

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

دوره ششم، شماره بیست و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۹

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پایه‌های مبتنی بر تجزیه ماتریسی در درونیابی چندجمله‌ای

مریم محمدی^{۱*}، مریم بحر کاظمی^۲

(۱) دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

(۲) دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۹/۱۷

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۴/۲۷

چکیده

پایه‌های متداول درونیابی، مونومیال‌ها یا تک‌جمله‌ای‌ها هستند، بنابراین ماتریس ضرایب در حل دستگاه حاصل از درونیابی چندجمله‌ای، ماتریس واندرموند خواهد بود که ماتریسی بدوضع و چگال بوده و پایداری جواب را با مشکل مواجه می‌کند. در این مقاله ما به دنبال یافتن پایه‌های دیگری از روی پایه‌های متداول مونومیال‌ها هستیم، به طوری که عدد وضعیت ماتریس متناظر با پایه‌های جدید کوچکتر باشد. پایه‌های معرفی شده وابسته به داده بوده و به دودسته پایه‌های ℓ^2 - متعامد یک‌ه‌ی گسسته و L^2 - متعامد یک‌ه‌ی پیوسته تقسیم می‌شوند. این پایه‌ها، پایه‌هایی هستند که اعضای آنها به ترتیب تحت ضرب داخلی فضاهای $\ell^2(X)$ و $L^2[-1,1]$ دو به دو متعامد بوده، یا به عبارتی ماتریس گرام متناظر با ضرب داخلی آنها ماتریس همانی می‌باشد. دسته‌ی اول با اعمال تجزیه QR و تجزیه مقدار تکین بر روی ماتریس واندرموند و دسته‌ی دوم با اعمال تجزیه چولسکی و تجزیه مقدار تکین بر روی ماتریس گرام متناظر بامونومیال‌ها به دست می‌آیند. نتایج عددی به دست آمده بر کوچکتر بودن عدد وضعیت ماتریس‌های ارزیابی حاصل از پایه‌های جدید نسبت به پایه‌های متداول مونومیال و همچنین دقت بالای این پایه‌ها در درونیابی دلالت دارد.

واژه‌های کلیدی: درونیابی چندجمله‌ای، پایه‌های مونومیال، ماتریس واندرموند، ماتریس گرام، تجزیه ماتریس.

مقدمه

به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$p_n(x) = m(x).a = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

ضرایب مجهول $a = (a_0, \dots, a_n)^T$ از حل دستگاه $A.a=f$ با ماتریس ضرایب واندرموند

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

و بردار سمت راست $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)^T$ به دست می‌آیند [2]. از آنجا که ماتریس واندرموند ماتریسی بدو ضلع بوده و جواب‌های عددی به دست آمده از حل دستگاه قابل اعتماد نمی‌باشد، ما به دنبال یافتن پایه‌های دیگری در فضای چندجمله‌ای‌ها هستیم به طوری که عدد وضعیت ماتریس‌های متناظر کوچک‌تر باشند. در ادامه برای سادگی فرض می‌کنیم $[x_0, x_n] = [-1, 1]$ ، زیرا چنانچه بازه‌ی درونیابی $[a, b]$ باشد، با یک انتقال ساده می‌توان آن را به بازه $[-1, 1]$ انتقال داد. اکنون به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل بعد می‌پردازیم [5، 6].

تعریف 1.1. فرض کنید $p \geq 1$ یک عدد حقیقی باشد و $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. فضای متشکل از تمام توابع اندازه‌پذیر $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ که انتگرال به مفهوم لبگ

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx$$

موجود باشد را فضای $L^p(\Omega)$ می‌نامیم. فضای $L^p(\Omega)$ یک فضای برداری نرم دار با نرم

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

می‌باشد.

تبصره 1.2. فضای ℓ^2 متشکل از تمام بردارهای حقیقی مقدار داخلی (x_1, x_2, x_3, \dots) با شرط $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$ به همراه ضرب

