دسترسی در سایت http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و چهارم، خرداد و تیر ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

حل عددی مدل ریاضی انتشار بیماری‌های عفونی بر پایه چندجمله‌ای‌های برنشتاین انتقال‌یافته

فرشید میرزائی[۱*]، سیده فاطمه حسینی[۲]، سحر علی پور[۳]

(۱) استاد، گروه ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران
(۲و۳) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۴/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۲۷

چکیده

معادلات انتگرال ولترا تأخیری کاربرد زیادی در شاخه‌های مختلف علوم از جمله زیست‌شناسی، بوم‌شناسی، فیزیک و مدل‌سازی مسائل مهندسی و علوم طبیعی دارند. در بسیاری از موارد حل تحلیلی این معادلات بسیار دشوار است، بنابراین روش‌های عددی به عنوان یک روش تقریبی سودمند برای حل معادلات انتگرال ولترا تأخیری مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. در این مقاله حل عددی معادله انتگرال ولترا- همرشتاین تاخیری با استفاده از روش تقریب کمترین مربعات و بر پایه‌ی چندجمله‌ای‌های درجه برنشتاین انتقال یافته مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. این معادله یک مدل ریاضی برای انتشار بیماری‌های عفونی معینی می‌باشد که بطور فصلی و با سرعت ثابت تغییر می‌کند. روش کمترین مربعات مدلی برای برازش داده‌ها است که در آن مجموع اختلاف بین داده مشاهده شده و مقداری که از مدل بدست می‌آید کمینه می‌شود. در این مقاله چندجمله‌ای‌های برنشتاین انتقال یافته معرفی شده و سپس تقریب تابعی دلخواه با استفاده از این چندجمله‌ای‌ها ارائه می‌گردد. همچنین معادله انتگرال ولترا–همرشتاین تأخیری معرفی می‌شود و جزئیات روش کمترین مربعات و روش حل مدل ریاضی با روش پیشنهادی بیان می‌گردد. در پایان دقت و کارایی روش پیشنهادی را با حل دو مثال عددی و مقایسه نتایج آنها با دیگر روش‌های موجود نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: معادله انتگرال ولترا- همرشتاین تاخیری، روش تقریب کمترین مربعات، چندجمله‌ای‌های برنشتاین، مدل ریاضی انتشار بیماری.

---

*. عهده‌دار مکاتبات: E-mail: f.mirzaee@malayeru.ac.ir, fa_mirzaee@yahoo.com

۱- مقدمه

معادلات انتگرال نقشی اساسی در علوم ریاضی و مهندسی دارند. در این میان معادلات انتگرال- دیفرانسیل ولترا تأخیری رشد گسترده‌ای در زمینه‌های علمی مانند زیست‌شناسی، بوم شناسی، پزشکی و فیزیک داشته‌اند. این دسته از معادلات نقش مهمی در مدل‌سازی مسائل مهندسی و علوم طبیعی دارند. چون حل تحلیلی بسیاری از این معادلات دشوار است و یا نمی‌توان آنها را به‌صورت تحلیلی حل کرد، ضروری است برای حل این معادلات از روش‌های عددی استفاده نمود. روش‌های عددی گوناگونی برای حل معادلات انتگرال ولترا خطی و دستگاه معادلات انتگرال ولترا غیرخطی وجود دارند [۳، ۲ ،۱]. کوسن در مرجع [۴] از روش هم‌محلی برای حل معادلات انتگرال ولترا- فردهلم استفاده کرد. برزآبادی و فرد در مرجع [۵] یک جواب عددی برای معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی نوع دوم بدست آوردند. یکی از روش‌های عددی حل معادلات، روش تقریب کمترین مربعات بهبود یافته است که توسط لیو و همکارانش مطرح شد [۶]. ونگ و همکارانش از روش تقریب کمترین مربعات برای حل معادلات انتگرال ولترا–فردهلم استفاده کرده‌اند [۷].

