دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و پنجم، مرداد و شهریور ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تعیین جواب‌های تقریباً کارای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با استفاده از روش اسکالرسازی مقید ترکیبی

مهرداد غزنوی[۱]*، فرشته اکبری[۲]، اسماعیل خرم[۳]

(۱) استادیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
(۲) دانشجوی دکتری، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
(۳) استاد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۹/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۱/۱۳

چکیده

در این مقاله، جواب‌های تقریباً کارای (ε-کارای) مسائل بهینه‌سازی چندهدفه مورد بررسی قرار می‌گیرند. یک دسته از مهمترین روش‌ها برای حل مسائل چندهدفه، استفاده از تکنیک‌های اسکالرسازی است. در این روش‌ها یک مسأله تک‌هدفه متناظر با مسأله چندهدفه حل می‌شود و ارتباط بین جواب‌های بهینه مسأله‌ی تک‌هدفه و جواب‌های کارای (سره، ضعیف) مسأله‌ی چندهدفه بررسی می‌شود. در این مقاله، ترکیبی از روش‌های اسکالرسازی مقید اصلاح شده (modified constrained) و مقید انعطاف‌پذیر (elastic constrained) در نظر گرفته می‌شود و با کمک آن شرایطی لازم و کافی برای تولید جواب‌های تقریباً کارا (ضعیف، سره) ارائه خواهد شد. نتایج بدست آمده را با شرایط لازم و کافی حاصل از روش‌های مقید اصلاح شده و مقید انعطاف‌پذیر مقایسه می‌کنیم. قضایای ارائه شده بدون هیچ شرط تحدبی برای هر یک از توابع هدف در مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه برقرار هستند. برخلاف بسیاری از روش‌های قبلی، نتایج بدست آمده برای مسائل چندهدفه با فضای هدف بیکران نیز برقرار هستند.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی چندهدفه، روش اسکالرسازی، جواب‌های تقریباً کارا، کارایی سره، بهینگی تقریبی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: ghaznavi@shahroodut.ac.ir

۱- مقدمه

بهینه‌سازی چندهدفه[2] یکی از شاخه‌های ریاضی است که در دهه‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است و در بسیاری از شاخه‌های علوم از جمله پزشکی، اقتصاد، علوم مهندسی، حمل و نقل، یادگیری ماشین و ... کاربرد دارد [۹-۱]. در بهینه سازی چندهدفه اغلب دنبال بهینه‌کردن چندین تابع هدف متناقض هستیم، لذا در یک مسأله‌ی بهینه‌سازی چند هدفه برخلاف مسائل تک‌هدفه غالباً جواب بهینه وجود ندارد. به همین خاطر مفهوم "جواب کارا" تعریف می شود. در یک مسأله چندهدفه، یک جواب کارا جوابی است که هیچ یک از مولفه‌هایش نمی‌توانند بهبود یابند مگر این‌که حداقل یکی دیگر از مولفه‌هایش بدتر شود. این تعریف برای اولین بار در سال ۱۸۸۱ توسط اجورث [۱۰] مطرح شد. اما چون ویلفرود پارتو [۱۱] اقتصاددان ایتالیایی-فرانسوی، آن را در سال ۱۸۹۶ توسعه داد به این تعریف اغلب بهینگی پارتو گویند.

مسائل بهینه‌سازی چندهدفه معمولاً به‌صورت غیرمستقیم و با استفاده از تکنیک‌های معمول بهینه‌سازی تک‌هدفه حل می‌شوند. فرایند حل بدین‌صورت است که ابتدا یک مسأله تک‌هدفه متناظر با مسأله چندهدفه ساخته می‌شود و سپس مسأله تک‌هدفه حل می‌شود. در نهایت رابطه بین جواب‌های بهینه مسأله تک‌هدفه و جواب‌های کارای مسأله چندهدفه بررسی می‌شود. تکنیک‌های اسکالرسازی زیادی تاکنون معرفی شده است که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به تکنیک‌های مجموع وزن‌دار شده، اپسیلون-محدودیت، بنسن، پاسکلتی-سرافینی و پاسکلتی-سرافینی اصلاح‌شده اشاره کرد. در مراجع [۵] و [۱۶-۱۲] تکنیک‌های اسکالرسازی متعددی ارائه شده است.

در سال‌های اخیر یافتن جواب‌های تقریباً کارای[3] یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه بسیار مورد توجه قرار گرفته است. دلایل متعددی برای جالب و مفید بودن جواب‌های تقریباً کارا وجود دارند که مهم‌ترین آن‌ها را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

۱. اغلب برای حل یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه باید یک مسأله تک‌هدفه متناظر با آن را حل کرد و رابطه بین جواب‌های بهینه مسأله تک‌هدفه و جواب‌های کارای مسأله چندهدفه را بررسی کرد. اما یک مسأله تک‌هدفه معمولاً با روش‌های تکراری یا روش‌های ابتکاری حل می‌شود و جواب‌هایی تقریبی برای مسأله تک‌هدفه بدست می‌آیند. لذا پیدا کردن رابطه بین این جواب‌های تقریبی و جواب‌های تقریباً کارای مسأله بهینه‌سازی چندهدفه از اهمیت زیادی برخوردار است.

۲. در بسیاری از مواقع ممکن است مجموعه جواب‌های کارای یک مسأله تهی باشد، اما تحت شرایطی ضعیف‌تر اغلب مواقع جواب‌های تقریباً کارایی وجود دارند که برای تصمیم گیرنده مهم هستند.

۳. در بیشتر مسائل واقعی، مانند مسائل پزشکی و مهندسی، نمی‌توان فرم دقیقی از مسأله را پیش از حل مسأله بدست آورد و بسیاری از مدل‌های ارائه شده یک نمونه ساده شده از مسأله اصلی هستند و الگوریتم‌های حل این مدل‌ها جواب‌های تقریبی ارائه می‌دهند.

۴. در بسیاری از مسائل چندهدفه (نامحدب)، پیدا کردن یک دسته از جواب‌های کارا ممکن است زمان‌گیر باشد. لذا ممکن است تصمیم گیرنده پیدا کردن یک جواب تقریباً کارا در کوتاه مدت را به بدست آوردن جواب دقیق در بلند مدت ترجیح دهد.

تعاریف مختلفی برای جواب‌های تقریباً کارا ارائه شده است. پرکاربردترین تعریف در این باره توسط کوتاتلادزه [۱۷] ارائه شد که ما نیز در این مقاله از این تعریف استفاده می‌کنیم. پس از این تعریف، لوریدن [۱۸] آن را گسترش داد و سپس وایت [۱۹] شش نوع مختلف از جواب‌های تقریباً کارا را معرفی کرد و ارتباط بین آن‌ها را مورد بررسی قرار داد. در ادامه محققان زیادی به بررسی تقریباً کارایی در مسائل چندهدفه پرداخته‌اند[۲۶-۲۰].
جواب‌های تقریباً کارای سره[4] جواب‌های تقریباً کارایی هستند که تبادل[5] بین توابع هدف در آن‌ها کراندار است و به همین دلیل اهمیت زیادی در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه به‌خصوص در بهینه‌سازی تعاملی دارند. برای

2. Multiobjective optimization
3. Approximate efficient solutions
4. Properly efficient
5. Trade-off

اولین بار، لی و وانگ [۲۷] مفهوم تقریباً کارایی سره را تعریف کردند و شرایطی لازم برای تولید جواب‌های تقریباً کارای سره ارائه دادند. بعد از آن، لیو [۲۸] شرایطی لازم و کافی برای جواب‌های تقریباً کارای سره مسائل چندهدفه محدب را ارائه و دوگانی تقریبی در مسائل چندهدفه را مورد بررسی قرار داد. در سال ۲۰۱۱، غزنوی و خرم [۲۹] شرایطی لازم و کافی برای جواب‌های تقریباً کارای (سره، ضعیف) مسائل چندهدفه بدست آوردند. یکی از روش‌های اسکالرسازی که آن‌ها استفاده کردند و با کمک آن تقریباً کارایی را بررسی کردند، روش اسکالرسازی مقید انعطاف‌پذیر[۶] بود. این روش، تعمیمی از روش اپسیلون–محدودیت است که در آن اجازه داده می‌شود برخی از محدودیت‌های مسأله اپسیلون–محدودیت نقض شوند و جریمه‌ای برای این نقض شدن در تابع هدف در نظر گرفته می‌شود.

