دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره بیست و نهم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

نتایج وجودی یک رده مسائل بیضوی مرتبه چهارم با شرایط مرزی رابین

عطیه رمضان نیا جلالی[1]، قاسم علیزاده افروزی[2*]

(۱و۲) دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۰۶   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۲۹

چکیده

در این مقاله شرایط کافی برای وجود حداقل دو جواب ضعیف برای یک مسئله بیضوی مرتبه چهارم با شرایط مرزی رابین بررسی می‌شود. تجزیه و تحلیل ما به طور کلی به بحث‌های تغییراتی مبتنی بر قضیه گذرگاه کوهی و بعضی از نظریه‌های اخیر بر روی فضای سوبولف-لبگ تعمیم یافته می‌باشد. نقطه شروع کارمان مقاله [۳] می‌باشد که نویسنده مسئله (۱) را با شرایط مرزی نویر بررسی نمود. در این مقاله وجود حداقل دو جواب ضعیف نابدیهی برای مسئله (۱) با شرایط مرزی را بین تضمین می‌شود. به‌طور دقیق‌تر ما با به کارگیری قضیه گذرگاه کوهی امبرستی و رابین ویتز و تحت شرایط مناسب نشان می‌دهیم که یک عدد مثبت λ_* وجود دارد به طوری که مسئله (۱) دارای حداقل دو جواب ضعیف غیربدیهی است.

واژه‌های کلیدی: نظریه گذرگاه کوهی، فضای سوبولف با توان متغیر، عملگر مرتبه چهارم، جادهی فشرده.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:afrouzi@umz.ac.ir

۱- مقدمه

هدف از این مقاله بررسی وجود جواب برای مسئله بیضوی مرتبه چهارم تحت شرایط مرزی زیر است

$$\begin{cases} \Delta^2_{p(x)}u = \lambda|u|^{q(x)-2} & \Omega\text{در} \\ |\Delta u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial v} + m(u)|u|^{p(x)-2}u = 0 & \partial\Omega\text{روی} \end{cases} \quad (۱)$$

که $\Omega \subset R^N$ و $\frac{\partial u}{\partial v}$ یک یکه نرمال خارجی مشتق روی $\partial\Omega$ می‌باشد. λ یک پارامتر مثبت، $m \in L^\infty$ و $essinf_{x\in\Omega}m(x) = m_0 > 0$. همچنین توابع پیوسته $p, q: \overline{\Omega} \to R$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$1 < p^- = \min_{x\in\Omega} p(x) \le p(x) \le p^+ = \max_{x\in\Omega} p(x) < \infty$$

و $\Delta^2_{p(x)}u := \Delta(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u)$ یک عملگر مرتبه چهارم است که عملگر $p(x)$ بی‌هارمونیک نامیده می‌شود و تعمیمی از عملگر p بی‌هارمونیک می‌باشد. خواننده برای مطالعه کاربردهایی از مسائل عملگر $p(x)$ بی‌هارمونیک می‌تواند به مقالات [۱، ۲، ۳، ۵، ۷، ۸، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۱] رجوع نماید. مسائل تغییراتی و معادلات دیفرانسیل از جمله مسائلی هستند که در زمینه‌های مختلف علوم پدیدار شده و به واسطه‌ی تحقیقات فراوان تعمیم یافته است. معادلات دیفرانسیل در طیف گسترده‌ای در هر دو علوم ریاضی هم محض و هم کاربردی رخ می‌دهد.

۲- پیشینه تحقیق

در سال‌های اخیر معادلات دیفرانسیل مرتبه چهارم در فیزیک ریاضیات نمود فراوان یافته است. از جمله این کاربردها می‌توان به سیستم‌های مکانیکی میکروالکترو، نظریه فیلم نازک، انتشار سطح روی جامدات، جریان در سلول‌های هل–شاوو سیستم‌های چندفازی اشاره کرد. [۱۲، ۲۲] اهمیت بررسی اینگونه معادلات به دلیل توجیه بسیاری از نمونه‌های فیزیکی با استفاده از مدلسازی ریاضی می‌باشد که بیشتر در زمینه مایعات نیوتنی و مکانیک آلاستیک به ویژه مایعات الکتروشناسی (مایعات هوشمند) قابل رویت است. برای جزئیات بیشتر به مقالات [۱۳، ۲۳] مراجعه نمایید.
مسئله زیر با شرایط مرزی نویر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \Delta^2_{p(x)}u = \lambda|u|^{q(x)-2} & \Omega\text{در} \\ u = \Delta u = 0 & \partial\Omega\text{روی} \end{cases} \quad (۲)$$

که در آن $\Omega \subset R^N$ یک دامنه کران دار با مرز هموار، λ یک عدد حقیقی مثبت و p, q توابع پیوسته روی $\overline{\Omega}$ می‌باشد. در مقاله [۳] نویسنده به کمک قضیه گذرگاه کوهی و نابرابری اکلند توانست وجود جواب را برای مسئله (۲) ثابت نماید. در سال ۲۰۰۹ همین مسئله در حالتی که $p(x) = q(x)$ باشد توسط آیوجیل و امروس مورد بررسی قرار گرفت. انگیزه اصلی ما در این مقاله بررسی وجود جواب برای مسئله (۱) با شرایط مرزی رابین می‌باشد. ما مقاله را با بیان مفاهیم پایه‌ای و خواص فضای سوبولف تعمیم یافته در بخش سوم آغاز می کنیم و در ادامه نتایج اصلی مطرح می‌شود. در این بخش با استفاده از قضیه گذرگاه کوهی کلاسیک از امبرستی و رابین ویتز در ([۱۷]) وجود حداقل دو جواب ضعیف برای مسئله (۱) تضمین می‌شود.