می‌دانیم که در مبحث درونیابی هدف پیدا کردن چندجمله‌ای مانند $P(x)$ است که در نقاط درونیابی مقدار چندجمله‌ای $P(x)$ برابر با مقدار اصلی $f(x)$ باشد. اما می‌دانیم که نقاط درونیابی بدست آمده، نقاطی دارای خطا هستند و پیدا کردن یک چندجمله‌ای که از این نقاط عبور می‌کند چندان مناسب نیست. در این حالت ترجیح می‌دهیم بجای استفاده از درونیابی، یک منحنی پیدا کنیم که از این نقاط بگذرد (برازش منحنی)، ولی این منحنی یکتا نیست. تشخیص این که کدام یک از منحنی‌ها مناسب‌تر است نیازمند تعریف یک معیار برای خوب بودن است. روش کمترین مربعات روشی برای برازش داده‌ها است. در این روش بهترین مدل برازش داده‌ها، مدلی است که در آن مجموع باقی‌مانده‌ها کمینه می‌شود. منظور از باقی‌مانده، اختلاف بین داده مشاهده شده و مقداری است که از مدل بدست می‌آید.

در این مقاله به حل عددی معادلات انتگرال ولترا- همرشتاین تأخیری با استفاده از روش تقریب کمترین مربعات و بر پایه چندجمله‌ای‌های برنشتاین انتقال یافته می‌پردازیم. این نوع معادلات یک مدل ریاضی برای انتشار بیماری‌های عفونی هستند که به‌طور فصلی و با سرعت ثابت تغییر می‌کنند. در بخش دوم به معرفی چندجمله‌ای‌های پایه‌ای برنشتاین انتقال یافته و برخی از ویژگی‌های این چندجمله‌ای‌ها پرداخته شده است و در بخش سوم چگونگی تقریب تابعی دلخواه با استفاده از آنها آورده شده است. در بخش چهارم معادلات انتگرال ولترا- همرشتاین تأخیری را معرفی کرده‌ایم. در بخش پنج، مقدمه‌ای کوتاه از روش کمترین مربعات بیان شده است و حل عددی معادلات انتگرال ولترا- همرشتاین تأخیری با استفاده از روش کمترین مربعات متحرک و چند جمله‌ای‌های برنشتاین انتقال یافته مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین قضیه‌ای برای آنالیز همگرایی روش بیان شده است. در بخش شش، با حل دو مثال عددی به تشریح روش و مقایسه نتایج بدست آمده از روش با روش‌های دیگر، پرداخته شده است و در پایان جمع‌بندی و نتیجه گیری مباحث آمده است.

۲- چندجمله‌ای‌های برنشتاین انتقال یافته

چندجمله‌ای های پایه‌ای برنشتاین درجه n بصورت زیر تعریف می‌شوند [۸] :

$$B_{i,n}(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}, 0\le i\le n, \quad x\in[0,1],$$

با بسط دوجمله‌ای $(1-x)^{n-i}$، چندجمله‌ای پایه برنشتاین بصورت ترکیب خطی توابع پایه بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} B_{i,n}(x) &= \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i}x^i\left(\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n-i}{k}\right)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}x^{i+k}. \end{aligned}$$

تذکر۱. با تبدیل زیر می‌توان چندجمله‌ای‌های برنشتاین

تعریف شده در بازه $[0,1]$ را به بازه $[-\tau,T]$ انتقال داد:
$t=(T+\tau)x-\tau.$

با جایگذاری رابطه $x=\frac{1}{(T+\tau)}(t+\tau)$ در تعریف چندجمله‌ای‌های برنشتاین رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$B_{i,n}(t)=\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i},0\le i\le n,\quad t\in[-\tau,T],$$

و برای $i=0,1,\ldots,n$ می‌توان رابطه زیر را تعریف کرد:

$$\Phi_n(t)=\left\{B_{0,n}(t),B_{1,n}(t),\ldots,B_{n,n}(t)\right\}.$$

که این مجموعه تشکیل یک پایه‌ی کامل برای فضای $L^2(I)$ برای $I=[-\tau,T]$ می‌دهد.

۳- تقریب تابع

قرار دهید $H=L^2(I)$، فضای توابع مربع انتگرال پذیر نسبت به اندازه لبگ در بازه بسته I باشد و g عضوی دلخواه از H باشد، تابع $\mathrm{g(t)}$ را می‌توان با استفاده از چند جمله‌ای‌های برنشتاین به صورت زیر تقریب زد:

$$g_n(\mathrm{t})=\sum_{i=0}^{n}g_iB_{\mathrm{i},n}(\mathrm{t})=\Phi_n(\mathrm{t})\mathrm{G}^T,$$

که در آن $\Phi_n(t)$ بردار برنشتاین و G بردار ضرایب برنشتاین است که به صورت $G=[\mathrm{g}_0,\mathrm{g}_1,\ldots,\mathrm{g}_n]$ تعریف می‌شود.