همچنین، غزنوی و همکاران [۳۰] با کمک روش اسکالرسازی مقید اصلاح شده[۷] که تعمیمی دیگر از روش ε–محدودیت است، توانستند نتایجی برای تقریباً کارایی (سره، ضعیف) بدست آورند. نتایج آن‌ها برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه بدون هیچ شرط تحدبی برقرار است. به علت اهمیت مفهوم تقریباً کارایی سره، بعد از آن محققان زیادی این مفهوم را از ابعاد مختلف مورد بررسی قرار دادند. برای نمونه می‌توان به مراجع [۳۱–۳۴] اشاره کرد.

در ادامه کارهای [۲۹و۳۰]، در این مقاله ترکیبی از روش‌های اسکالرسازی مقید انعطاف‌پذیر و مقید اصلاح شده را بررسی می‌کنیم که به آن مسأله اسکالرسازی مقید ترکیبی[۸] گوییم. در این روش، به محدودیت‌های مسأله اپسیلون–محدودیت متغیرهای کمبود و اضافی[۹] همزمان با هم افزوده شده است و تابع هدف نیز متناسب با آن‌ها تغییراتی داشته است. رابطه بین جواب‌های تقریباً بهینه[۱۰] (ϵ– بهینه) این مسأله اسکالرسازی و جواب‌های تقریباً کارای (ضعیف، سره) مسأله چندهدفه را بررسی می‌کنیم. در واقع، با کمک این روش شرایطی لازم و کافی برای تقریباً کارایی (سره، ضعیف) ارائه می‌دهیم. قابل ذکر است که بر خلاف نتایج به‌دست آمده در [۲۹و۳۰]، در این مقاله لزومی ندارد که مسأله چندهدفه کران‌دار باشد.

این مقاله در ۴ بخش تنظیم شده است. در بخش ۲، برخی از مفاهیم و مبانی اولیه مربوط به مسائل بهینه‌سازی چندهدفه را مطرح می‌کنیم. در بخش ۳، تعمیم‌هایی از روش اسکالرسازی اپسیلون–محدودیت برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه معرفی می‌شوند. در بخش ۴، با کمک روش اسکالرسازی مقید ترکیبی شرایطی لازم و کافی برای تولید نقاط تقریباً کارا (ضعیف، سره) برای مسأله بهینه‌سازی چندهدفه ارائه می‌دهیم و در نهایت نتایج آورده شده است.

۲- مفاهیم و تعاریف اولیه

فرض کنید $z^1, z^2 \in \mathbb{R}^p$. در این‌صورت $z^1 \leqq z^2$ اگر و تنها اگر برای هر اندیس $i \in \{1,2,\ldots,p\}$ داشته باشیم، $z_i^1 \leq z_i^2$. $z^1 \leq z^2$ اگر و تنها اگر $z^1 \leqq z^2$ و $z^1 \neq z^2$. همچنین، $z^1 < z^2$ اگر و تنها اگر به ازای هر اندیس $i \in \{1,2,\ldots,p\}$، $z_i^1 < z_i^2$. مخروط ترتیبی $\mathbb{R}^p_{\geqq}$ و مشتقات آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbb{R}^p_{\geqq} = \left\{ z \in \mathbb{R}^p : z \geqq 0 \right\},$$
$$\mathbb{R}^p_{\geq} = \left\{ z \in \mathbb{R}^p : z \geq 0 \right\},$$
$$\mathbb{R}^p_{>} = \left\{ z \in \mathbb{R}^p : z > 0 \right\}.$$

در حالت کلی یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{MOP}: \min_{s.t.\ x \in X} f(x) = \left(f_1(x), \ldots, f_p(x)\right),$$

که در آن X ناحیه شدنی و ناتهی در فضای تصمیم‌گیری[۱۱] $\mathbb{R}^n$ و $f : X \to \mathbb{R}^p$ با $p \geq 2$، تابع هدف است. تصویر X تحت تابع f را با

6. Elastic constrained scalarization method
7. Modified constrained scalarization method
8. Combined constrained scalarization method
9. Slack and surplus variables
10. Approximate optimal solutions
11. Decision space

$Y=\{f(x): x\in X\}$ نشان می‌دهند که مجموعه شدنی در فضای هدف[۱۲] $\mathbb{R}^p$ می‌باشد. همچنین، فرض می‌کنیم $\varepsilon\in\mathbb{R}^p_{\geqq}$ و $\epsilon\in\mathbb{R}_{\geq}$.

تعریف ۲-۱: فرض کنید $\hat{x}\in X$.

۱. $\hat{x}$ یک جواب تقریباً کارا ($\varepsilon-$کارا) برای مسأله بهینه‌سازی چندهدفه MOP است، هرگاه نتوان $x\in X$ یافت به‌طوری‌که $f(x)\leq f(\hat{x})-\varepsilon$.

۲. $\hat{x}$ یک جواب تقریباً کارای ضعیف ($\varepsilon-$کارای ضعیف) برای مسأله MOP است، هرگاه هیچ $x\in X$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $f(x)<f(\hat{x})-\varepsilon$.

نمادگذاری ۲-۱: مجموعه جواب‌های تقریباً کارا و تقریباً کارای ضعیف را به‌ترتیب با $X_{\varepsilon E}$ و $X_{\varepsilon WE}$ نمایش می‌دهیم. اگر $\varepsilon=0$، آن‌گاه این تعاریف، به ترتیب، به کارایی و کارایی ضعیف تبدیل می‌شوند.

مثال ۲-۱: فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ یک تابع دو ضابطه‌ای باشد و فرض کنید ناحیه شدنی مسأله به فرم زیر باشد:

$$X=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\geq 1, x_2\geq 1,$$
$$x_1+x_2\geq 4, \max\{2x_1,3x_2\}\geq 6\}.$$

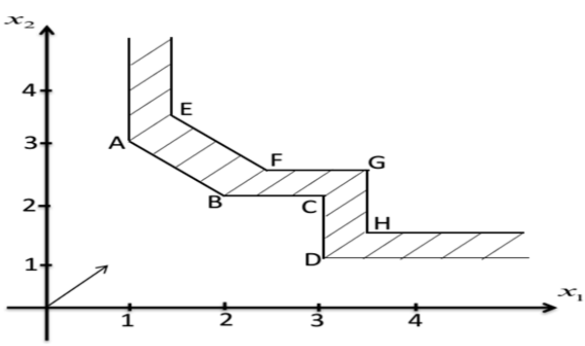
همچنین، فرض کنید توابع هدف به‌صورت $f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$ داده شده باشد. همان‌گونه که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، داریم:

$$X_E=\{\lambda(1,3)+(1-\lambda)(2,2)\mid$$
$$\lambda\in[0,1]\}\cup\{(3,1)\}$$

و

$$X_{WE}=X_E\cup\{\lambda(2,2)+(1-\lambda)(3,2)\mid$$
$$\lambda\in[0,1]\}\cup\{\lambda(3,2)+(1-\lambda)(3,1)\mid$$
$$\lambda\in[0,1]\}\cup\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_1=1, x_2\geq 3\}$$
$$\cup\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_2=1, x_1\geq 3\}.$$

حال فرض کنید بردار $\varepsilon=(\frac{1}{\sqrt{8}},\frac{1}{\sqrt{8}})$ داده شده باشد. همان‌گونه که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، مجموعه جواب‌های ε-کارا شامل ناحیه هاشور خورده، منحنی متصل کننده نقاط A و B، منحنی متصل کننده نقاط E و F و تک تک نقاط D و H است، در حالی‌که مجموعه جواب‌های تقریباً کارای ضعیف شامل ناحیه هاشور خورده و هر دو منحنی بالا و پایین این ناحیه است.
همان‌گونه که از تعریف جواب‌های کارا مشخص است، در یک جواب کارا نمی‌توان یکی از توابع هدف را بهبود داد مگر اینکه این بهبود با بدتر شدن حداقل یکی دیگر از توابع هدف همراه باشد. این تبادل بین توابع هدف، با محاسبه میزان افزایش یکی از توابع هدف به ازای کاهش یکی دیگر از توابع هدف بدست می‌آید. در بعضی از مواقع، این تبادل ممکن است بی‌کران باشد. به عبارت دیگر، بهبود دادن یکی از توابع هدف باعث می‌شود که تابع هدف دیگری بی‌نهایت بار بدتر شود. در عمل، یعنی حداقل یکی از توابع هدف نادیده گرفته می‌شود که مطمئناً مطلوب تصمیم‌گیرنده نیست.