۳- روش حل معادله

در این بخش ما بعضی مفاهیم و نتایج اصلی از فضای سوبولف – لبگ با توان متغیر را یادآوری می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر و دقیق‌تر می‌توان به مقالات [۹،۱۹] رجوع نمود.
فضای لبگ تعمیم یافته یک فضای باناخ انعکاسی و تفکیک پذیر است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u: \Omega \to R\ , \text{و اندازه پذیر}\ \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx < \infty\}$$

که در آن $p(x) \in C_+(\Omega)$ و برای هر $x \in \Omega$ ،

$$C_+(\overline{\Omega}) := \{p \in C(\overline{\Omega}) \ : \ p(x) > 1\}.$$

این فضا مجهز به نرم زیر است و با نام لوکسمبرگ معرفی می‌گردد.

$$|u|_{p(x)} = \inf\{\mu : \int_\Omega |\frac{u(x)}{\mu}|^{p(x)} \le 1\}$$

فضای مزدوج $L^{p(x)}$، $L^{q(x)}$ می‌باشد که در آن $q(x)$ مزدوج تابع $p(x)$ است. بدان معنا که برای هر $x \in \Omega$،

$$\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{p(x)} = 1.$$

بعلاوه برای هر $u \in L^{p(x)}$ و $v \in L^{q(x)}$ نابرابری هولدر را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$|\int_\Omega u(x)v(x)dx \leq (\frac{1}{p^-}+\frac{1}{q^-}) |u|_{p(x)}|v|_{q(x)}$$

فضای سوبولف با توان متغیر را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$W^{k,p(x)}(\Omega)=\{u \in L^{p(x)} : D^\alpha u \in L^{p(x)}(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

که

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}$$ با $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ و $|\alpha|=\sum_{i=1}^N \alpha_i$.

و نرم زیر را برای فضای $W^{k,p(x)}(\Omega)$ در نظر می‌گیریم:

$$\| u \|_{k,p(x)}=\sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u|_{p(x)}$$

با این نرم فضای $W^{k,p(x)}(\Omega)$ یک فضای باناخ انعکاسی و تفکیک‌پذیر است. با تعریف توان بحرانی به صورت

$$p_k^*(x)=\begin{cases}\frac{Np(x)}{N-kp(x)} & \text{اگر } kp(x)<N\\ \infty & \text{اگر } kp(x)\geq N\end{cases}$$

به آسانی می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $x \in \overline{\Omega}$، $p(x) < p_k^*(x)$. همچنین می‌توان یادآوری کرد که $W_0^{k,p(x)}$ بستار C_0^∞ در فضای $W^{k,p(x)}$ می‌باشد.

گزاره ۳-۱. [8] (۱) برای هر $p,q \in C_+(\overline{\Omega})$ بطوری که برای هر $x \in \overline{\Omega}$، $q(x) \leq p_k^*(x)$ آنگاه یک جاددهی پیوسته $W^{k,p(x)} \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ وجود دارد. همچنین اگر $\leq$ با $>$ جایگزین شود یک جادهی فشرده خواهیم داشت.

(۲) نامساوی پوانکاره برای هر $u \in W^{k,p}$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$\exists C_p > 0 \quad : \quad |u|_{p(x)} \leq C_p |\nabla u|_{p(x)}$$

(۳) فرض کنید که $d\sigma$ یک اندازه روی $\partial\Omega$ باشد و تعریف می‌کنیم:

$$\rho_m(u)=\int_\Omega |\triangle u|^{p(x)}dx + \int_{\partial\Omega} m(x)|u|^{p(x)}d\sigma$$

در این صورت نرم زیر را خواهیم داشت

$$\| u \|_m = \inf\{\mu > 0 \quad : \quad \rho(\frac{u}{\mu}) \leq 1\}$$

قابل ذکر است که نرم‌های $\|.\|_m$، $\|.\|_{2,p(x)}$ و $|\triangle .|_{p(x)}$ با هم معادلند.

گزاره ۳-۲. [۴] با درنظرگرفتن $\rho_m(u)$ برای هر $u \in$ ، روابط زیر نتیجه می‌شود:

(۱) اگر $\| u \|_m \geq 1$ آنگاه

$$\| u \|_m^{p^-} \leq \rho_m(u) \leq \| u \|_m^{p^+}$$

(۲) اگر $\| u \|_m \leq 1$ آنگاه

$$\| u \|_m^{p^+} \leq \rho_m(u) \leq \| u \|_m^{p^-}$$

لم ۳-۳. [۱۲] فرض کنید $p \in C_+(\overline{\Omega})$ به طوری که برای هر $x \in \overline{\Omega}$ ، $2p(x) > N$ باشد آنگاه

(الف) برای هر $q \in C_+(\overline{\Omega})$ یک جاددهی فشرده و پیوسته از $W^{2,p(x)}(\Omega)$ به $L^q(x)(\Omega)$ وجود دارد.