۴- معادلات انتگرال ولترا- همرشتاین تاخیری

معادله انتگرال ولترا خطی با ثابت تأخیری τ را بصورت

$$y(t)=f(t)+\lambda\int_{t-\tau}^{t}k(t,s)y(s)ds,0\le t\le T,\quad(۱)$$

با شرط اولیه زیر در نظر بگیرید

$$y(t)=\xi(t),\quad -\tau\le t\le 0,\quad(۲)$$

که در آن $T>0,\tau>0$ و $\xi(t)$ تابع مجهول و تابع وزن $k:[0,T]\times[-\tau,T]\to$ ، و تابع $f(t)$ معلوم هستند. فرض کنید عدد طبیعی p وجود داشته باشد به‌طوری که $T=p.\tau$ است. روی هر بازه $[i\tau,(i+1)\tau]$ برای $i=0,1,\ldots,p-1$ یک افراز منظم در نظر می‌گیریم. این معادله یک مدل ریاضی برای انتشار بیماری‌های عفونی معینی است که به طور فصلی و با سرعت ثابت تغییر می‌کنند. در این‌جا $y(t)$ نسبت عفونت به جمعیت در زمان t است، $\tau>0$ طول زمانی است که عفونت در فرد باقی می‌ماند و $k(t,s).y(s)$ نسبت عفونت جدید در واحد زمان است.

معادله انتگرال (۱) دارای یک ثابت تأخیری است و نوع آن تعمیم یک مدل بیماری مسری است به‌طوری که $k(\mathrm{t,s})=P(\mathrm{t-s})$ [۹].

فرض می‌کنیم که جواب معادله (۱) با شرط اولیه (۲) موجود و منحصر به فرد است. اکنون به مطالعه روش تقریب کمترین مربعات برای تقریب جواب معادله (۱) با شرط اولیه (۲) می‌پردازیم.

۵- توصیف و کاربرد روش

معادله انتگرال ولترا خطی (۱) دارای ثابت تأخیری τ و تغییر آن توسیع یک مدل بیماری مسری است. عملگر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$L_1(t,y(t))=$$
$$y(t)-f(t)-\int_{t-\tau}^{t}k(t,s)y(s)ds,\quad(۳)$$
$$L_2(t,y(t))=y(t)-\xi(t).\quad(۴)$$

فرض کنید $y_n(t)\in\Phi_n(\mathrm{t})$ تقریبی برای تابع مجهول $y(\mathrm{t})$ با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین انتقال یافته باشد. با استفاده از آنچه در بخش ۳ بیان شد ضرایب حقیقی $c_0,c_1,\ldots,c_n$ وجود دارند به طوری که

$$y_n(t)=\sum_{i=0}^{n}c_iB_{i,n}(t).\quad(۵)$$

با جایگذاری رابطه (۵) در معادله (۱) و شرط اولیه (۲)، عبارت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} L_1(t,y_n(t)) &= y_n(t)-f(t) \\ &-\lambda\int_{t-\tau}^{t} k(t,s)y_n(s)ds \\ &=\sum_{i=0}^{n} c_i\left[B_{i,n}(\mathrm{t})-\lambda\int_{t-\tau}^{t} k(\mathrm{t,s})B_{i,n}(s)ds\right]-f(t) \\ &=\sum_{i=0}^{n} c_i\alpha_i(t)-f(t), \quad 0\le t\le T, \end{aligned} \tag{۶}$$

$$\begin{aligned} L_2(t,y_n(t)) &= y_n(t)-\xi(t) \\ &=\sum_{i=1}^{n} c_iB_{i,n}(t)-\xi(t), \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن $\alpha_i(\mathrm{t})$ برای هر $i=0,1,\ldots,n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha_i(t)=B_{i,n}(\mathrm{t})-\lambda\int_{t-\tau}^{t} k(\mathrm{t,s})B_{i,n}(s)ds.$$

برای هر $t\in[-\tau,T]$، مانده مرتبه n از معادله (۱) با شرط اولیه (۲) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} R_n(t) &= |L_1(t,y_n(t))-L_1(t,y(t))| \\ &+|L_2(t,y_n(t))-L_2(t,y(t))|, \end{aligned}$$

که معادل است با

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \left|(y_n(t)-y(t))-\lambda\int_{t-\tau}^{t} k(t,s).(y_n(s)-y(s))\right| \\ &+|(y_n(t)-y(t))|. \end{aligned}$$

ملاحظه ۱.