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

درونیابی به وسیله‌ی چندجمله‌ای‌ها یا توابع دیگر یک روش بسیار قدیمی و مهم در ریاضیات کاربردی است. واژه‌ی درونیابی توسط جان والیس در سال 1655 معرفی شد [1]. کاربرد اولیه‌ی نظریه‌ی درونیابی چندجمله‌ای برای گسترش روش‌های ریاضی در حوزه‌ی نظریه‌ی تقریب، انتگرال‌گیری و حل عددی معادلات دیفرانسیل می‌باشد. مفهوم درونیابی عبارت است از انتخاب یک تابع $p(x)$ از رده‌ای از توابع داده شده به نحوی که نمودار $y = p(x)$ از یک مجموعه‌ی متناهی از نقاط داده شده، بگذرد [2]. تقریب یک تابع زمانی مورد نیاز است که تنها مقادیر عددی آن تابع را در اختیار داشته باشیم و یا تابع موردنظر پیچیده باشد. ماتریس‌های واندرموند که حاصل درونیابی توسط پایه‌های مونومیال هستند از سال 1970 مورد توجه قرار گرفته‌اند. مطالعات تجربی به صورت پیوسته نشان می‌دهند که ماتریس‌های واندرموند بدو ضلع هستند. در [3] ثابت می‌شود که در حالت کلی هر ماتریس واندرموند بدو ضلع است بجز این که همه‌ی نقاط آن درون یا نزدیک به دیسک $\{x : |x| \geq 1\}$ باشند و حتی بیشتر این نقاط داخل یا نزدیک به دایره‌ی $C(0,1)$ قرار داشته باشند. اخیراً، گنر ماتریس‌های تبدیل از یک پایه درونیابی مانند لاگرانژ، نیوتن، چندجمله‌ای‌های متعامد و غیره به پایه دیگر را یافت نموده است [4]. فرض کنید مقادیر جدولی زیر را داریم.

x	x_0	x_1	\dots	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	\dots	f_n

که در آن $x_i \neq x_j$ برای $i \neq j$. در این صورت یک چندجمله‌ای درونیابی یکتای (xp_n) از درجه n حداکثر n وجود دارد به طوری که

$$p_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

در واقع هدف ما از درونیابی چندجمله‌ای، یافتن چندجمله‌ای درونیابی تابع $f(x)$ روی نقاط $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ در فضای چندجمله‌ای‌های درجه n یعنی $P_n = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ است. چندجمله‌ای درونیابی (xp_n) با استفاده از پایه‌های مونومیال

$$m(x) = [m_0(x), \dots, m_n(x)] = [1, x, \dots, x^n]$$

قضیه 1. 8 (تجزیه QR). فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

و $m \geq n$ باشد، در این صورت یک ماتریس متعامد $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ وجود دارد به طوری که

$$A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix},$$

که در آن R یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری غیر صفر است.

قضیه 1. 9 (تجزیه مقدار تکین (SVD)). برای

ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ماتریس‌های متعامد $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ وجود دارند به طوری که

$$U^T A V = S = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n},$$

و $D = \text{diag}[\sigma_1, \dots, \sigma_r]$ ، که در آن $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ مقادیر تکین ناصفر ماتریس A هستند.

در این مقاله به معرفی دو دسته پایه‌ی وابسته به داده می‌پردازیم. این پایه‌ها شامل پایه‌های ℓ^2 -متعامد یک‌ه‌ی گسسته و L^2 -متعامد یک‌ه‌ی پیوسته می‌باشند که به ترتیب از تجزیه ماتریس واندرموند و تجزیه ماتریس گرام G_m به دست می‌آیند. این پایه‌ها، پایه‌هایی هستند که اعضای آنها به ترتیب تحت ضرب داخلی فضاهای (\mathcal{X}, ℓ^2) و $L^2[-1,1]$ دو به دو متعامد بوده، یا به عبارتی ماتریس گرام متناظر با ضرب داخلی آنها ماتریس همانی می‌باشد.

در بخش 2 ابتدا به بیان صورت کلی پایه‌های وابسته به داده می‌پردازیم و ماتریس ارزیابی را معرفی می‌کنیم. در ادامه به معرفی پایه‌های ℓ^2 -متعامد یک‌ه‌ی گسسته و نحوه‌ی تولید این پایه‌ها از تجزیه‌های QR و SVD می‌پردازیم و سپس پایه‌های L^2 -متعامد یک‌ه‌ی پیوسته را معرفی کرده و برای تولید این پایه‌ها از تجزیه‌های چولسکی و SVD استفاده می‌کنیم. بخش سوم را به نتایج عددی و تحلیل آنها اختصاص داده‌ایم.

2 ماتریس ارزیابی و معرفی پایه‌های وابسته به داده

هر پایه‌ی جدید در P_n را می‌توان به صورت بردار سطری زیر نمایش داد.

$$U(x) = (u_0(x), \dots, u_n(x)).$$

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots)$$

یک فضای ضرب داخلی با بعد نامتناهی است.

تبصره 1. 3. فضای $L^2(\Omega)$ یک فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)d(x),$$

$$\forall f, g \in L^2(\Omega).$$

است.

تعریف 1. 4 (ماتریس گرام). ماتریس گرام متناظر با

مجموعه‌ای از بردارهای u_0, \dots, u_n در یک فضای ضرب داخلی عبارت است از ماتریس مقارنی که درایه‌های آن بصورت $G_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$ برای $0 \leq i, j \leq n$ است.