(ب) یک جادهی پیوسته از $W^{2,p(x)}(\Omega)$ به توی $C(\overline{\Omega})$ وجود دارد.

لم ۳-۴. [۶] فرض کنید $\Omega \subset R^N$ باز $(u_n)_n \subset L^p(\Omega)$، $p \in [1,\infty]$ باشد به طوری که $u_n \to u$ زمانی که $n \to \infty$ در $L^p(\Omega)$. آنگاه یک زیر دنباله $(u_{n_j})_j$ و تابع $v \in L^p(\Omega)$ وجود دارد به طوری که

(الف) $(u_{n_j})(x) \to u(x)$ تقریباً همه جا در Ω زمانی که $j \to \infty$.

(ب) برای هر j، تقریباً همه جا در Ω داریم

$$\left|\left(u_{n_j}\right)(x)\right| \leq v(x) .$$

برای یافتن جواب‌هایی از مسئله (۱)، ما تابعک انرژی را متناظر با مسئله (۱) درنظر می‌گیریم که در آن برای هر $u \in X$ توابع φ و ψ به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$\varphi(u)=\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}dx+\int_{\partial\Omega} m(x)\frac{|u|^{p(x)}}{p(x)}d\sigma \qquad (۳)$$

$$\psi(u)=\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx \qquad (۴)$$

می‌گوییم u یک جواب ضعیف برای معادله (۱) است هرگاه رابطه زیر برقرار باشد:

$$\int_\Omega |\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\Delta v dx+\int_{\partial\Omega} m(x)|u|^{p(x)-2}uv d\sigma=\lambda\int_\Omega |u|^{q(x)-2}uv dx$$

به وضوح $\varphi\in C^1(X,R)$ است و

$$<\varphi'(u),v>=\int_\Omega |\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\Delta v dx+\int_{\partial\Omega} m(x)|u|^{p(x)-2}uv d\sigma$$

لم بعدی بعضی از خاصیت‌های تابع φ' را مطرح می‌کند .

لم ۳-۵. [۴] $\varphi':X\to X'$ (الف) عملگری پیوسته، کراندار، اکیدا یکنوا و از نوع S_+ است بدان معنا که اگر $u_n \rightharpoonup u$ و $\limsup_{n\to\infty}\varphi'(u_n)(u_n-u)\le 0$ آنگاه نتیجه شود که $u_n\to u$. (ب) هومومرفیسم است. از طرفی $\psi\in C^1(X,R)$ و چون پیوسته و محدب می‌باشد تحت توپولوژی ضعیف نیم پیوسته پایین است و $<\psi'(u),v>=\int_\Omega |u|^{q(x)-2}uv dx$ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $I_\lambda\in C^1(X,R)$ و

$$<I'_\lambda(u),v>=\int_\Omega |\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\Delta v dx+\int_{\partial\Omega} m(x)|u|^{p(x)-2}uv d\sigma-\lambda\int |u|^{q(x)-2}uv dx \quad \forall v\in X$$

از مطالب بالا می‌توان گفت که u یک نقطه بحرانی I_λ ست اگر و تنها اگر یک جواب ضعیف از مسئله (۱) باشد.

تعریف ۳-۶. فرض کنید X یک فضایی باناخ حقیقی و $I\in C^1(X,R)$ باشد. گوییم I در شرط پالایس اسمل صدق می‌کند اگر برای هر دنباله $\{u_n\}$ ، $I(u_n)$ کران‌دار و $I'(u_n)\to 0$ زمانی که $n\to\infty$ باشد آنگاه $\{u_n\}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا در X است.

قضیه زیر جزو نتایج اصلی این مقاله می‌باشد. حال با بیان و اثبات آن وجود جواب برای مسئله (۱) تضمین می‌شود.

قضیه ۳-۷. فرض کنید $q^-<q^+<p^-<p^+\le p_2^*$ و برای هر $x\in\overline{\Omega}$، N و $2p(x)>N$ و $\lambda\in(-\infty,\frac{\lambda_* q^-}{p^+})$ آنگاه تابع I_λ دارای حداقل دو نقطه بحرانی است یا به عبارتی مسئله (۱) دارای حداقل دو جواب غیربدیهی است

$$\lambda_*=\inf_{u\in X\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}dx+\int_{\partial\Omega} m(x)\frac{|u|^{p(x)}}{p(x)}d\sigma}{\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx}$$

برای اثبات از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۳-۸. [۱۷] فرض کنید $(X,\|.\|)$ یک فضای باناخ حقیقی و $I:X\to R\in C^1(X,R)$ باشد. اگر I در شرط پالایس اسمل صدق کند و برای $\rho>0$، $u_0,u_1\in X$ وجود داشته باشد به طوری که

$(A_1)\quad u_1\notin\overline{B_p}(u_0)$

$(A_2)\quad max\{I(u_0),I(u_1)\}<\inf_{\partial B_{p_0}(u_0)}I(u)$

آنگاه I دارای نقطه بحرانی c است که به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{s\in[0,1]}I(\gamma(s))\ge\inf_{u\in\partial B_p(u_0)}I(u)$$

که

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],X)\ ;\ \gamma(0)=u_0\ ,\ \gamma(1)=u_1\}.$$