برای هر $t\in[-\tau,T]$ اگر $R_n(t)\equiv 0$، آنگاه $y(t)=y_n(\mathrm{t})$ و $y(t)$ جواب دقیق معادله انتگرال ولترا (۱) با شرط اولیه (۲) است و اگر $\lim_{n\to\infty}R_n(t)=0$ آنگاه $y_n(t)$ به جواب دقیق معادله انتگرال ولترا (۱) با شرط اولیه (۲) همگرا است. به عبارتی $\lim_{n\to\infty}y_n(t)=y(t)$ [۱۰].

در ادامه رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} J(C) &= J(c_0,c_1,\ldots,c_n)= \\ &\frac{1}{2}\int_{-\tau}^{0} L_2^{\,2}(t,y_n(t))dt \\ &+\frac{1}{2}\int_{0}^{T} L_1^{\,2}(t,y_n(t))dt. \end{aligned} \tag{۸}$$

این رابطه یک مسئله بهینه سازی از توابع درجه دوم بدون قیدی است که می‌تواند با الگوریتم گرادیان حل شود. برای یافتن نقطه ایستا $J(C)$، قرار می‌دهیم

$$\nabla J(C)=0=(0,0,\ldots,0)^T,$$

از رابطه (۸) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial c_i} &= \int_{-\tau}^{0} L_2(t,y_n(t))\frac{\partial L_2(t,y_n(t))}{\partial c_i}dt \\ &+\int_{0}^{T} L_1(t,y_n(t))\frac{\partial L_1(t,y_n(t))}{\partial c_i}dt \\ &=\int_{-\tau}^{0}\left[\sum_{j=0}^{n} c_jB_{j,n}(t)-\xi(t)\right]B_{i,n}(t)dt \\ &+\int_{0}^{T}\left[\sum_{j=0}^{n} c_j\alpha_j(t)-f(t)\right]\alpha_i(t)dt. \end{aligned}$$

پس برای هر $i=0,1,\ldots,n$ داریم:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n} c_j\int_{-\tau}^{0} B_{j,n}(t)B_{i,n}(t)dt \\ &+\sum_{j=0}^{n} c_j\int_{0}^{T}\alpha_j(t)\alpha_i(t)dt \\ &=\int_{-\tau}^{0}\xi(t)B_{i,n}(t)dt+\int_{0}^{T} f(t)\alpha_i(t)dt. \end{aligned} \tag{۹}$$

دستگاه معادلات (۹) یک دستگاه معادلات جبری خطی با بعد $(n+1)\times(n+1)$ با ضرایب مجهول c_i برای $i=0,1,\ldots,n$ است که فرم ماتریسی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$P.C=Z, \tag{۱۰}$$

در عبارت فوق داریم:

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \ldots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \ldots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

$$C=\left[c_0,c_1,\ldots,c_n\right]^T,$$

و

$$Z=\left[z_0,z_1,\ldots,z_n\right]^T,$$

که در آن

$$p_{ji}=\int_{-\tau}^{0}B_{j,n}(t)B_{i,n}(t)dt+\int_0^T\alpha_j(t)\alpha_i(t)dt,$$

و

$$z_i=\int_{-\tau}^{0}\xi(t)B_{i,n}(t)dt+\int_0^T f(t)\alpha_i(t)dt.$$

از معادله (۱۰) ضرایب مجهول به صورت زیر بدست می‌آید:

$$C=P^{-1}.Z$$

و در نهایت رابطه $y_n(t)=C^T.\Phi_n(t)$ تقریبی برای $y(t)$ با روش کمترین مربعات و بر پایه چندجمله‌ای‌های برنشتاین است.

برای محاسبه انتگرال ولترا (۶) افراز یکنواختی از بازه $\left[-\tau,T\right]$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Delta=\left\{-\tau=t_0<t_1<\ldots<t_n=0<t_{n+1}<\ldots<t_q=T\right\},$$

که در آن $t_i=t_{i-1}+\frac{\tau}{n}=-\tau+\frac{i\,\tau}{n}$ برای هر $i=1,2,\ldots,q$ است.