شکل ۱. مجموعه جواب‌های کارا (ضعیف) و تقریباً کارای (ضعیف) مثال ۲-۱ در فضای تصمیم.

12. Criterion space

لذا، جواب‌های کارای با مقدار تبادل کران‌دار از اهمیت زیادی برخوردار هستند که این جواب‌ها را کارای سره گویند. کارایی سره اهمیت زیادی در الگوریتم‌های تعاملی [۱۴] دارد. چون در این الگوریتم‌ها در فرایند حل مسأله سعی می‌شود جواب‌هایی به تصمیم گیرنده ارائه شود و اگر جواب‌های ارائه شده مطلوب تصمیم گیرنده نباشند، او می‌تواند درخواست کند که یکی از توابع هدف بهبود یابد. حال اگر تبادل بین توابع هدف کران‌دار نباشد، ممکن است بهبود دادن آن تابع هدف باعث بی‌نهایت بار بدتر شدن حداقل یکی دیگر از توابع هدف شود که مطمئناً مطلوب تصمیم گیرنده نخواهد بود. جواب‌های تقریباً کارای سره برای اولین بار توسط لی و وانگ [۲۷] معرفی شدند که تعمیمی از کارایی سره به مفهوم جفرن [۳۵] هستند.

تعریف ۲-۲: جواب شدنی $\hat{x}\in X$ را یک جواب تقریباً کارای سره برای مسأله MOP گوییم، هرگاه $\hat{x}$ تقریباً کارا باشد و یک عدد حقیقی $M>0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر اندیس $i\in\{1,2,\dots,p\}$ و هر $x\in X$ با $f_i(x)<f_i(\hat{x})-\varepsilon_i$، حداقل یک اندیس $j\neq i$، موجود باشد بطوریکه

$$f_j(\hat{x})-\varepsilon_j<f_j(x)$$

و

$$\frac{f_i(\hat{x})-f_i(x)-\varepsilon_i}{f_j(x)-f_j(\hat{x})+\varepsilon_j}\le M \quad [۲۷].$$

نمادگذاری ۲-۲: مجموعه جواب‌های تقریباً کارای سره را با $X_{\varepsilon PE}$ نمایش می‌دهیم. اگر $\varepsilon=0$، آن‌گاه این تعریف به کارایی سره به مفهوم جفرن [۳۵] تبدیل می‌شود. همچنین رابطه زیر بین مجموعه جواب‌های تقریباً کارا (ضعیف، سره) برقرار است:

$$X_{\varepsilon PE}\subseteq X_{\varepsilon E}\subseteq X_{\varepsilon WE}.$$

مسأله بهینه‌سازی تک‌هدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$SOP:\quad \min_{s.t.\ x\in X,} g(x)$$

که در آن $g:X\to\mathbb{R}$ و $X\subset\mathbb{R}^n$ ناحیه شدنی است.

تعریف ۲-۳. فرض کنید $\epsilon\ge 0$ داده شده باشد. یک جواب شدنی $\hat{x}\in X$ برای مسأله تک‌هدفه SOP،

۱) یک جواب بهینه نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x\in X$ داشته باشیم $g(\hat{x})\le g(x)$.

۲) یک جواب $\epsilon-$بهینه گفته می‌شود، هرگاه برای هر $x\in X$، داشته باشیم $g(\hat{x})\le g(x)+\epsilon$.

۳) $\hat{x}\in X$ یک جواب $\epsilon-$بهینه اکید نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x\in X$، نتیجه بگیریم $g(\hat{x})<g(x)+\epsilon$. [۲۰]

۳- جواب‌های تقریباً کارا با کمک تعمیم‌هایی از روش اپسیلون-محدودیت

مسائل بهینه‌سازی چندهدفه اغلب به صورت غیرمستقیم حل می‌شوند. یک از رایج‌ترین روش‌های حل مسائل چندهدفه استفاده از تکنیک‌های اسکالرسازی است. فرایند حل به این صورت است که یک مسأله تک‌هدفه متناظر با مسأله چندهدفه ساخته می‌شود و سپس ارتباط بین جواب‌های تقریباً بهینه مسأله تک‌هدفه و جواب‌های تقریباً کارای (ضعیف، سره) مسأله چندهدفه بررسی می‌شود.

۳-۱: روش اسکالرسازی مقید انعطاف پذیر

مسأله اسکالرسازی مقید انعطاف‌پذیر به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۶]:

$$\begin{aligned}P_k^{EL}:\quad &\min\ f_k(x)+\sum_{i\neq k}\mu_i s_i\\ &s.t.\quad f_i(x)-s_i\le\delta_i,\ \forall i\neq k,\\ &\qquad s_i\ge 0,\ i\neq k,\\ &\qquad x\in X,\end{aligned}$$

که در آن $\delta_i\in\mathbb{R}$ و $\mu_i\ge 0$، $i\neq k$ به‌ترتیب کران‌های بالا و وزن‌های نامنفی داده شده هستند.

با فرض این‌که $Y=f(X)$ کران‌دار باشد، غزنوی و خرم [۲۹] از مسأله اسکالرسازی P_k^{EL} استفاده کردند و شرایطی لازم و کافی برای جواب‌های تقریباً کارا (سره، ضعیف) بدست آوردند. در قضیه زیر تعدادی از شرایط کافی برای تقریباً کارایی (سره، ضعیف) آورده شده است.

برای مشاهده قضایای بیشتر و اثبات این قضایا به مرجع [۲۹] رجوع کنید.

قضیه ۳-۱: مسأله چندهدفه MOP را در نظر بگیرید. فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_{\geqq}$ داده شده باشد و $\epsilon \le \varepsilon_k$.

الف- اگر $(\hat{x},\hat{s})$ یک جواب ϵ-بهینه برای مسأله P_k^{EL} با $\mu_i \ge 0$، $i \ne k$ باشد، آنگاه $\hat{x} \in X_{\varepsilon WE}$.

ب- اگر $(\hat{x},\hat{s})$ یک جواب ϵ-بهینه اکید برای مسأله P_k^{EL} با $\mu_i \ge 0$، $i \ne k$ باشد، آنگاه $\hat{x} \in X_{\varepsilon E}$.

ج- اگر $(\hat{x},\hat{s})$ یک جواب ϵ-بهینه برای مسأله P_k^{EL} با $\mu_i > 0$، $i \ne k$ و $\hat{s} > 0$باشد، آنگاه $\hat{x} \in X_{\varepsilon PE}$.

قضیه زیر یک شرط لازم برای جواب‌های تقریباً کارای سره ارائه می‌دهد:

قضیه ۳-۲: فرض کنید $\hat{x}$ یک جواب تقریباً کارای سره برای مسأله چندهدفه MOP باشد. آن‌گاه، برای هر $k \in \{1,2,...,p\}$، بردارها و اسکالرهای δ، $\hat{s}$ و $\mu_i^k < \infty$، $i \ne k$ وجود دارند، به طوری‌که $(\hat{x},\hat{s})$ یک جواب ϵ-بهینه برای مسأله P_k^{EL} با $\mu \ge \mu^k$ و $\epsilon = \sum_{i \ne k} \mu_i \varepsilon_i + \varepsilon_k$ است.

۳-۲: روش اسکالرسازی مقید اصلاح شده

مسأله اسکالرسازی مقید اصلاح شده به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۶]:

$$
\begin{aligned}
P_k^{MD}: \ & \min\ f_k(x) - \sum_{i \ne k} \mu_i s_i \\
& s.t. \quad f_i(x) + s_i \le \delta_i,\ \forall i \ne k \\
& \qquad s_i \ge 0,\ i \ne k \\
& \qquad x \in X,
\end{aligned}
$$

که در آن $\delta_i \in \mathbb{R}$، $i \ne k$ کران‌های بالا و $\mu_i \ge 0$، $i \ne k$ وزن‌های نامنفی داده شده هستند.

این روش اصلاحی بر روش اپسیلون-محدودیت است که در آن از متغیرهای کمبود نامنفی $s_i, i \ne k$ استفاده شده است. همان‌گونه که در مرجع [۳۶] ذکر شده است، روش اپسیلون-محدودیت هیچ نتیجه‌ای راجع به کارایی سره ندارد اما با افزودن متغیرهای کمکی به مسأله‌ی اپسیلون-محدودیت و تعریف مسئله مقید اصلاح شده، می‌توان شرایط لازم و کافی برای کارایی سره بدست آورد.