ما فضای جواب را رو $X=W^{2,p(x)}$ بررسی می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که I اجباریست یعنی برای هر $u\in X$ ، $\lim_{\|u\|\to\infty}I_\lambda(u)=\infty$. چون $q^+<p^-$ و X به طور پیوسته در دو فضای $L^{q^+}(\Omega)$ و $L^{q^-}(\Omega)$ جاددهی می‌شود. بنابراین دو ثابت مثبت d_1,d_2 وجود دارد به طوری که

$$\int_\Omega |u|^{q^+}dx\le d_1\|u\|_m^{q^+}\quad \forall u\in X$$
$$\int_\Omega |u|^{q^-}dx\le d_2\|u\|_m^{q^-}\quad \forall u\in X$$

با توجه به این حقیقت که برای هر $u\in\overline{\Omega}$، $|u|^{q(x)}\le|u|^{q^+}+|u|^{q^-}$ است آنگاه برای هر $u\in X$ و با انتخاب $\|u\|_m\ge 1$ داریم:

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}dx+\int_{\partial\Omega} m(x)$$

$$\frac{|u|^{p(x)}}{p(x)}d\sigma-\lambda\int_{\Omega}\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx \geq \frac{1}{p^+}\parallel u\parallel_m^{p^-}-\frac{\lambda d_1}{q^-}\parallel u\parallel_m^{q^+}-\frac{\lambda d_2}{q^-}\parallel u\parallel_m^{q^-} \quad (۵)$$

در این قسمت نشان می‌دهیم که I_λ در شرط پالایس اسمل صدق می‌کند.
فرض می‌کنیم $u_n\subset X$ باشد. نشان می‌دهیم که برای هر $\lambda\in(-\infty,\frac{\lambda_* q^-}{p^+})$ دنباله u_n در X کران‌دار است.
برای اثبات لم زیر را مطرح می‌کنیم.

لم ۳-۹. یک ثابت $\lambda_*>0$ وجود دارد.
از قضیه جاددهی ثابت مثبت $C_1>0$ وجود دارد به طوری که $\parallel u\parallel_m\geq C_1|u|_{L^q}\ ;\ \forall u\in X$ اگر $\parallel u\parallel_m\geq 1$ باشد آنگاه طبق گزاره (۳-۲) داریم

$$\parallel u\parallel_m^{p^-}\leq\int_{\Omega}|\Delta u|^{p(x)}dx+\int_{\partial\Omega}m(x)|u|^{p(x)}d\sigma\leq\parallel u\parallel_m^{p^+}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}dx+\int_{\partial\Omega}\frac{m(x)}{p(x)}|u|^{p(x)}d\sigma\geq\frac{1}{p^+}\left(\int_{\Omega}|\Delta u|^{p(x)}dx+\int_{\partial\Omega}m(x)|u|^{p(x)}d\sigma\right)\geq\frac{1}{p^+}\int_{\Omega}C_1^{p^-}|u|^{q(x)}dx\geq\frac{1}{p^+}C_1^{p^-}\int\frac{|u|^{q(x)}}{q(x)}dx$$

در نتیجه λ_* وجود دارد و مثبت است. در ادامه با توجه به تعریف λ_* داریم

$$\lambda_*<\frac{\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}dx+\int_{\partial\Omega}m(x)\frac{|u|^{p(x)}}{p(x)}d\sigma}{\int_{\Omega}\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx} \quad (۶)$$

با یک محاسبه ساده رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$-\lambda\int_{\Omega}\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx>-\lambda\frac{\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}dx+\int_{\partial\Omega}m(x)\frac{|u|^{p(x)}}{p(x)}d\sigma}{\lambda_*} \quad (۷)$$

حال از رابطه (۶) و (۷) نابرابری زیر بدست می‌آید.

$$\frac{-\lambda}{q^-}\int_{\Omega}|u|^{q(x)}dx>-\lambda\int_{\Omega}\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx>-\lambda\frac{\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\Delta u|^{p(x)}dx+\int_{\partial\Omega}m(x)\frac{|u|^{p(x)}}{p(x)}d\sigma}{\lambda_*}>\frac{-\lambda}{\lambda_* q^-}\int_{\Omega}|\Delta u|^{p(x)}dx-\frac{\lambda}{\lambda_* q^-}\int_{\partial\Omega}m(x)|u|^{p(x)}d\sigma$$

از طرفی چون $I(u_n)$ کران دار است برهمین اساس داریم

$$\frac{1}{p(x)}\left(\int_{\Omega}|\Delta u|^{p(x)}dx+\int_{\partial\Omega}m(x)|u|^{p(x)}d\sigma\right)-\lambda\int_{\Omega}\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\leq M$$

بنابراین

$$\frac{1}{p^+}\left(\int_{\Omega}|\Delta u|^{p(x)}dx+\int_{\partial\Omega}m(x)|u|^{p(x)}d\sigma\right)-\frac{\lambda}{q^-}\int_{\Omega}|u|^{q(x)}dx\leq M$$

با استفاده از تعریف λ_* به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\frac{1}{p^+}\left(\int_{\Omega}|\Delta u|^{p(x)}dx+\int_{\partial\Omega}m(x)|u|^{p(x)}d\sigma\right)-\frac{\lambda}{\lambda_* q^-}\int_{\Omega}|\Delta u|^{p(x)}dx-\frac{\lambda}{\lambda_* q^-}\int_{\partial\Omega}m(x)|u|^{p(x)}d\sigma\leq M$$