مقادیر $y_i=y(t_i)$ را برای هر $i=1,\ldots,q$ در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$\sum_{k=0}^{n}c_k\,B_{k,n}(t_i)=\xi(t_i),$
$i=0,1,\ldots,n,$
$\sum_{k=0}^{n}c_k\,B_{k,n}(t_i)=$
$f(t_i)+\lambda\frac{\tau}{2n}\sum_{j=0}^{n-1}[\,k(t_i,t_{i+j-n})$
$\sum_{k=0}^{n}c_kB_{k,n}(t_{i+j-n})+k(t_i,t_{i+j-n+1})+$
$\sum_{k=0}^{n}c_kB_{k,n}(t_{i+j-n+1})]$
$i=n+1,\ldots,q$

تعریف ۱. اگر دستگاه معادلات جبری خطی (۱۰) دارای جواب منحصر بفرد C باشد، آنگاه $y_n(t)=C^T.\Phi_n(t)$ جواب روش تقریب کمترین مربعات بهینه از معادله انتگرال ولترا خطی (۱) با شرط اولیه (۲) نامیده می‌شود که روی مجموعه زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi_n(t)=span\left\{B_{0,n}(t),B_{1,n}(t),\ldots,B_{n,n}(t)\right\},$$
$$-\tau\le t\le T.$$

ملاحظه۲. اگر

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_{-\tau}^{0}L_2^{\,2}(t,y_n(t))dt+\frac{1}{2}\int_0^T L_1^{\,2}(t,y_n(t))dt=0$$

آنگاه جواب روش تقریب کمترین مربعات بهینه $y_n(t)$ به جواب دقیق $y(t)$ از معادله انتگرال ولترا (۱) با شرط اولیه (۲) همگرا است [۱۰].

بر پایه این فرایند، انتظار می‌رود وقتی $n\to\infty$، جواب تقریبی روش تقریب کمترین مربعات بهینه $y_n(t)$ به جواب دقیق $y(t)$ از معادله (۱) با شرط اولیه (۲) همگرا باشد. همگرایی روش تقریب کمترین مربعات در قضیه زیر بیان می‌گردد.

قضیه ۱. فرض کنید $y(t)$ جواب دقیق روی بازه $\left[-\tau,T\right]$ و $y_n(t)$ جواب روش تقریب کمترین مربعات بهینه از معادله (۱) با شرط اولیه (۲) باشد. اگر برای $c_i\in$، چندجمله‌ای $P_n(t)=\sum_{i=0}^{n}c_iB_{i,n}(t)$ وجود داشته باشد به طوریکه به ازای هر $t\in\left[-\tau,T\right]$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}P_n(t)=y(t)$ آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_{-\tau}^{0}L_2^{\,2}(t,y_n(t))dt+\frac{1}{2}\int_0^T L_1^{\,2}(t,y_n(t))dt=0.$$

اثبات: مشابه قضیه ۱ در [۷].

۶- نتایج عددی

در این بخش دو مثال عددی برای توضیح روش پیشنهادی ارائه می‌دهیم. در این مثال‌ها خطا از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta_n \approx \left[\int_{-\tau}^{T} e_n^{\,2}(t)\,dt \right]^{\frac{1}{2}},$$

که در آن $e_n(t) = y(t) - y_n(t)$.

کارایی روش پیشنهادی را با مقایسه نتایج عددی بدست آمده در مراجع [۱۳، ۱۲، ۱۱] نشان می‌دهیم. تمامی محاسبات از طریق برنامه نوشته شده در محیط متلب انجام شده است.

مثال ۱-۶. مساله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید [۱۰]:

$$y(t) = \begin{cases} e^{t-\tau} + \int_{t-\tau}^{t} y(s)ds & 0 \le t \le T, \\ \xi(t) & -\tau \le t \le 0, \end{cases}$$

که در آن $T = 0.5, \tau = 0.5$ و تابع $\xi(t)$ برای $t \in [-\tau, 0]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\xi : [-0.5, 0] \to$ ،

$\xi(t) = e^t$.