مثال 1. 5. ماتریس گرام پایه‌های مونومیال در فضای ضرب داخلی $L^2[-1,1]$ به صورت زیر است

$$G_m = \begin{pmatrix} \langle m_0, m_0 \rangle & \langle m_0, m_1 \rangle & \dots & \langle m_0, m_n \rangle \\ \langle m_1, m_0 \rangle & \langle m_1, m_1 \rangle & \dots & \langle m_1, m_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle m_n, m_0 \rangle & \langle m_n, m_1 \rangle & \dots & \langle m_n, m_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 1 dx & \dots & \int_{-1}^1 x^n dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{-1}^1 x^n dx & \dots & \int_{-1}^1 x^{2n} dx \end{pmatrix}$$

تعریف 1. 6 (ماتریس معین مثبت). ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

را نیمه معین مثبت می‌نامند، هرگاه به ازای هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $x^T A x \geq 0$ و اگر برابری فقط برای بردار $x = 0$ اتفاق افتد A را معین مثبت می‌نامیم.

قضیه 1. 7 (تجزیه چولسکی). فرض کنید ماتریس

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ متقارن و معین مثبت باشد، در این صورت ماتریس بالا مثلثی یکتای L با عناصر قطری مثبت موجود است به طوری که

$$A = L \cdot L^T.$$

پایه جدید را می‌توان از روی پایه‌های مونیومیل به صورت زیر به دست آورد.

$$u_k(x) = \sum_{j=0}^n m_j(x) c_{jk}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (2)$$

بنابراین

$$U(x) = m(x) \cdot C_U, \quad (3)$$

که در آن $C_U = [C_{jk}]$ ، $0 \leq j, k \leq n$ ، ماتریس ضرایب یا ماتریس ساختار پایه است.

حال برای پایه‌ی U ماتریس ارزیابی زیر را خواهیم داشت.

$$V_U = (u_j(x_i))_{0 \leq i, j \leq n} \quad (4)$$

$$= \begin{pmatrix} u_0(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0(x_n) & \cdots & u_n(x_n) \end{pmatrix}$$

با توجه به (3) داریم

$$V_U = A \cdot C_U \quad (5)$$

در ادامه به معرفی دو دسته پایه‌ی متعامد یکه، به ترتیب، در فضاهای $\ell^2(X)$ و $L^2[-1,1]$ می‌پردازیم.

2.1 پایه‌های ℓ^2 -متعامد یکه‌ی گسسته

ماتریس گرام پایه‌های ℓ^2 -متعامد یکه‌ی گسسته در فضای ضرب داخلی $\ell^2(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma_U = (\langle u_i, u_j \rangle)_{0 \leq i, j \leq n}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n u_i(x_k) u_j(x_k) \right)_{0 \leq i, j \leq n}$$

$$= V_U^T V_U = C_U^T A^T A C_U.$$

قضیه 2.1. هر پایه‌ی ℓ^2 -متعامد یکه‌ی گسسته‌ی وابسته به داده از تجزیه ماتریس واندرموند به صورت زیر حاصل می‌شود

$$A = Q \cdot B,$$

که در آن $Q = V_U$ ماتریس متعامد و

$$B = C_U^{-1} = Q^T \cdot A$$

اثبات. با توجه به ماتریس گرام پایه‌های ℓ^2 -متعامد یکه‌ی گسسته، $C_U = I$ ، $\Gamma_U = C_U^T A^T A C_U$ کافی است قراردسیم

$$Q = A C_U$$

بنابراین تمام پایه‌های ℓ^2 -متعامد یکه‌ی گسسته از تجزیه ماتریس واندرموند A به دست می‌آیند، به این ترتیب دو تجزیه ماتریس زیر را پیش رو خواهیم داشت

• پایه‌ی به دست آمده از تجزیه QR

فرض کنید ماتریس A به صورت $A = QR$ تجزیه شده باشد، که در آن Q ماتریسی متعامد و R ماتریسی بالامثلثی است. این تجزیه منجر به پایه‌ای با ماتریس ضرایب $C_U = R^{-1}$ و ماتریس ارزیابی $V_U = Q$ می‌گردد که در واقع همان پایه حاصل از اعمال فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت بر روی پایه‌های مونیومیل است.

• پایه‌ی به دست آمده از تجزیه مقدار تکین (SVD)

با اعمال تجزیه SVD بر روی ماتریس A داریم $A = Q \Sigma Q^T$ و $B = \Sigma Q^T$ که در آن $A = Q \cdot B$ ، (1.2) . بنابراین طبق قضیه (2.1) است.

تذکره 2.2. اعمال تجزیه QR یا SVD بر روی ماتریس واندرموند، ماتریس ارزیابی را متعامد می‌سازد، در حالی که بدو ضعی کاملاً به ماتریس C_U انتقال پیدا می‌کند.