در این صورت

$$\left(\frac{1}{p^+}-\frac{\lambda}{\lambda_* q^-}\right)\int_{\Omega}|\Delta u|^{p(x)}dx+\left(\frac{1}{p^+}-\frac{\lambda}{\lambda_* q^-}\right)\int_{\partial\Omega}m(x)|u|^{p(x)}d\sigma\leq M \quad (۸)$$

با توجه به فرض $(\frac{۱}{p^+}-\frac{\lambda}{\lambda_* q^-})>0$ می‌توان نوشت

$$\left(\frac{1}{p^+}-\frac{\lambda}{\lambda_* q^-}\right)\int_{\Omega}|\Delta u|^{p(x)}dx\leq M$$

حال برای ادامه اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم دنباله u_n کران‌دار نباشد یعنی زمانی که $n\to\infty$، $\parallel u_n\parallel_m\to\infty$ قرار می‌دهیم $z_n=\frac{u_n}{\parallel u_n\parallel_m}$.
فرض می‌کنیم

$$z_n\longrightarrow z\quad in\quad L^p$$

با استفاده از لم (۳-۴) داریم

$$z_n(x)\longrightarrow z(x)\quad a.e\quad in\quad \Omega$$

و

$$z_n\rightharpoonup z\quad in\quad X$$

دو حالت وجود دارد.

بررسی حالت اول: فرض می‌کنیم $\lambda > 0$ و برای هر $n \geq 1$، $\parallel \Delta u_n \parallel_m \leq 1$

$\int_\Omega (\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda_* q^-}) |\Delta u_n|^{p^+} dx \leq$

$\int_\Omega (\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda_* q^-}) \parallel \Delta u_n \parallel_m^{p^+} \ dx \leq M$

با تقسیم طرفین بر $\parallel u_n \parallel_m^{p^+}$ رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$\int_\Omega (\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda_* q^-}) \frac{|\Delta u_n|_m^{p^+}}{\parallel u_n \parallel_m^{p^+}} dx \leq \frac{M}{\parallel u_n \parallel_m^{p^+}}$

در نتیجه

$\int_\Omega (\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda_* q^-}) |\Delta z_n|^{p^+} dx \leq \frac{M}{\parallel u_n \parallel_m^{p^+}}$

حال با توجه به اینکه زمانی که $n \to \infty$، $\parallel u_n \parallel_m \to \infty$، داریم.

$\Delta z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad L^p$ (۹)

در صورتی که $\parallel \Delta u_n \parallel_m > 1$ فرض شود آنگاه نابرابری زیر را خواهیم داشت:

$\int_\Omega (\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda_* q^-}) |\Delta u_n|^{p^-} dx \leq M$

با تقسیم طرفین بر $\parallel u_n \parallel_m^{p^-}$ رابطه زیر نتیجه می‌شود

$\int_\Omega (\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda_* q^-}) \frac{|\Delta u_n|^{p^-}}{\parallel u_n \parallel_m^{p^-}} dx \leq \frac{M}{\parallel u_n \parallel_m^{p^-}}$

در نتیجه

$\int_\Omega (\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda_* q^-}) |\Delta z_n|^{p^-} dx \leq \frac{M}{\parallel u_n \parallel_m^{p^-}}$

با حدگیری داریم

$\Delta z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad L^p$ (۱۰)

از روابط (۹) و (۱۰) می‌توان نوشت

$\Delta z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad L^p$

بررسی حالت دوم: فرض می‌کنیم $\lambda \leq 0$ و و برای هر $n \geq 1$، $\parallel \Delta u_n \parallel_m \leq 1$ در این صورت داریم:

$\frac{1}{p^+} \parallel \Delta u_n \parallel_m^{p^+} \leq M$

به طریق مشابه قسمت قبل با تقسیم طرفین بر $\parallel u_n \parallel_m^{p^+}$ رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$\frac{1}{p^+} \int_\Omega |\Delta z_n|^{p^+} dx \leq \frac{M}{\parallel u_n \parallel_m^{p^+}}$

سپس با حدگیری زمانی که $n \to \infty$، $\parallel u_n \parallel_m \to \infty$، داریم:

$\Delta z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad L^p$ (۱۱)

بطور مشابه می‌توان ثابت کرد که اگر $\parallel \Delta u_n \parallel_m > 1$ باشد آنگاه:

$\Delta z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad L^p$ (۱۲)

در نتیجه از (۱۱) و (۱۲) داریم:

$\Delta z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad L^p$

بنابراین با بررسی هر دوحالت $\lambda \leq 0$ و $\lambda > 0$ رابطه زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$\Delta z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad L^p$

با استفاده از رابطه (۸) و به طریقی مشابه با بررسی هر دو حالت به شیوه قبل نتیجه می‌شود که

$z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad L^p$

در نتیجه

$z_n \longrightarrow 0 \quad in \quad X$

و این با فرض اینکه $\parallel z_n \parallel = 1$ در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و $\{u_n\}$ دنباله‌ای کران‌دار در X است. حال فرض می‌کنیم