همچنین جواب دقیق برای $t \in [-0.5, 0.5]$ به صورت زیر است:

$y(t) : [-0.5, 0.5] \to$ ،

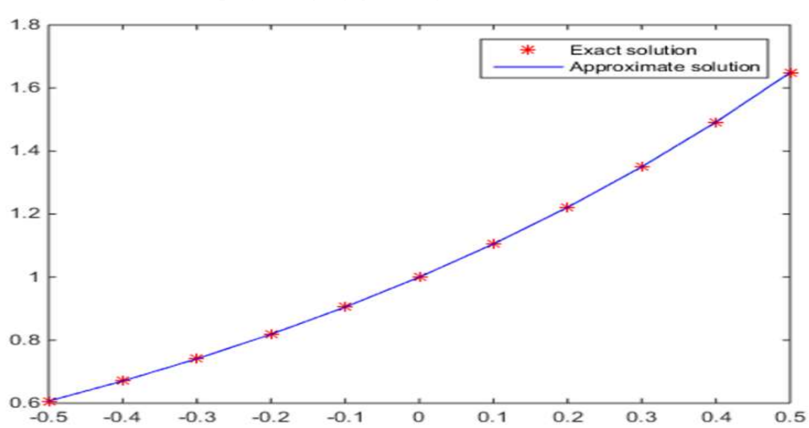
$y(t) = e^t$.

با بکارگیری روش پیشنهادی برای $n = 8,9$، جواب تقریبی با خطای صفر را بدست می‌آوریم. مقایسه جواب تقریبی و جواب دقیق معادله انتگرال ولترا خطی تاخیری برای این مثال در شکل (۱) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌کنید جواب تقریبی بدست آمده با روش پیشنهادی دارای دقت بالایی در سرتاسر بازه است. در جدول (۱) خطای بدست آمده از روش پیشنهادی، روش تقریب کمترین مربعات بر پایه استاندارد[۱۰]، روش مشتقات سوم [۱۲]، روش تکرار تغییرات [۱۱] و روش چندجمله‌ای‌های تیلور [۱۳] با هم مقایسه شده‌اند.

جدول ۱: مقایسه خطای روش‌ها برای مثال ۱-۶

روش مرجع [۱۳]	روش مرجع [۱۲]	روش مرجع [۱۱]	روش مرجع [۱۰]	روش پیشنهادی	n
3.54e-6	5.31e-6	4.11e-8	2.01e-9	0	8
3.01e-6	6.21e-7	3.30e-8	4.71e-10	0	9

شکل ۱: مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی



مثال۲-۶. طبق مدل بیماری مسری در مرجع [۹]، فرض کنید $y(t)$ نسبت عفونت افراد در لحظه t و $g(y(t))$ نسبت افراد آلوده شده در واحد زمان باشد. همچنین فرض کنید $f(t)$ نسبت مهاجرانی باشند که هنوز در زمان t بیمار هستند. $P(s)$ را به عنوان احتمال داشتن عفونت بعد از سپری شدن حداقل زمان S بعد از ابتلا به عفونت در نظر بگیرید. معادله انتشار عفونت به صورت انتگرال ولترا – همرشتاین زیر داده می‌شود:

$$y(t)=\begin{cases} f(t)+\int_{t-\tau}^{t} P(t-s).g(y(s)), & 0\le t\le T,\\ \xi(t) & -\tau\le t\le 0,\end{cases}$$

فرض کنید نسبت عفونت جدید در واحد زمان، $g(y(t))$، متناسب با $y(t)$ باشد و P یک تابع نزولی مثبت با $P(0)=1$ باشد. همچنین فرض کنید $\tau=T=0.5$. از آنجا که منطقی است فرض کنید نسبت مهاجرانی که در واحد زمان هنوز هم به این بیماری مبتلا هستند در حال کاهش است، مدل ریاضی زیر بدست می‌آید:

$$y(t)=\begin{cases} f(t)+\int_{t-\tau}^{t} e^{-(t-s)}y(s)ds & 0\le t\le 0.5,\\ \xi(t) & -0.5\le t\le 0,\end{cases}$$

که در آن $f(t)=0.5e^{-t}$ و $\xi(t)=e^{-t}$. جواب دقیق دستگاه فوق به صورت زیر است:

$y:[-0.5,0.5]\rightarrow$ ، ,

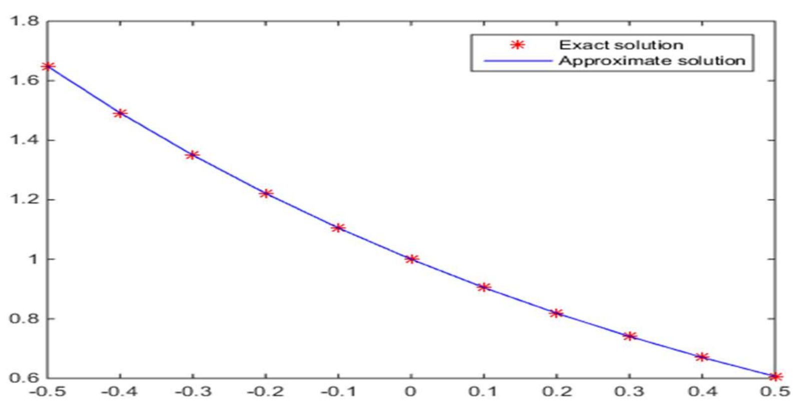
$y(t)=e^{-t}$.