انگاو و وییسیک [۲۰] با استفاده از روش اپسیلون-محدودیت نتایجی راجع به جواب‌های تقریباً کارا و تقریباً کارای ضعیف ارایه دادند. با فرض این‌که $Y = f(X)$ کران‌دار باشد، با استفاده از مسأله اسکالرسازی P_k^{MD} غزنوی و همکاران [۳۰] شرایطی لازم و کافی برای جواب‌های تقریباً کارا (سره، ضعیف) بدست آوردند. در قضیه زیر تعدادی از شرایط کافی برای تقریباً کارایی (سره، ضعیف) آورده شده است. برای مشاهده نتایج بیشتر به [۳۰] مراجعه شود.

قضیه ۳-۳: مسأله چندهدفه MOP را در نظر بگیرید. فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_{\geqq}$ داده شده باشد و $\epsilon \le \varepsilon_k + \sum_{i \ne k} \mu_i \varepsilon_i$.

الف. اگر $(\hat{x},\hat{s})$ یک جواب ϵ-بهینه برای مسأله P_k^{MD} با $\mu_i \ge 0$، $i \ne k$ باشد، آنگاه $\hat{x} \in X_{\varepsilon WE}$.

ب. اگر $(\hat{x},\hat{s})$ یک جواب ϵ-بهینه اکید برای مسأله P_k^{MD} با $\mu_i > 0$، $i \ne k$ باشد، آنگاه $\hat{x} \in X_{\varepsilon E}$.

ج. اگر $(\hat{x},\hat{s})$ یک جواب ϵ-بهینه برای مسأله P_k^{MD} با $\mu_i > 0$، $i \ne k$ و $f_i(\hat{x}) + \hat{s}_i < \delta_i$، $i \ne k$ باشد، آنگاه $\hat{x} \in X_{\varepsilon PE}$.

قضیه زیر یک شرط لازم برای جواب‌های تقریباً کارای سره ارائه می‌دهد:

قضیه ۳-۴: فرض کنید $\hat{x}$ یک جواب تقریباً کارای سره برای مسأله چندهدفه MOP باشد. آن‌گاه، برای هر $k \in \{1,2,...,p\}$، بردارها و اسکالرهای δ، $\hat{s}$ و $\mu > 0$ وجود دارند، به طوری‌که $(\hat{x},\hat{s})$ یک جواب ϵ-بهینه برای مسأله P_k^{MD} با $\epsilon = \sum_{i \ne k} \mu_i \varepsilon_i + \varepsilon_k$ است.

۳-۳: روش اسکالرسازی مقید ترکیبی

روش اسکالرسازی مقید ترکیبی از ترکیب روش‌های مقید انعطاف پذیر و مقید اصلاح شده حاصل می‌شود [۳۶]. فرض کنید $k\in\{1,2,\dots,p\}$، δ_i و $\forall i\neq k$ یک کران بالا و همچنین (λ_i,μ_i) $\forall i\neq k$ وزن‌های نامنفی باشند. مسأله اسکالرسازی مقید ترکیبی به صورت زیر مدل می‌شود:

$$P_k^{comb}:\min f_k(x)-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^+ +\sum_{i\neq k}\mu_i s_i^-$$
$$s.t.\quad f_i(x)+s_i^+-s_i^-\leq\delta_i,\quad \forall i\neq k$$
$$x\in X.$$

در بخش بعدی با کمک مسأله اسکالرسازی P_k^{comb} شرایطی لازم و کافی برای جواب‌های تقریباً کارای (ضعیف، سره) یک مسأله MOP ارائه می‌شود. قابل ذکر است که برای بدست آوردن این شرایط لازم و کافی کراندار بودن $Y=f(X)$ نیاز نیست.

۴- شرایط لازم و کافی تقریباً کارایی

در این بخش قصد داریم روابط بین جواب‌های تقریباً کارای (ضعیف، سره) مسأله MOP و جواب‌های تقریباً بهینه روش اسکالرسازی P_k^{comb} که در بخش قبل معرفی شده است را بررسی کنیم.

در قضیه زیر یک شرط کافی برای بدست آوردن نقاط تقریباً کارای ضعیف مسأله MOP با کمک مسأله P_k^{comb} بدست می‌آوریم.

قضیه ۴-۱: فرض کنید $\varepsilon\in\mathbb{R}^p_{\geqq}$ داده شده باشد و $\epsilon\leq\varepsilon_k$. اگر $(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$ یک جواب $\epsilon-$بهینه برای مسأله P_k^{comb} با $(\lambda,\mu)\geqq 0$ باشد، آنگاه $\hat{x}\in X_{\varepsilon WE}$.

اثبات. فرض کنید $\hat{x}$ یک جواب تقریباً کارای ضعیف برای مسأله MOP نباشد. در این‌صورت $x\in X$ با $f(x)<f(\hat{x})-\varepsilon$ وجود دارد. چون $(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$ یک جواب $\epsilon-$بهینه برای مسأله P_k^{comb} با $(\lambda,\mu)\geqq 0$ است، پس، بنا بر قیود مساله‌ی اسکالرسازی ترکیبی، به ازای هر اندیس $i\neq k$ داریم:

$$f_i(x)+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^-+\varepsilon_i<$$
$$f_i(\hat{x})+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^-\leq\delta_i.$$

با قرار دادن $s_i^+=\hat{s}_i^++\varepsilon_i$ ، $\forall i\neq k$ می‌توان نوشت $f_i(x)+s_i^+-\hat{s}_i^-<\delta_i$، $\forall i\neq k$، در نتیجه $(x,s^+,\hat{s}^-)$ یک جواب شدنی برای مسأله P_k^{comb} است. اکنون، با توجه به اینکه $f(x)+\varepsilon<f(\hat{x})$ و $s_i^+\geq\hat{s}_i^+,\ \forall i\neq k$ لذا داریم:

$$f_k(x)+\varepsilon_k-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^+ +\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-<$$
$$f_k(\hat{x})-\sum_{i\neq k}\lambda_i\hat{s}_i^+ +\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-$$

می‌باشد. چون $\epsilon\leq\varepsilon_k$ نتیجه می‌شود

$$f_k(x)-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^+ +\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^- +\epsilon<$$
$$f_k(\hat{x})-\sum_{i\neq k}\lambda_i\hat{s}_i^+ +\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-.$$

معادله فوق با $\epsilon-$بهینه بودن $(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$ برای مسأله P_k^{comb} در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و لذا $\hat{x}\in X_{\varepsilon WE}$.

همان‌گونه که در قضیه فوق ثابت شد، با فرض آن‌که $(\lambda,\mu)\geqq 0$ می‌توان تقریباً کارایی ضعیف جواب $\epsilon-$بهینه مسأله P_k^{comb} را تضمین کرد. در قضیه زیر نشان می‌دهیم که فرض مثبت بودن (λ,μ)، تقریباً کارا بودن جواب ϵ -بهینه مسأله P_k^{comb} را تضمین می‌کند.

قضیه ۴-۲: فرض کنید $\varepsilon\in\mathbb{R}^p_{\geqq}$ داده شده باشد و $\epsilon\leq\varepsilon_k$. اگر $(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$ یک جواب $\epsilon-$بهینه برای مسأله P_k^{comb} با $(\lambda,\mu)>0$ باشد، آنگاه $\hat{x}\in X_{\varepsilon E}$.