$u_n \rightharpoonup u \quad in \quad X$

مطابق با خاصیت جاددهی

$u_n \rightharpoonup u \quad in \quad L^q$

با توجه به اینکه زیر دیفرانسیل I_λ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، مجموعه‌ای غیرخالی، محدب و تحت توپولوژی $weak^*$ زیرمجموعه‌ای فشرده از X است

$$\partial I_\lambda(u) = \{x^* \in X^* \,;\, < x^*, v >_X \leq I_\lambda^0(u,v) \quad \forall u, v \in X\}$$

و همچنین تابع نرم نیم پیوسته پایین و اجباری می‌باشد، می‌توان با استفاده از قضیه Weierstrass ([۱۷]) نوشت

$$\exists u_n{}^* \in \partial I_\lambda(u)\ ;\ \| u_n{}^* \|_* = s(u_n) := \min\{\| u_n{}^* \|_*\ ;\ u^* \in \partial I_\lambda(u_n)\} \to 0$$

زمانی که $n \to \infty$. می‌دانیم که φ' یکنوای ماکزیمال است. آنگاه برای هر $n \geq 1$،

$$u_n{}^* = \varphi'(u_n) - \lambda |u_n|^{q(x)-2} u_n$$

و همچنین برای هر $\epsilon_n \downarrow 0$ داریم

$$| < u_n{}^*, v > | \leq \epsilon_n \| v \| \quad ; \quad \forall v \in X$$

بنابراین با انتخاب $v = u_n - u$ می‌توان نوشت

$$< \varphi'(u_n), u_n - u > -$$
$$-\lambda \int |u_n|^{q(x)-2} u_n (u_n - u) dx$$
$$\leq \epsilon_n \| v \| \to 0$$

طبق خاصیت جاددهی و نامساوی هولدر نابرابری زیر حاصل می‌شود

$$\lambda \int_\Omega |u_n|^{q(x)-2} u_n(x)(u_n - u)(x) dx$$
$$\leq \lambda (\frac{1}{q^-} + \frac{1}{q'^-}) \| |u|^{q(x)-1} \|_{q'}$$
$$\| u_n - u \|_q$$

در نتیجه

$$\limsup < \varphi'(u_n), u_n - u > \leq 0$$

بنابراین با درنظرگرفتن لم (۳-۵) همگرایی زیر را داریم

$$u_n \longrightarrow u \quad in \quad X$$

در نتیجه توانستیم ثابت کنیم که I_λ دارای خاصیت پالایس اسمل است.

حال نشان می‌دهیم که برای هر $\lambda > 0$، صفر یک مینیمم کننده موضعی از I_λ می‌باشد. واضح است که

$$I_\lambda(0) = \varphi(0) - \lambda \psi(0) = 0$$

چون $q(x) < p_2^*$ با استفاده از خاصیت جاددهی داریم

$$\exists c_1 > 0 \quad ; \quad |u|_{q(x)} \leq c_1 \| u \|_m$$

حال اگر فرض کنیم $\rho \in (0,1)$ و $\| u \|_m = \rho$ به طوری که $\rho < \frac{1}{c_1}$. آنگاه $|u|_{q(x)} < 1$. بنابراین

$$\int |u_n|^{q(x)} d(x) \leq |u_n|_q{}^{q^-}$$
$$\leq c_1{}^{q^-} \| u \|_m^{q^-} \quad \forall u \in X$$

در نتیجه

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\Delta u|^{p(x)} dx +$$
$$\int_{\partial\Omega} m(x) |u|^{p(x)} dx - \lambda \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \geq$$
$$\frac{1}{p^+} \| u \|_m^{p^+} - \frac{\lambda}{q^-} \int_\Omega |u|^{q(x)} dx$$

با انتخاب $\lambda_* < \frac{\rho^{p^\pm q^-}}{c_1^{q^-}}$ داریم

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{p^+} \| u \|_m^{p^+} - \frac{\lambda_* c_1^{q^-}}{p^+} \| u \|_m^{q^-}$$
$$= \rho^{q^-} (\frac{1}{p^+} \rho^{p^\pm q^-} - \frac{\lambda_* c_1^{q^-}}{p^+}) > 0$$

در این صورت $I_\lambda > 0$ می‌باشد و بنابراین صفر یک مینیمم کننده موضعی از I_λ است. در ادامه نشان می‌دهیم که صفر یک مینیمم کننده سراسری نیست.

چون $q^- < p^-$ می‌توان $\varepsilon > 0$ به گونه‌ای یافت که $q^- + \varepsilon < p^-$باشد. ازطرفی دیگر چون$q(x) \in C(\overline{\Omega})$ آنگاه یک مجموعه باز $\Omega_0 \subset \Omega$ وجود دارد به طوری که $|q(x) - q^-| < \varepsilon \quad \forall x \in \Omega_0$ و نتیجه می‌دهد

$$q(x) \leq q^- + \varepsilon < p^- \qquad \forall x \in \Omega_0$$

قرار دهید $w \in C_0^\infty(\Omega)$ بطوری که $\overline{\Omega_0} \subset supp\omega$ و برای هر $x \in \overline{\Omega_0}$ ، $\omega(x) = 1$ و $\cdot \leq \omega \leq 1$ در Ω باشد. فرض می‌کنیم $\| \omega \|_m = 1$ بنابراین

$$\int_\Omega |\Delta\omega|^{p(x)} dx + \int_{\partial\Omega} m(x) |\omega|^{p(x)} d\sigma = 1$$