با بکارگیری روش پیشنهادی برای $n=4,6$، و $n=8$ جواب تقریبی بدست می‌آید. در جدول (۲) خطاهای بدست آمده از این روش و خطای روش تقریب کمترین مربعات بر پایه استاندارد از مرجع [۱۰] مقایسه شده‌اند. همچنین مقایسه جواب تقریبی و جواب دقیق معادله انتگرال ولترا خطی تاخیری برای این مثال در شکل (۲) نشان داده شده است.

جدول ۲: مقایسه خطای روش‌ها برای مثال ۲-۶

n	روش پیشنهادی	روش مرجع [۱۰]
4	1.0100e-5	1.01e-5
6	2.0042e-6	5.32e-6
8	1.3092e-11	1.30e-11

شکل ۲: مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی



نتیجه‌گیری

در این مقاله روش عددی تقریب کمترین مربعات بر پایه چندجمله‌ای‌های درجه n برنشتاین انتقال یافته برای مدل ریاضی انتشار بیماری‌های عفونی معینی که به‌طور فصلی و با سرعت ثابت تغییر می‌کنند بیان و مورد بررسی قرار گرفت. همچنین اعتبار و کارایی روش پیشنهادی با ارائه دو مثال عددی و مقایسه نتایج با روش‌های دیگر نشان داده شد. همانطور که مشاهده می‌شود روش ارائه شده دارای دقت بسیار بالایی نسبت به سایر روش‌های موجود می‌باشد.

تقدیر و تشکر

از داوران محترم به خاطر پیشنهادهای سازنده شان که موجب بهبود کیفیت و پربارتر شدن مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را داریم.

فهرست منابع

[1] M. I. Berenguer, D. Gámez, A. l. Guillem, M. R. Galán, M. S. Pérez, Biorthogonal systems for solving Volterra integral equation systems of the second kind, Journal of Computational and Applied Mathematics 235:1875-1883 (2011).

[2] Y. Chen, T. Tang, Spectral methods for weakly singular Volterra integral equations with smooth solutions, Journal of Computational and Applied Mathematics, 233:938-950 (2009).

[3] H. H. Sorkun, S. Yalçinbaş, Approximate solutions of linear Volterra integral equation systems with variable coefficients, Applied Mathematical. Modelling, 34:3451-3464 (2010).

[4] J. P. Kauthen, Continuous time collocation methods for Volterra-Fredholm integral equations, Numerische Mathematik, 56:409-424 (1989).

[5] A. H. Borzabadi, O. S. Fard, A numerical scheme for a class of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind, Journal of Computational and Applied Mathematics, 232:449-454 (2009).

[6] K. M. Liew, Y. Cheng, S. Kitipornchai, Boundary element-free method (BEFM) and its application to two-dimensional elasticity problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 65:1310-1332 (2006).

[7] Q. Wang, K. Wang, S. Chen, Least squares approximation method for the solution of Volterra-Fredholm integral equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 272:141-147 (2014).

[8] Y. Ordokhani, S. Davaei Far, Application of the Bernstein polynomials for solving the nonlinear Fredholm integro-differential equations, Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics, 1:13-31 (2011).

[9] K. L. Cooke, An epidemic equation with immigration, Mathematical Biosciences, 29:135-158 (1976).

[10] M. Mosleh, M. Otadi, Least squares approximation method for the solution of Hammerstein–Volterra delay integral equations, Applied Mathematics and Computation, 258:105-110 (2015).

[11] M. Avaji, J. S. Hafshejani, S. S. Dehcheshmeh, D. F. Ghahfarokhi, Solution of delay Volterra integral equations using the Variational iteration method. Journal of Applied Sciences, 12:196-200 (2012).

[12] A. Bica, C. IANCU, A numerical method in terms of the third derivative for a delay integral equation from biomathematics, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 6:1-18 (2005).

[13] S. Yalçinbaş, Taylor polynomial solutions of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations, Aplied Mathematics and Computation, 127:195-206 (2002).