2.2 پایه‌های L^2 -متعامد یکه‌ی پیوسته

ماتریس گرام پایه‌های L^2 -متعامد یکه‌ی پیوسته در فضای ضرب داخلی $L^2[-1,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$G_U = (\langle u_i, u_j \rangle)_{0 \leq i, j \leq n}$$

$$= \left(\left\langle \sum_{k=0}^n m_k(x) c_{ki}, \sum_{L=0}^n m_L(x) c_{Lj} \right\rangle \right)_{0 \leq i, j \leq n}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \langle \sum_{k=0}^n m_k(x) c_{k0}, \sum_{L=0}^n m_L(x) c_{L0} \rangle & \cdots & \langle \sum_{k=0}^n m_k(x) c_{k0}, \sum_{L=0}^n m_L(x) c_{Ln} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \sum_{k=0}^n m_k(x) c_{kn}, \sum_{L=0}^n m_L(x) c_{L0} \rangle & \cdots & \langle \sum_{k=0}^n m_k(x) c_{kn}, \sum_{L=0}^n m_L(x) c_{Ln} \rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \sum_{L=0}^n c_{k0} c_{L0} \langle m_k(x), m_L(x) \rangle & \cdots & \sum_{k=0}^n \sum_{L=0}^n c_{k0} c_{Ln} \langle m_k(x), m_L(x) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^n \sum_{L=0}^n c_{kn} c_{L0} \langle m_k(x), m_L(x) \rangle & \cdots & \sum_{k=0}^n \sum_{L=0}^n c_{kn} c_{Ln} \langle m_k(x), m_L(x) \rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{00} & c_{10} & \cdots & c_{n0} \\ c_{01} & c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0n} & c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle m_0, m_0 \rangle & \cdots & \langle m_0, m_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle m_n, m_0 \rangle & \cdots & \langle m_n, m_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{00} & c_{10} & \cdots & c_{n0} \\ c_{01} & c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0n} & c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$G_m = B^T \cdot B, \quad B = C_U^{-1} \quad \text{بنابراین داریم}$$

$$G_U = C_U^T G_m C_U = I \quad \text{اثبات. با استفاده از رابطه (6) فرامی‌دهیم} \quad (6) G_U = C_U^T G_m C_U,$$

$$G_m = (C_U^{-1})^T C_U^{-1} \quad \text{در این صورت}$$

بنابراین تمام پایه‌های L^2 -متعامد یک‌ه‌ی پیوسته از تجزیه ماتریس گرام پایه‌های مونومیال به دست می‌آیند. به این ترتیب دو تجزیه ماتریس زیر را پیش رو خواهیم داشت:

- پایه‌ی به دست آمده از تجزیه چولسکی

در پایه‌ی به دست آمده از تجزیه چولسکی $G_m = L \cdot L^T$ ، که در آن $L = (C_U^{-1})^T$ ماتریسی مثلثی با درایه‌های قطری مثبت است، لذا ماتریس ارزیابی با توجه به رابطه‌ی (5) به صورت زیر می‌باشد

$$V_U = A \cdot C_U = A \cdot (L^{-1})^T.$$

- پایه‌ی به دست آمده از تجزیه مقدار تکین (SVD)

فرض کنید که $G_m = Q \Sigma Q^T$ که در آن Q ماتریسی متعامد و Σ ماتریسی قطری است که درایه‌های روی قطر آن مقادیر تکین ماتریس G_m باشند، بنابراین پایه‌ی SVD به صورت زیر خواهد بود.

$$B = \sqrt{\Sigma} \cdot Q^T, \quad C_U = Q(\sqrt{\Sigma})^{-1}$$

$$V_U = A \cdot Q(\sqrt{\Sigma})^{-1}$$

تبصره 2. 5. با توجه به رابطه (5)، همواره برای عدد وضعیت ماتریس ارزیابی پایه‌های جدید و پایه‌های مونومیال داریم.

که در آن G_m ماتریس گرام پایه‌های مونومیال است.

قضیه 2. 3. ماتریس گرام حاصل از پایه‌های مونومیال در فضای ضرب داخلی $L^2[-1, 1]$ معین مثبت و متقارن است.

اثبات. همانطور که می‌دانید ماتریس گرام متقارن است، بنابراین کافیت ثابت کنیم G_m ماتریسی معین مثبت است. فرض کنید G_m ماتریس گرام متناظر با پایه‌های مونومیال در فضای ضرب داخلی $L^2[-1, 1]$ به صورت $G_{ij} = \langle m_i, m_j \rangle_{0 \leq i, j \leq n}$ باشد. برای $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ داریم

$$\begin{aligned}
x^T G_m x &= \sum_{i,j} x_i G_{ij} x_j = \sum_{i,j} x_i \langle m_i, m_j \rangle x_j \\
&= \sum_j \langle \sum_i x_i m_i, m_j \rangle x_j \\
&= \langle \sum_i x_i m_i, \sum_j m_j x_j \rangle = \langle y, y \rangle = \|y\|_2^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

حال اگر $y = 0$ باشد، از آنجا که m_i ها پایه می‌باشند، بنابراین مقادیر x_i ها صفر هستند و در نتیجه ماتریس گرام G_m معین مثبت و متقارن است.