همچنین

$$\int_{\Omega_0} |\omega|^{q(x)} dx = mesu(\Omega_0)$$

حال برای هر $t \in (0,1)$ می‌توان نتیجه گرفت

$$I_\lambda(t\omega) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} t^{p(x)} |\Delta\omega|^{p(x)} dx$$
$$+ \int_{\partial\Omega} m(x) \frac{t^{p(x)} |\omega|^{p(x)}}{p(x)} d\sigma$$
$$-\lambda \int_\Omega \frac{1}{q(x)} t^{q(x)} |u|^{q(x)} dx$$
$$\leq \frac{t^{p^-}}{p^-} \int_\Omega |\Delta\omega|^{p(x)} dx +$$
$$\frac{t^{p^-}}{p^-} \int_{\partial\Omega} m(x) |\omega|^{p(x)} d\sigma -$$
$$\frac{\lambda}{q^+} \int_\Omega t^{q(x)} |\omega|^{q(x)} dx \leq$$
$$\frac{t^{p^-}}{p^-} (\int_\Omega |\Delta\omega|^{p(x)} dx +$$
$$\int_{\partial\Omega} m(x) |\omega|^{p(x)} d\sigma) -$$
$$\frac{\lambda}{q^+} \int_\Omega t^{q(x)} |\omega|^{q(x)} dx$$

$$\le \frac{t^{p^-}}{p^-} - \frac{\lambda}{q^+}\int_{\Omega_0} t^{q(x)}|\omega|^{q(x)}dx$$
$$\le \frac{t^{p^-}}{p^-}-\frac{\lambda}{q^+}t^{q^-+\varepsilon}meas(\Omega_0)$$
$$= \frac{t^{p^-}}{p^-}\left(1-\frac{p^-\lambda meas(\Omega_0)}{q^+t^{p^- - q^- -\varepsilon}}\right)$$

با انتخاب $t^{p^- - q^- - \varepsilon} < \delta$ و همچنین برای اینکه $I_\lambda(tw)<0$ شود باید داشته باشیم

$$1-\frac{p^-\lambda meas(\Omega_0)}{q^+\delta}<0$$

در نتیجه

$$\delta < \frac{p^-\lambda meas(\Omega_0)}{q^+}$$

سپس با انتخاب $0<\delta<min\{1,\frac{p^-\lambda meas(\Omega_0)}{q^+}\}$ نتیجه مطلوب حاصل خواهد شد.
بنابراین $t\omega=\alpha$ وجود دارد به طوری که $I_\lambda(\alpha)<0$
در ادامه $\theta\in R$ را می‌توان یافت به طوری که

$$I_\lambda(\alpha)<\theta<0$$

مجموعه زیر را درنظر بگیرید.

$$Y=\{u\in X \quad ; \quad I_\lambda(u)\le\theta\}$$

مجموعه $Y\neq\emptyset$ و چون I_λ اجباریست بنابراین برای هر دنباله $\{u_n\}$ چون $I_\lambda(u_n)<\theta$ کران‌دار است بنابراین $\{u_n\}$ نیز کران‌دار است.
ما ادعا می‌کنیم که I_λ روی Y از پایین کران‌دار است. فرض می‌کنیم برخلاف فرض

$$\exists\{u_n\}\subset Y\, ; \quad \lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n)=-\infty \qquad (۱۳)$$

کافیست نشان دهیم که I_λ نیم پیوسته پایینی ست. از لم (۳-۳) می‌توان فرض کرد که اگر

$$u_n\to u_0 \quad in \quad Y$$

آنگاه طبق‌جاددهی فشرده همگرایی زیر را خواهیم داشت

$$u_n\to u_0 \quad in \quad L^q$$

و از طرفی طبق لم فاتو داریم

$$\limsup_{n\to\infty}\int \frac{|u_n(x)|^{q(x)}}{q(x)}dx$$
$$\le \int \limsup_{n\to\infty}\frac{|u_n|^{q(x)}}{q(x)}dx$$
$$= \int \frac{|u_0|^{q(x)}}{q(x)}dx$$

و در نتیجه رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) =$$
$$\liminf_{n\to\infty}\Big(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u_n|^{p(x)}dx +$$
$$\int_{\partial\Omega} m(x)\frac{|u_n|^{q(x)}}{q(x)}d\sigma\Big) -$$
$$\lambda\limsup_{n\to\infty}\int \frac{|u_n|^{q(x)}}{q(x)} \ge$$
$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\Delta u_0|^{p(x)}dx +$$
$$\int_{\partial\Omega} m(x)\frac{|u_0|^{p(x)}}{p(x)}d\sigma$$
$$-\lambda\int_\Omega \frac{|u_0|^{q(x)}}{q(x)}dx = I_\lambda(u_0)$$