اثبات. فرض کنید $\hat{x}$ یک جواب تقریباً کارا نباشد. در این‌صورت $x\in X$ وجود دارد به‌طوری‌که،

$$f_i(x)\leq f_i(\hat{x})-\varepsilon_i,\quad\forall i=1,2,\dots,p,$$

و حداقل یک اندیس $j\in\{1,2,\dots,p\}$ وجود دارد به طوری‌که،

$$f_j\left(x\right)<f_j\left(\hat{x}\right)-\varepsilon_j.$$

اکنون دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: فرض کنید $j=k$. لذا $f_k(x)<f_k(\hat{x})-\varepsilon_k$. از آن‌جایی که $\left(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-\right)$ یک جواب $\epsilon-$بهینه برای مسأله P_k^{comb} است، می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_i+f_i\left(x\right)+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^-\le$$
$$f_i\left(\hat{x}\right)+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^-\le\delta_i\quad\forall i\neq k,$$

با قرار دادن $s_i^+=\hat{s}_i^++\varepsilon_i,\forall i\neq k$ داریم:

$$f_i\left(x\right)+s_i^+-\hat{s}_i^-\le\delta_i.$$

در نتیجه $\left(x,s^+,\hat{s}^-\right)$ یک جواب شدنی برای مسأله P_k^{comb} است و برای اندیس $k\in\{1,2,\dots,p\}$ داریم

$$f_k\left(x\right)+\varepsilon_k-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-<$$
$$f_k\left(\hat{x}\right)-\sum_{i\neq k}\lambda_i\hat{s}_i^+-\sum_{i\neq k}\lambda_i\varepsilon_i+\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-.$$

چون $\sum_{i\neq k}\lambda_i\varepsilon_i\ge0$ است، لذا داریم

$$f_k\left(x\right)+\varepsilon_k-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-<$$
$$f_k\left(\hat{x}\right)-\sum_{i\neq k}\lambda_i\hat{s}_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-.$$

از طرفی چون $\epsilon\le\varepsilon_k$، می‌توان نوشت:

$$f_k\left(x\right)+\epsilon-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-<$$
$$f_k\left(\hat{x}\right)-\sum_{i\neq k}\lambda_i\hat{s}_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-.$$

بنابراین $\left(x,s^+,\hat{s}^-\right)$ یک جواب $\epsilon-$بهینه برای مسأله P_k^{comb} است که با $\epsilon-$بهینه بودن $\left(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-\right)$ در تناقض است.

حالت دوم: فرض کنید $j\neq k$. در این‌صورت از $f(x)\le f(\hat{x})-\varepsilon$ نتیجه می‌گیریم:

$$f_i\left(x\right)+\varepsilon_i+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^-\le$$
$$f_i\left(\hat{x}\right)+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^-\le\delta_i\quad\forall i\neq j,k,$$

و $\nu>0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f_j\left(x\right)+\varepsilon_j+\hat{s}_j^+-\hat{s}_j^-+\nu\le$$
$$f_j\left(\hat{x}\right)+\hat{s}_j^+-\hat{s}_j^-\le\delta_j.$$

در نتیجه اگر تعریف کنیم:

$$s_i^+=\begin{cases}\hat{s}_i^++\varepsilon_i,\forall i\neq j,k\\ \hat{s}_i^++\varepsilon_i+\nu,\ \forall i=j.\end{cases}$$

آن‌گاه $\left(x,s^+,\hat{s}^-\right)$ یک جواب شدنی برای مسأله P_k^{comb} است و مشابه با حالت اول می‌توان نشان داد که

$$f_k\left(x\right)+\epsilon-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-<$$
$$f_k\left(\hat{x}\right)-\sum_{i\neq k}\lambda_i\hat{s}_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-.$$

که با $\epsilon-$ بهینه بودن $\left(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-\right)$ در تناقض است.

ملاحظه ۴-۱: همان‌گونه که در قضیه فوق مشاهده می‌شود، برخلاف روش‌های مقید انعطاف پذیر و مقید اصلاح شده (قضیه‌های ۳-۱ و ۳-۳ را ببینید) برای اثبات تقریباً کارا بودن جواب $\hat{x}$، لزومی ندارد که $\left(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-\right)$ یک جواب $\epsilon-$بهینه اکید برای مسأله P_k^{comb} باشد.

قضیه ۴-۳: فرض کنید $\varepsilon\in\mathbb{R}^p_{\geqq}$ داده شده باشد و $\epsilon<\varepsilon_k$. اگر $\left(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-\right)$ یک جواب $\epsilon-$بهینه برای مسأله P_k^{comb} با $\left(\lambda,\mu\right)\ge0$ باشد، آنگاه $\hat{x}\in X_{\varepsilon E}$.

اثبات. مشابه با قضیه ۴-۲ اثبات می‌شود.

در قضیه زیر یک شرط لازم برای جواب‌های تقریباً کارای مسأله چندهدفه MOP ارائه می‌دهیم.

قضیه ۴-۴: فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_{\geqq}$ داده شده باشد و $\hat{x}$ یک جواب تقریباً کارا برای مسأله MOP باشد. در این صورت اندیس $k \in \{1,2,\dots,p\}$ و پارامترهای $(\lambda,\mu) \geqq 0$ و δ چنان وجود دارند به‌طوری‌که $(\hat{x},0,0)$ یک جواب $\epsilon-$بهینه برای مسأله P_k^{comb} با $\epsilon = \varepsilon_k$ است.

اثبات. فرض کنید (x,s^+,s^-) یک جواب شدنی برای مسأله P_k^{comb} باشد. چون $\hat{x} \in X_{\varepsilon E}$، پس حداقل یک اندیس $k \in \{1,2,\dots,p\}$ وجود دارد بطوریکه $f_k(\hat{x})-\varepsilon_k < f_k(x)$. با توجه به این‌که $\hat{s}_i^+ = 0$ و $\hat{s}_i^- = 0$، به ازای هر اندیس $i \neq k$ قرار می‌دهیم $\lambda_i = 0, \mu_i \to \infty$، و $\delta_i = f_i(\hat{x})$. به‌وضوح $(\hat{x},0,0)$ یک جواب شدنی برای مسأله P_k^{comb} است.

از طرفی چون $f_k(\hat{x})-\varepsilon_k < f_k(x)$ داریم:

$$f_k(\hat{x})-\varepsilon_k-\sum_{i\neq k}\lambda_i\hat{s}_i^+ +\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^- < f_k(x)-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^+ +\sum_{i\neq k}\mu_i s_i^-,$$

و این یعنی

$$f_k(\hat{x})-\sum_{i\neq k}\lambda_i\hat{s}_i^+ +\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^- < f_k(x)-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^+ +\sum_{i\neq k}\mu_i s_i^- +\epsilon.$$

لذا $(\hat{x},0,0)$ یک جواب $\epsilon-$بهینه برای مسأله P_k^{comb} است.

علاوه بر بیان شرایط لازم و کافی برای تولید نقاط تقریباً کارا (ضعیف) برای مسأله MOP، در ادامه قصد داریم شرایطی لازم و کافی برای نقاط تقریباً کارای سره به دست آوریم.

در قضیه زیر یک شرط کافی برای به‌دست آوردن نقاط تقریباً کارای سره مطرح می‌کنیم.

قضیه ۴-۵: فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_{>}$ داده شده باشد و $\epsilon \leq \varepsilon_k$. اگر $(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$ یک جواب $\epsilon-$بهینه برای مسأله P_k^{comb} با $(\lambda,\mu)>0$ باشد، آنگاه $\hat{x} \in X_{\varepsilon PE}$.

اثبات. طبق قضیه ۴-۲، $\hat{x}$ یک جواب تقریباً کارا برای مسأله MOP است. فرض کنید $\hat{x} \notin X_{\varepsilon PE}$. در این صورت برای هر عدد حقیقی و مثبت M، متغیر شدنی $x \in X$ و اندیس $i \in \{1,2,\dots,p\}$ با $f_i(x) < f_i(\hat{x})-\varepsilon_i$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر اندیس $j \neq i$ با $f_j(\hat{x}) < f_j(x)+\varepsilon_j$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{f_i(\hat{x})-f_i(x)-\varepsilon_i}{f_j(x)-f_j(\hat{x})+\varepsilon_j} > M. \qquad (۱)$$

از آنجایی که $(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$ یک جواب $\epsilon-$بهینه برای مسأله P_k^{comb} است، داریم

$$f_i(\hat{x})+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^- \leq \delta_i, \quad \forall i \neq k. \qquad (۲)$$

برای هر اندیس $j \neq k$ با $f_j(\hat{x}) < f_j(x)+\varepsilon_j$، با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌شود:

$$f_j(x)-f_j(\hat{x})+\varepsilon_j < \frac{f_i(\hat{x})-f_i(x)-\varepsilon_i}{M}. \qquad (۳)$$

با قرار دادن $d = f_i(\hat{x})-f_i(x)-\varepsilon_i > 0$، از رابطه فوق نتیجه می‌گیریم:

$$f_j(x)+\varepsilon_j-\frac{d}{M} < f_j(\hat{x}) \leq \delta_j-\hat{s}_j^+ +\hat{s}_j^-. \qquad (۴)$$

و با کمک رابطه (۴) می‌توان نتیجه گرفت

$$f_j(x)+\varepsilon_j+\hat{s}_j^+ -\hat{s}_j^- -\frac{d}{M} < \delta_j. \qquad (۵)$$

تعریف می‌کنیم

$$A = \{j : f_j(\hat{x}) < f_j(x)+\varepsilon_j\},$$

و همچنین تعریف می‌کنیم:

$$M = \frac{d(1+|A|\mu_{max})}{\min_{i\neq k}\{\lambda_i\varepsilon_i\}}.$$

حال برای هر اندیس $i \in \{1,2,\dots,p\} \setminus \{A \cup \{k\}\}$ داریم:

$$f_i(x)+\varepsilon_i \le f_i(\hat{x}).$$

بنابراین طبق رابطه (۲) داریم:

$$\begin{aligned} &f_i(x)+\varepsilon_i+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^- \le \\ &f_i(\hat{x})+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^- \le \delta_i. \end{aligned} \tag{۶}$$

برای هر اندیس $i \in \{1,2,\dots,p\} \setminus \{k\}$ تعریف می‌کنیم:

$$s_i^+ = \hat{s}_i^+ + \varepsilon_i, \tag{۷}$$

و همچنین

$$s_i^- = \begin{cases} \hat{s}_i^- + \dfrac{d}{M} & i \in A \\ \hat{s}_i^- & i \notin A. \end{cases} \tag{۸}$$

طبق تعاریف فوق و روابط (۵) و (۶)، (x, s^+, s^-) یک جواب شدنی برای مسأله P_k^{comb} است.