قضیه 2. 4. هر پایه‌ی وابسته به داده‌ی L^2 -متعامد یک‌ه‌ی پیوسته از تجزیه زیر به دست می‌آید

$$x_i = (-1) + \frac{2}{n-1}i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

و تعداد $m=2n$ نقطه متساوی الفاصله را نیز به عنوان نقاط آزمون در نظر می‌گیریم. نرم مورد استفاده برای تعیین عدد وضعیت ماتریس‌ها نرم-2 می‌باشد. جدول 1 مقایسه‌ی عدد وضعیت ماتریس‌های ارزیابی و ماتریس‌های ساختار پایه‌های ℓ^2 -متعامد یک‌ه‌ی گسسته با عدد وضعیت ماتریس واندروموند A را برای مقادیر مختلف n نشان می‌دهد. با توجه به قضیه‌ی (1.2) ماتریس ارزیابی حاصل از دو تجزیه QR و SVD ماتریسی متعامد است، به همین دلیل همانطور که در جدول 1 ملاحظه می‌کنید، عدد وضعیت ماتریس‌های ارزیابی پایه‌های ℓ^2 -متعامد یک‌ه‌ی گسسته برابر با یک می‌باشد. همچنین نکته (2.2) برقرار است و بدو وضعی کاملاً به ماتریس ساختار انتقال یافته است. جدول 2 مقایسه‌ی مقادیر عدد وضعیت ماتریس‌های ارزیابی و ماتریس‌های ساختار پایه‌های L^2 -متعامد یک‌ه‌ی پیوسته با عدد وضعیت ماتریس واندروموند A را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌کنید، مقادیر عدد وضعیت ماتریس ارزیابی با هر دو تجزیه چولسکی و SVD با افزایش مقدار n زیاد می‌شود اما همواره بسیار کوچکتر از مقدار عدد وضعیت در ماتریس واندروموند است. در شکل 1 نمودارهای خطای نسبی درونیابی با پایه‌های ℓ^2 -متعامد یک‌ه‌ی گسسته را در سمت راست و پایه‌های L^2 -متعامد یک‌ه‌ی پیوسته را در سمت چپ نمایش داده‌ایم. با توجه به نمودارهای رسم شده، میزان خطای نسبی درونیابی با پایه‌های مورد نظر بسیار کوچک و نزدیک به صفر می‌باشد. شکل 2 نمودار تابع تقریبی حاصل از درونیابی تابع $f(x) = e^x$ با پایه‌های ℓ^2 -متعامد یک‌ه‌ی گسسته را در بالا و نمودار درونیابی با پایه‌های L^2 -متعامد یک‌ه‌ی پیوسته را در پایین با مقادیر مختلف n نمایش می‌دهد، با توجه به شکل، نمودارهای درونیابی برای هر دو پایه‌ی معرفی شده با افزایش تعداد نقاط درونیابی، منطبق بر جواب دقیق مسئله درونیابی می‌باشند.

مثال (2)

در این مثال به بررسی عملکرد پایه‌های جدید در درونیابی تابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ مربوط به مثال معروف رانگ در بازه‌ی $[-5, 5]$ می‌پردازیم. در شکل 3 نمودارهای خطای نسبی درونیابی با $n = 51$ نقطه با پایه‌های ℓ^2 -متعامد یک‌ه‌ی گسسته را در سمت راست و

$$\text{cond}(V_U) \leq \text{cond}(A) \cdot \text{cond}(C_U)$$

تبصره 2.6. فرض کنید تابع درونیاب متناظر با پایه‌های جدید به صورت

$$s(x) = a_0 u_0(x) + a_1 u_1(x) + \dots + a_n u_n(x) = U(x) \cdot a$$

باشد. پس از تعیین بردار مجهول $a = (a_0, \dots, a_n)^T$ استفاده از رابطه $V_U \cdot a = f$ مقدار تقریبی تابع f را در نقاطی غیر از نقاط درونیابی به صورت زیر محاسبه می‌کنیم. فرض کنید $\tilde{X} = \{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_m\} \in (-1, 1)$ بردار نقاط جدید باشد، در این صورت داریم.

