'}{p(b^2-s^2)}-\frac{1}{p(b^2-s^2)^2}-\frac{d'}{d} \qquad (۴۷)$$

در نتیجه

$$H=\frac{s^2}{2}\underbrace{\left(p\frac{d'}{d}\right)}_{f}-\frac{1}{2}\underbrace{\left(p'+pb^2\frac{d'}{d}\right)}_{g}$$

که

$$\begin{cases} f=p\dfrac{d'}{d}\\ g=-\dfrac{1}{2}\left(p'+pb^2\dfrac{d'}{d}\right)\end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات فوق داریم:

$$p=-\int(fb^2+2g)db^2$$

و

$$d=\exp\left(\int\left(\frac{f}{p}\right)db^2\right).$$

در این صورت قضیه ۰ به اثبات می‌رسد.

۵- مثال

در قضیه ۰، فرض می‌کنیم $f(b^2)=g(b^2)=0$. از اینرو

$$p=p_0=2,\ \ r=2,$$

$$d=1/\sqrt{2},\ h(b^2)=\frac{1}{1-b^2}$$

را انتخاب می‌کنیم. در اینصورت می‌توان

$$\phi(b^2,s)=\frac{s+\sqrt{1-b^2+s^2}}{1-b^2}$$

را بدست آورد که متر حاصل را متر فانک[1] می‌نامند. اگر $h(b^2)=0$ باشد، در اینصورت

$$\phi(b^2,s)=\frac{\sqrt{1-b^2+s^2}}{1-b^2}$$

بدست می‌آید که متر حاصل را متر کلاین[2] می‌گویند.

[1] Funck metric
[2] Klein metric

فهرست منابع

[1] C. Yu, H. Zhu, On a new class of Finsler metrics, Differ. Geom. Appl. **29** (2011), 244-254.

[2] M. Maleki, N. Sadeghzadeh, T. Rajabi, On conformally related spherically symmetric Finsler metric, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, **13** (2016), 1650118 (16 pages).

[3] P. L. Antonelli, R. S. Ingarden, M. Matsumoto, The theory of sprays and Finsler spaces with application in physics and biology, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1993).

[4] H. Zhu, On general (α,β)-metrics with vanishing Douglas curvature, International journal of Mathematics, **26** (9) (2015), 1550076 (16 pages).

[5] S. Bacso, X. Cheng, Finsler conformal transformation and the curvature invariances, Publ. Math. Debrecen, **70** (12) (2007), 221-231.

[6] S. Zhou, B. Li, On Landsberg general (α,β)-metrics with a conformal 1-form, Differential Geometry and its Applications, **59** (2017), 46-65.

[7] X. Wang, and B. Li, On Douglas General (α,β)-metrics. Acta Mathematica Sinica, **33**(7) (2017), 951-968.