اثبات را با بررسی دو حالت زیر ادامه می‌دهیم

۱. فرض کنید $k \in A$. در این صورت بنا به رابطه (۴) داریم $f_k(x) < \frac{d}{M} + f_k(\hat{x}) - \varepsilon_k$. بنابراین با استفاده از روابط (۷) و (۸) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &f_k(x) - \sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^+ + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i^- < \\ &f_k(\hat{x}) + \frac{d}{M} - \varepsilon_k - \sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^+ + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i^- \\ &= f_k(\hat{x}) - \sum_{i\neq k}\lambda_i \hat{s}_i^+ + \sum_{i\neq k}\mu_i \hat{s}_i^- - \varepsilon_k \\ &-\sum_{i\neq k}\lambda_i\varepsilon_i + \left(1 + \sum_{\substack{i\in A\\ i\neq k}}\mu_i\right)\frac{d}{M}. \end{aligned}$$

با توجه به تعریف M و $\epsilon = \varepsilon_k$ داریم

$$\begin{aligned} &f_k(x) + \epsilon - \sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^+ + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i^- < \\ &f_k(\hat{x}) - \sum_{i\neq k}\lambda_i \hat{s}_i^+ + \sum_{i\neq k}\mu_i \hat{s}_i^-. \end{aligned}$$

عبارت فوق با $\epsilon-$ بهینه بودن $(\hat{x}, \hat{s}^+, \hat{s}^-)$ در تناقض است.

۲. فرض کنید $k \notin A$. در این صورت $f_k(x) \le f_k(\hat{x}) - \varepsilon_k$. لذا داریم

$$\begin{aligned} &f_k(x) - \sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^+ + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i^- < \\ &f_k(\hat{x}) - \varepsilon_k - \sum_{i\neq k}\lambda_i \hat{s}_i^+ + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i^- \\ &-\sum_{i\neq k}\lambda_i\varepsilon_i = f_k(\hat{x}) - \sum_{i\neq k}\lambda_i \hat{s}_i^+ + \\ &\sum_{i\neq k}\mu_i \hat{s}_i^- - \varepsilon_k - \sum_{i\neq k}\lambda_i\varepsilon_i + \sum_{\substack{i\in A\\ i\neq k}}\mu_i \frac{d}{M}. \end{aligned}$$

حال با توجه به این‌که $\epsilon = \varepsilon_k$، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} &f_k(x) + \epsilon - \sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^+ + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i^- < \\ &f_k(\hat{x}) - \sum_{i\neq k}\lambda_i \hat{s}_i^+ + \sum_{i\neq k}\mu_i \hat{s}_i^-. \end{aligned}$$

بنابراین به تناقض می‌رسیم و حکم برقرار است.

ملاحظه ۴-۲: همان‌گونه که در قضیه فوق مشاهده می‌شود، برخلاف روش‌های مقید انعطاف‌پذیر و مقید اصلاح شده (قضایای ۳-۱ و ۳-۳ را ببینید)، برای اثبات تقریباً کارایی سره‌ی جواب‌های $\epsilon-$بهینه مسأله مقید ترکیبی P_k^{comb}، لزومی ندارد که در جواب $\epsilon-$بهینه متغیرهای کمکی مثبت باشند یا قیدها به صورت اکید برقرار باشند. به علاوه، بر خلاف نتایج بدست آمده در [۲۹و۳۰و۳۶]، برای اثبات قضیه ۴-۵، کراندار بودن $Y=f(X)$ الزامی نیست.

در قضیه زیر یک شرط لازم برای جواب‌های تقریباً کارای سره ارائه می‌دهیم. توجه شود که بر خلاف نتایج به‌دست آمده از روش مجموع وزن‌دار شده [۲۸]، این قضیه در حالت کلی برقرار است و شرط محدب بودن توابع هدف نیاز نیست.

قضیه ۴-۶: فرض کنید $\hat{x} \in X_{\varepsilon PE}$. در این صورت $(\lambda, \mu) \geqq 0$، δ، $\hat{s}^-$ و $\hat{s}^+$ چنان وجود دارند که به

ازای هر اندیس $k\in\{1,2,\dots,p\}$، $\left(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-\right)$ یک جواب ϵ−بهینه برای مسأله P_k^{comb} با $\epsilon=\sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i+\varepsilon_k$ است.

اثبات. ابتدا برای هر اندیس $i\neq k$، قرار می‌دهیم $\lambda_i=0$، $\hat{s}_i^+=0$ و $\hat{s}_i^-=\varepsilon_i$. بوضوح $\left(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-\right)$ یک جواب شدنی برای مسأله P_k^{comb} با $\delta=f\left(\hat{x}\right)-\varepsilon$ است. فرض کنید $\left(x,s^+,s^-\right)$ یک جواب شدنی دلخواه برای مسأله P_k^{comb} باشد. با توجه به تابع هدف و محدودیت‌های مسأله P_k^{comb}، متغیرهای s_i^- را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_i^-=\max\left\{0,f_i\left(x\right)-\delta_i+s_i^+\right\}.$$

ادعا می‌کنیم $\left(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-\right)$ به ازای هر اندیس $k\in\{1,2,\dots,p\}$، یک جواب ϵ−بهینه برای مسأله P_k^{comb} است. برای اثبات این ادعا نشان می‌دهیم

$$f_k\left(\hat{x}\right)-\sum_{i\neq k}\lambda_i\hat{s}_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-\le f_k\left(x\right)-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i s_i^-+\epsilon.$$

برای اثبات رابطه بالا دو حالت ممکن زیر را در نظر می‌گیریم.

۱. فرض کنید $f_k\left(\hat{x}\right)-\varepsilon_k\le f_k\left(x\right)$. در این‌صورت چون برای هر اندیس $i\neq k$، $\lambda_i=0$، برای هر $\mu\ge 0$ داریم:

$$f_k\left(\hat{x}\right)-\sum_{i\neq k}\lambda_i\hat{s}_i^+-\varepsilon_k\le f_k\left(x\right)-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i s_i^-.$$

با توجه به تعریف $\epsilon=\sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i+\varepsilon_k$ و برای هر $i\neq k$، $\hat{s}_i^-=\varepsilon_i$ برای هر $\mu\ge 0$ داریم:

$$f_k\left(\hat{x}\right)-\sum_{i\neq k}\lambda_i\hat{s}_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-\le f_k\left(x\right)-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i s_i^-+\epsilon.$$

۲. فرض کنید $f_k\left(x\right)<f_k\left(\hat{x}\right)-\varepsilon_k$. از آنجایی که $\hat{x}\in X_{\varepsilon PE}$، بنابراین یک عدد حقیقی و مثبت M و یک اندیس $j\neq k$ با $f_j\left(\hat{x}\right)-\varepsilon_j<f_j\left(x\right)$ وجود دارند بطوریکه:

$$\frac{f_k\left(\hat{x}\right)-f_k\left(x\right)-\varepsilon_k}{f_j\left(x\right)-f_j\left(\hat{x}\right)+\varepsilon_j}<M.$$

چون $\hat{x}\in X_{\varepsilon E}$، مجموعه ناتهی I را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I=\left\{i\neq k:f_i\left(\hat{x}\right)-\varepsilon_i<f_i\left(x\right)\right\}.$$