$$[s(\tilde{x}_0), \dots, s(\tilde{x}_m)]^T = \tilde{V} \cdot a, \quad (7)$$

که در آن

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} u_0(\tilde{x}_0) & \dots & u_n(\tilde{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0(\tilde{x}_m) & \dots & u_n(\tilde{x}_m) \end{pmatrix}$$

حال با توجه به رابطه‌ی (3) داریم

$$\tilde{V} = \tilde{A} \cdot C_U,$$

که در آن C_U ماتریس ساختار و ماتریس \tilde{A} به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{x}_0 & \dots & \tilde{x}_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \tilde{x}_m & \dots & \tilde{x}_m^n \end{pmatrix}.$$

3 نتایج عددی

در این بخش به بررسی نتایج عددی مربوط به مقادیر عدد وضعیت ماتریس‌ها و همچنین تحلیل نمودارهای درونیابی و خطای نسبی حاصل از درونیابی با استفاده از پایه‌های جدید می‌پردازیم. برنامه‌های این مقاله در محیط نرم افزار متلب پیاده سازی گردیده‌اند.

مثال (1)

تابع $f(x) = e^x$ را در بازه $[-1, 1]$ در نظر بگیرید. n نقطه متساوی الفاصله زیر را به عنوان نقاط درونیابی

در واقع انتخاب نقاط جدید، به زبان مطلب زیر است:

$$X_{data} = 5 * (\text{sign}(x_{data}) .* \text{abs}(x_{data} ./ 5) .^{\wedge} 2).$$

که در آن، دستورات sign و abs برای رسیدن به علامت درست برای اعداد منفی در بازه $[-5, 5]$ است. نمودار 4 توزیع نقاط را نشان می‌دهد. نمودار 4 بیانگر توزیع متراکم نقاط در نزدیکی مرکز است. در شکل 5 نمودارهای خطای نسبی درون‌یابی با $n = 51$ نقطه با پایه‌های ℓ^2 -متعامد یک‌ه‌ی گسسته را در سمت راست و پایه‌های L^2 -متعامد یک‌ه‌ی پیوسته را در سمت چپ نمایش داده‌ایم. شکل 5 بیانگر کاهش قابل توجه خطا با در نظر گرفتن نقاط غیریکنواخت جدید است.

پایه‌های L^2 -متعامد یک‌ه‌ی پیوسته را در سمت چپ نمایش داده‌ایم. شکل 3 بیانگر افزایش قابل توجه خطا به ویژه در نزدیکی $x = 0$ (مرکز) می‌باشد. این پدیده به دلیل متساوی الفاصله بودن و توزیع یکسان نقاط در طول بازه است. به منظور غیریکنواخت نمودن توزیع نقاط و افزایش تراکم آنها در نزدیکی مرکز، به صورت زیر عمل می‌کنیم. ابتدا تابع $g(x) = \frac{1}{5}x$ را برای انتقال بازه $[-5, 5]$ به بازه $[-1, 1]$ در نظر می‌گیریم. سپس با توجه به اینکه برای اعداد نزدیک به صفر داریم: $|x| < |x^2|$ ، با در نظر گرفتن تابع $h(x) = x^2$ نقاط درون‌یابی جدید را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\tilde{x}_k = g^{-1}(h(g(x_k))).$$

n	$K(A)$	$K(V_{QR})$	$K(C_{QR})$	$K(V_{SVD})$	$K(C_{SVD})$
5	63/8273	1	63/8273	1	63/8273
10	$1/3959 \times 10^4$	1	$1/3959 \times 10^4$	1	$1/3959 \times 10^4$
15	$3/2800 \times 10^6$	1	$3/2800 \times 10^6$	1	$3/2800 \times 10^6$
20	$8/3138 \times 10^8$	1	$8/3138 \times 10^8$	1	$8/3138 \times 10^8$
25	$2/1314 \times 10^{11}$	1	$2/1314 \times 10^{11}$	1	$2/1314 \times 10^{11}$

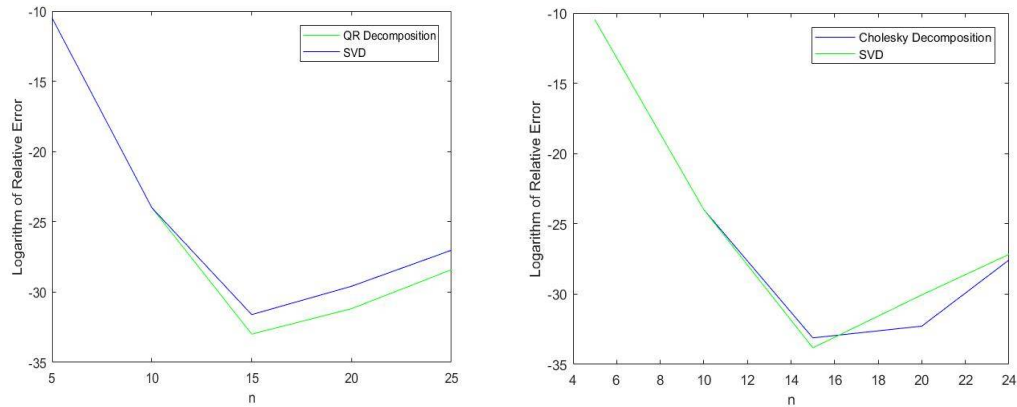
جدول 1: مقایسه ی عدد وضعیت ماتریس‌های ارزیابی و ماتریس‌های ساختار پایه‌های وابسته به داده‌ی ℓ^2 -متعامد یک‌ه‌ی گسسته و

پایه‌های مونومیال در مثال 1

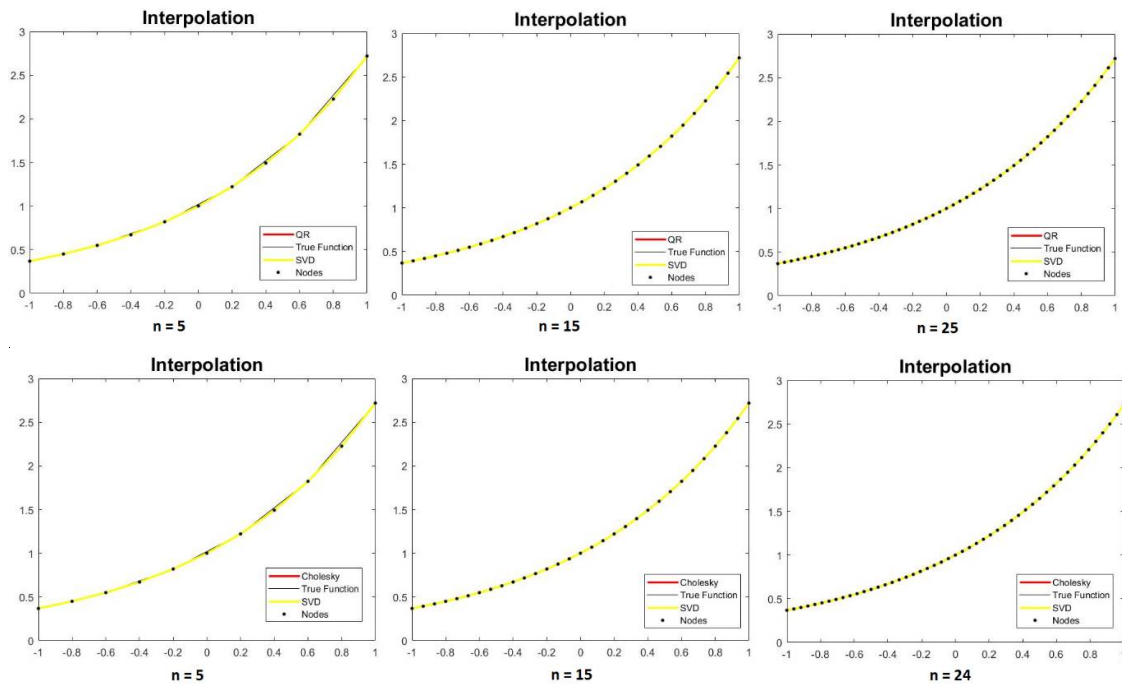
n	$K(A)$	$K(V_{Chol})$	$K(C_{Chol})$	$K(V_{SVD})$	$K(C_{SVD})$
5	63/8273	4/8630	43/2480	4/8630	43/2480
10	$1/3959 \times 10^4$	40/2449	$3/0730 \times 10^3$	40/2449	$3/0730 \times 10^3$
15	$3/2800 \times 10^6$	727/4846	$2/2989 \times 10^5$	727/4846	$2/2989 \times 10^5$
20	$8/3138 \times 10^8$	$1/6183 \times 10^4$	$1/7697 \times 10^7$	$1/6183 \times 10^4$	$1/7697 \times 10^7$
24	$7/0535 \times 10^{10}$	$2/0493 \times 10^5$	$4/0956 \times 10^8$	$2/0493 \times 10^5$	$5/1674 \times 10^8$

جدول 2: مقایسه‌ی عدد وضعیت ماتریس‌های ارزیابی و ماتریس‌های ساختار پایه‌های وابسته به داده‌ی L^2 -متعامد یک‌ه‌ی پیوسته و پایه‌های