پارامترهای μ_i را به صورت $M\le\mu_i<\infty$ در نظر می‌گیریم. لذا داریم:

$$f_k\left(x\right)+\sum_{i\neq k}\mu_i s_i^-\ge f_k\left(x\right)+\sum_{i\neq k}Ms_i^-.$$

برای هر اندیس $j\in I$، چون M یک عدد حقیقی مثبت است و $s^-\geqq 0$، بنا به تعریف s_j^- نتیجه می‌گیریم:

$$f_k\left(x\right)+\sum_{i\neq k}\mu_i s_i^-\ge f_k\left(x\right)+Ms_j^-\ge f_k\left(x\right)+M\left(f_j\left(x\right)-f_j\left(\hat{x}\right)+\varepsilon_j+s_j^+\right).$$

چون $Ms_j^+\ge 0$ داریم

$$f_k\left(x\right)+\sum_{i\neq k}\mu_i s_i^-\ge f_k\left(x\right)+\frac{f_k\left(\hat{x}\right)-f_k\left(x\right)-\varepsilon_k}{f_j\left(x\right)-f_j\left(\hat{x}\right)+\varepsilon_j}.\left(f_j\left(x\right)-f_j\left(\hat{x}\right)+\varepsilon_j\right),$$

با توجه به تعریف $\epsilon=\sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i+\varepsilon_k$ و $\hat{s}^-=\varepsilon$ و از آنجایی که پارامتر $\lambda=0$ درنظر گرفته شده است، نتیجه می‌شود:

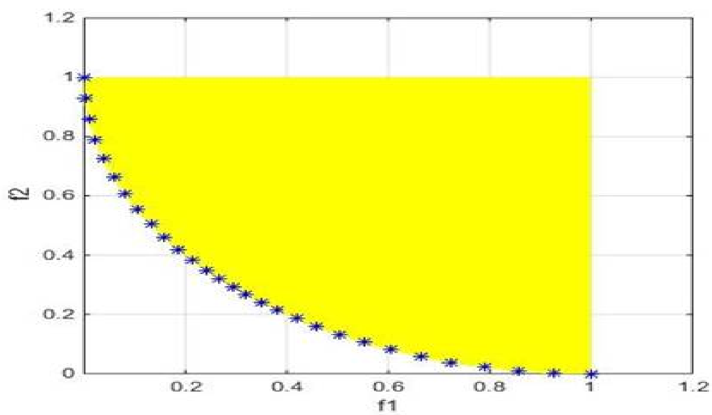
$$f_k\left(\hat{x}\right)-\sum_{i\neq k}\lambda_i\hat{s}_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i^-\le f_k\left(x\right)-\sum_{i\neq k}\lambda_i s_i^++\sum_{i\neq k}\mu_i s_i^-+\epsilon.$$

با توجه به دو حالت اثبات شده بالا حکم برقرار است.

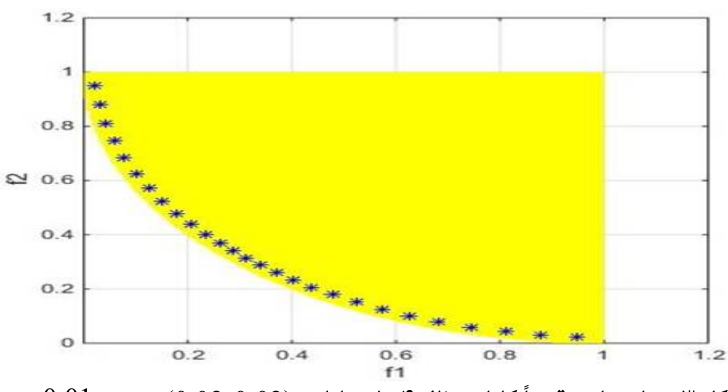
مثال ۴-۱: مسأله بهینه سازی غیرخطی دوهدفه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}&\min f(x)=(x_1,x_2)\\ &s.t.\ (x_1-1)^2+(x_2-1)^2\le 1\\ &\qquad x_1,x_2\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

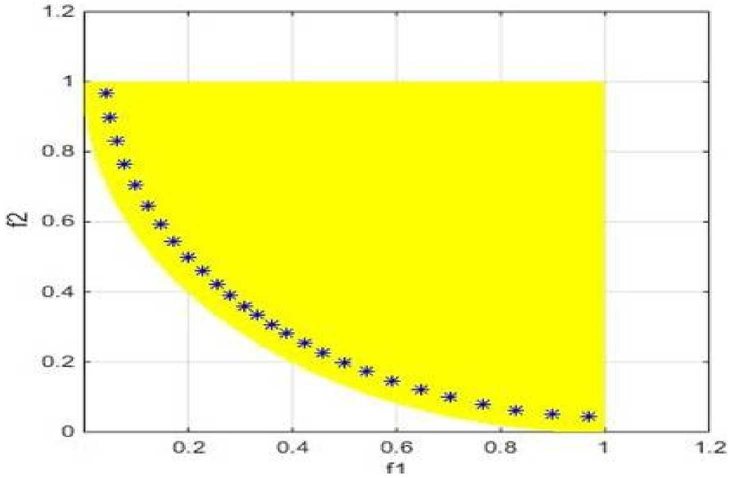
ابتدا مرز پارتو مسأله فوق را با کمک روش اسکالرسازی مقید ترکیبی P_k^{comb} بدست می‌آوریم. برای این منظور فرض می‌کنیم $k=1$. برای پیدا کردن مرز پارتو از الگوریتم ۷ در مرجع [۳۷] استفاده می‌کنیم با این تفاوت که در مرحله ۴ آن الگوریتم به جای مسأله اسکالرسازی پاسکلتی-سرافینی [۵] از مسأله اسکالرسازی P_k^{comb} استفاده می‌کنیم. بعد از ۳۰ تکرار و به ازای مقادیر مختلف وزن‌ها در تابع هدف، مرز پارتو به‌صورت شکل ۲ خواهد بود. اکنون فرض کنید $\varepsilon=(0.02,0.02)$ داده شده باشد. می‌خواهیم مجموعه جواب‌های تقریباً کارای مسأله دوهدفه فوق را با کمک روش مقید ترکیبی بیابیم. بنا به قضیه ۴-۲، جواب‌های $\epsilon-$بهینه مسأله تک هدفه P_k^{comb} با $\epsilon\le\varepsilon_k$ و $(\lambda,\mu)>0$ همان جواب‌های تقریباً کارای مسأله فوق هستند. ابتدا فرض می‌کنیم $\epsilon=0.01\le\varepsilon_1$. با حل مسأله تک‌هدفه مقید ترکیبی با کمک الگوریتم ۷ در مرجع [۳۷] جواب‌های تقریباً کارای مسأله دوهدفه فوق به صورت شکل ۳ خواهند بود. حال فرض کنید $\epsilon=0.02\le\varepsilon_1$. در این حالت، جواب‌های تقریباً کارای مسأله دوهدفه فوق به صورت شکل ۴ خواهند بود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار ϵ، فاصله نقاط تقریباً کارای مسأله دوهدفه از مرز پارتو افزایش خواهد یافت و کیفیت جواب‌های بدست آمده کاهش می‌یابد.



شکل ۲. مرز پارتو مسأله مثال ۴-۱



شکل ۳. جواب‌های تقریباً کارای مثال ۴-۱ به ازای $\varepsilon=(0.02,0.02)$ و $\epsilon=0.01$.



شکل ۴. جواب‌های تقریباً کارای مثال ۴-۱ به ازای $\varepsilon=(0.02,0.02)$ **و** $\epsilon=0.02$.

نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا مسأله اسکالرسازی مقید ترکیبی را معرفی کردیم. سپس با درنظر گرفتن روابط بین $\varepsilon\in\mathbb{R}^p_{\geqq}$ و $\epsilon\in\mathbb{R}_{\geq}$، و با کمک مسأله تک‌هدفه P_k^{comb} شرایط کافی برای تولید جواب‌های تقریباً کارای سره و ضعیف و شرایط لازم برای تولید جواب‌های تقریبا کارای سره بدست آوردیم. برتری نتایج حاصل را نسبت به نتایج بدست امده از روش‌های مقید انعطاف‌پذیر، مقید اصلاح شده و مجموع وزن‌دار شده بیان کردیم. تمام قضایای اثبات شده بدون هیچ شرط تحدبی برقرار هستند و به علاوه برای مسائل چندهدفه با فضای هدف بی‌کران نیز برقرار هستند. در جدول (۱)، نتایج به‌دست امده به‌طور خلاصه آورده شده است.

به هرحال در این مقاله، از مخروط $\mathbb{R}^p_{\geqq}$ به عنوان مخروط ترتیبی استفاده کردیم. در کارهای آینده، توسعه این نتایج برای یک مخروط محدب دلخواه را بررسی خواهیم کرد. به‌علاوه، دنبال پیدا کردن یک فرایند الگوریتمی برای به‌دست آوردن نقاط تقریبا کارا هستیم.

جدول (۱). خلاصه نتایج بدست آمده برای مسأله P_k^{comb}

مرجع	نتیجه	پارامترها	شرایط	نتایج
قضیه ۴-۱	شرط کافی	$(\lambda,\mu)\geqq 0$	$\epsilon\le\varepsilon_k$	$\epsilon-$ بهینگی ← $\varepsilon-$ کارایی ضعیف
قضیه ۴-2	شرط کافی	$(\lambda,\mu)>0$	$\epsilon\le\varepsilon_k,\varepsilon\in\mathbb{R}^p_{>}$	$\epsilon-$ بهینگی ← $\varepsilon-$ کارایی
قضیه ۴-۳	شرط کافی	$(\lambda,\mu)\ge 0$	$\epsilon<\varepsilon_k,\varepsilon\in\mathbb{R}^p_{\geqq}$	$\epsilon-$ بهینگی ← $\varepsilon-$ کارایی
قضیه ۴-۵	شرط کافی	$(\lambda,\mu)>0$	$\epsilon\le\varepsilon_k,\varepsilon\in\mathbb{R}^p_{>}$	$\epsilon-$ بهینگی ← $\varepsilon-$ کارایی سره
قضیه ۴-۴	شرط لازم	$\lambda_i=0,\ \mu_i=\infty,$ $\hat{s}_i^+=0,\ \hat{s}_i^-=0,\ \forall i$	$\epsilon=\varepsilon_k;\exists k$	$\varepsilon-$ کارایی ← $\epsilon-$ بهینگی
قضیه ۴-۶	شرط لازم	$\lambda_i=0,\ \mu_i=\infty,$ $\hat{s}_i^+=0,\ \hat{s}_i^-=0,\ \forall i$	$\epsilon=\sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i+\varepsilon_k;\forall k$	$\varepsilon-$ کارایی سره ← $\epsilon-$ بهینگی

فهرست منابع

[1] Shao, L., Ehrgott, M. (2008). Approximately solving multiobjective linear programmes in objective space and an application in radiotherapy treatment planning, Mathematical Methods of Operations Research, 68, 257-276.

[2] Shao, L., Ehrgott, M. (2008). Approximating the nondominated set of an MOLP by approximately solving its dual problem, Mathematical Methods of Operations Research, 68, 469–492.

[3] Ehrgott, M., Holder, A. (2017). Operations research methods for optimization in radiation oncology, Journal of Radiation Oncology Informatics, 6(1), 1-41

[4] Drake, J.H., Starkey, A., Owusu, G., Burke, E.K. (2020). Multiobjective evolutionary algorithms for strategic deployment of resources in operational units, European Journal of Operational Research, 282(2), 729-740.

[5] Eichfelder, G. (2008). Adaptive Scalarization Methods in Multiobjective Optimization. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[6] Soylu, B., Katip, K. (2019). A multiobjective hub-airport location problem for an airline network design, European Journal of Operational Research, 277(2), 412-425.

[7] Soleimani-damaneh, M. (2011). An optimization modelling for string selection in molecular biology using Pareto optimality, Applied Mathematical Modelling, 35, 3887-3892.

[8] Soleimani-damaneh, M. (2011). On some multiobjective optimization problems arising in biology, International Journal of Computer Mathematics, 88, 1103–1119.

[9] Shi, J., Song, J., Song, B., Lu, W.F. (2019). Multi-objective optimization design through machine learning for drop-on-demand bioprinting, Engineering, 5(3), 586-593.

[10] Edgeworth, F.Y. (1881). Mathematical Psychics, Kegan Paul, London.

[11] Pareto, V. (1964). Course dEconomics Politique, Libraire Droze, Geven.

[12] Ehrgott, M. (2005). Multicriteria Optimization, Berlin: Springer.

[13] Jahn, J. (2004). Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

[14] Miettinen, K. (1999). Nonlinear Multiobjective Optimization, Kluwer Academic Pablishers, Dordrecht.

[15] Akbari, F., Ghaznavi, M., Khorram, E. (2018). A revised Pascoletti-Serafini scalarization method form multiobjective optimization problems, Journal of Optimization Theory and Applications, 178(2), 560-590.

[16] Ghaznavi, M., Akbari, F., Khorram, E. (2019). Optimality conditions via a unified direction approach for (approximate) efficiency in multiobjective optimization, Optimization Methods and Software, In press, 1-26.

[17] Kutateladze, S.S. (1979). Convex ε-programming, Soviet Mathematics-Doklady, 20, 391–393.

[18] Loridan, P. (1984). ε-solutions in vector minimization problems, Journal of Optimization Theory and Applications, 43 (2), 265–276.

[19] White, D.J. (1986). Epsilon efficiency, Journal of Optimization Theory and Applications, 49 (2), 319–337.

[20] Engau, A. and Wiecek, M.M. (2007). Generating epsilon-efficient solutions in multi-objective programming, European Journal of Operational Research, 177, 1566–1579.

[21] Gutierrez, C., Jimenez, B., Novo,V. (2006). A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems, SIAM Journal on Optimization, 17, 688-710.

[22] Gutierrez, C., Jimenez, B., Novo,V. (2010). Optimality conditions via scalarization for a new ε-efficiency concept in vector optimization problems, European Journal of Operational Research, 201, 11-22.

[23] Chuong, T.D., Kim, D.S. (2015). Approximate solutions of multiobjective optimization problems, Positivity, 20(1) (2015) 187-207.

[24] Fakhar, M., Mahyarinia, M.R., Zafarani, J. (2019). On approximate solutions for nonsmooth robust multiobjective optimization problems, Optimization, 68, 1653-1683.

[25] Hong, Z., Piao, G., Kim, D.S. (2019). On approximate solutions of nondifferentiable vector optimization problems with cone-convex objectives, Optimization Letters, 13, 891–906.

[26] Kim, D.S., Son, T.Q. (2018). An Approach to ϵ-duality Theorems for Nonconvex Semi-infinite Multiobjective optimization Problems, Taiwanese Journal of Mathematics, 22(5), 1261-1287.

[27] Li, Z., Wang, S. (1998). ε-approximation solutions in multiobjective optimization, Optimization, 44, 161–174.

[28] Liu, J.C. (1999). ε-properly efficient solutions to nondifferentiable multi-objective programming problems, Applied Mathematics Letters, 12, 109–113.

[29] Ghaznavi-ghosoni, B.A., Khorram, E. (2011). On approximating weakly/properly efficient solutions in multi-objective programming, Mathematical and Computer Modelling, 54 (11), 3172-3181.

[30] Ghaznavi-ghosoni, B.A., Khorram, E., Soleimani-damaneh, M. (2013). Scalarization for characterization of approximate strong/ weak/ proper efficiency in multi-objective optimization, Optimization, 62 (6), 703-720.

[31] Khaledian, K., Khorram, E., Karimi, B. (2014). Characterizing ε-Properly Efficient Solutions, Optimization Methods and Software, 30, 583 – 593.

[32] Rastegar, N., Khorram, E. (2014). A combined scalarizing method for multiobjective programming problems, European Journal of Operational Research, 236(1), 229-237.

[33] Ghaznavi, M. (2017). Optimality conditions via scalarization for approximate quasi efficiency in multiobjective optimization, Filomat, 31 (3) (2017) 671-680.

[34] Gao, Y., Xu, Z. (2019). Approximate proper efficiency for multiobjective optimization problems, Filomat, 33(18), 6091–6101.

[35] Geoffrion, A. (1968). Proper efficiency and the theory of vector

maximization, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 22(3) (1968) 618-630.

[36] Ehrgott, M., Ruzika, S. (2008). Improved ε-constraint method for multi-objective programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 138, 375–396.

[37] Rizvi, M.M. (2013). New optimality conditions for non-linear multiobjective optimization problems and new scalarization techniques for constructing pathological Pareto fronts. Ph.D. thesis, University of South Australia