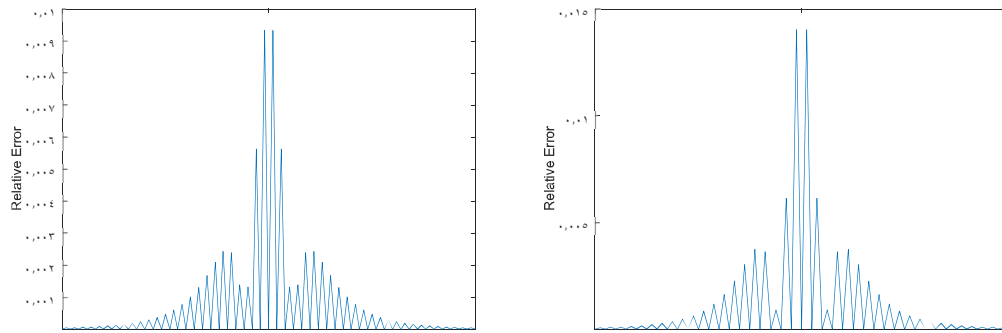
مونومیال در مثال 1



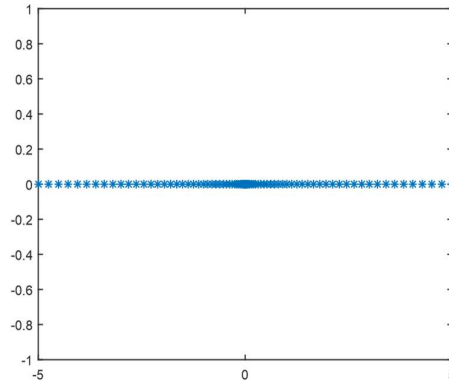
شکل 1 - نمایش نمودار خطای نسبی درون‌یابی با پایه‌های ℓ^2 -متعامد یک‌به‌یک گسسته (راست) و پایه‌های L^2 -متعامد یک‌به‌یک پیوسته (چپ) در مثال 1.



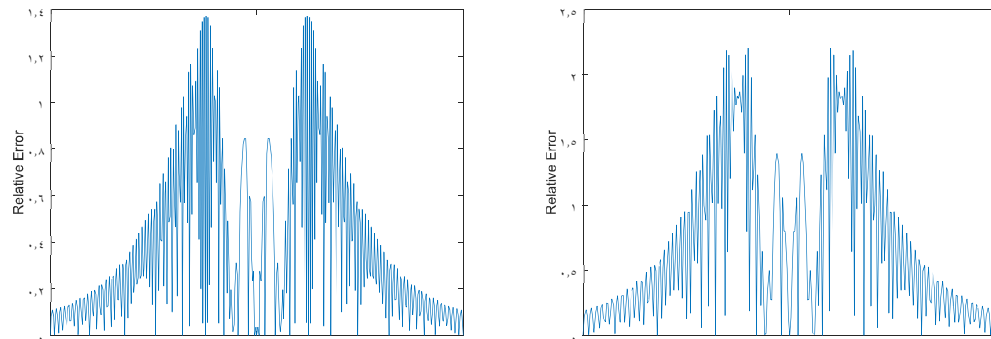
شکل 2- نمودار درون‌یابی با پایه‌های ℓ^2 -متعامد یک‌به‌یک گسسته (بالا) و نمودار درون‌یابی با پایه‌های L^2 -متعامد یک‌به‌یک پیوسته (پایین) با مقادیر مختلف n در مثال 1.



شکل 3: نمایش نمودار خطای نسبی درونیابی با پایه‌های ℓ^2 -متعامد یک‌ه‌ی گسسته (راست) و پایه‌های L^2 -متعامد یک‌ه‌ی پیوسته (چپ) حاصل از تجزیه SVD با $n = 51$ نقطه متساوی الفاصله در مثال 2.



شکل 4: نمودار توزیع نقاط در مثال 2.



شکل 5: نمایش نمودار خطای نسبی درونیابی با پایه‌های ℓ^2 -متعامد یک‌ه‌ی گسسته (راست) و پایه‌های L^2 -متعامد یک‌ه‌ی پیوسته (چپ) حاصل از تجزیه SVD با $n = 15$ نقطه با توزیع غیریکنواخت در مثال 2.

منابع

- [۱] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, *Teubner, Leipzig*, 6pp. ۰۰۹۱-۰۰۹۱.
- [۲] K. E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, John Wiley & Sons, New York, ۲nd Edition, ۱۹۸۹.
- [۳] V. Y. Pan, How Bad Are Vandermonde Matrices?, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* ۳۷(۲) (۲۰۱۶) ۶۷۶-۶۹۴.
- [۴] W. Gander, Change of basis in polynomial interpolation, *Numer. Linear Algebra Appl.* ۲۰۰۰.
- [۵] B. N. Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, SIAM, Philadelphia, ۲nd Edition, ۲۰۱۰.
- [۶] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Academic Press*, New York, ۳rd Edition, ۱۹۹۸.