از این رو I_λ نیم پیوسته پایینی است که این نتیجه با رابطه (۱۳) در تناقض است. بنابراین

$$0>v:=\inf_{u\in Y} I_\lambda(u)=\inf_{u\in X}I_\lambda(u)>-\infty$$

حال فرض می‌کنیم $\{u_n\}\subset Y$ دنباله‌ای است که $\lim_{n\to\infty}I_\lambda(u_n)=v$. بنابراین

$$\exists u_1\in X \quad ; \quad u_n\longrightarrow u_1$$

و

$$I_\lambda(u_1)=v<0$$

که نشان می‌دهد u_1 غیربدیهی است و یک نقطه بحرانی I_λ می‌باشد.
حال ادعا می‌کنیم که با استفاده از قضیه (۳-۸)، I_λ دارای نقطه بحرانی دیگریست. قبلاً ثابت شد که I_λ در شرط پالایس اسمل صدق می‌کند و صفر نقطه مینیمم موضعی است. بنابراین

$$\exists 0<\rho<\| u_1 \|_m$$

به طوری که

$$r:=\inf_{u\in\partial B_\rho(u_0=0)} I_\lambda(u)>0$$

از طرفی با توجه به این حقیقت که $I_\lambda(u_1)=v<0$ و $I_\lambda(0)=0$ است نتیجه می‌شود که $u_1\notin\partial B_\rho(u_0=0)$
و

$$max\{I_\lambda(0),I_\lambda(u_1)\}=I_\lambda(0)$$
$$<\inf_{\partial B_\rho(u_0)} I(u)=r$$

بنابراین تمام فرضیات قضیه (۳–۸) برقرار بوده و در نتیجه یک نقطه بحرانی u_2 از I_λ وجود دارد به‌طوری که $I_\lambda(u_2) \geq r > 0$

و چون $I_\lambda(u_1) = v < 0$ و $I_\lambda(u_2) > 0$ آنگاه $u_1 \neq u_2$ و $u_2 \neq 0$.

نتیجه‌گیری

در این مقاله روی یک مسئله بیضوی مرتبه چهارم با شرایط مرزی را بین کار کردیم. روش به کاربرده شده در این مقاله بر مبنای نظریه گذرگاه کوهی امبرستی ورابین ویتز می‌باشد که با یافتن عدد مثبت λ_* وجود حداقل دو جواب ضعیف غیر بدیهی برای مسئله مورد نظر تضمین می‌گردد.

فهرست منابع

[1] G.A. Afouzi, M. Mirzapour, N.T. Chung. Existence and non-existence of solutions for a p(x)-biharmonic problem: Electron. J. Differ. Equ. (2015)

[2] A. Ayoujil, A.R. El Amrouss. On the spectrum of a fourth order elliptic equation with variable exponent: Nonlinear Anal. 71, 4916–4926 (2009)

[3] A. Ayoujil, A.R. El Amrouss. Continuous spectrum of a fourth order nonhomogenous elliptic equation with variable exponent: Electron. J. Differential Equations 24, 12 pp (2011)

[4] A. Ayoujil, A.R. El Amrouss. Multiple solutions for a Robin problem involving the p(x)-biharmonic operator: Mathematics and Computer Science Series, vol 44, 87-93(2017)

[5] A.R. El Amrouss, A. Ourraoui. Existence of solutions for a boundary value problem involving a p(x)-biharmonic operator: Bol. Soc. Paran. Mat. 31,179–192(2013)

[6] M. Badiale, E. Serra. Semilinear elliptic equatuons for beginners: Springer, (2011).

[7] X. Fan, X. Han. Existence and multiplicity of solutions for p(x)-Laplacian equations in R^N: Nonlinear Anal. 59, 173–188(2004)

[8] X. Fan, D. Zhao. On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$: J. Math. Anal. Appl. 263, 424–446(2001)

[9] X.L. Fan, J.S. Shen, D. Zhao. Sobolev embedding theorems for spaces $W^{m,p(x)}$: J. Math. Anal. Appl. 262 ,749-760(2001)

[10] F. Fattahi, M. Alimohammady. Infinitely many solutions for a class of hemivariational inequalities involving *p(x)-Laplacian: Analele Universitatii "Ovidius" Constanta - Seria Matematica, Vol. 25(2),65-83(2017)*

[11] A. Ferrero, G. Warnault. On a solutions of second and fourth order elliptic with power type nonlinearities: Nonlinear Anal. T.M.A. (70)8, 2889-2902(2009)

[12] K.B. Haddouch, Z. E. Allali, A. Ayoujil and N. Tsouli. Continuous spectrum of a fourth order eigenvalue problem with variable exponent under Neumann boundary conditions: Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series Volume 42(1), 42-55. (2015)

[13] T. C. Halsey. Electrorheological fluids: Science 258, 761-766(1992)

[14] Y. Jabri. The Mountain Pass Theorem, Variants, Generalizations and some Applications: Encyclopedia of Mathematics and its Applications 95, Cambridge, New York (2003)

[15] K. Kefi. p(x)-Laplacian with indefinite weight: Proc. Amer. Math. Soc. 139, 4351–4360(2011)

[16] L. Kong. Eigenvalues for a fourth order elliptic problem: Proc. Amer. Math. Soc. 143 ,249–258(2015)

[17] L. Kong. Multiple solutions for fourth order elliptic problems with p(x)-biharmonic operators: Opuscula Math. 36, no. 2, 253–264(2016)

[18] L. Kong. On a fourth order elliptic problem with a p(x)-biharmonic operator: Appl. Math. Lett. 27, 21–25(2014)

[19] O.$Kov`a\check{c}ik, J. R\breve{a}kosna'k.$ On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$: Czechoslovak Math. J. 41 ,592- 618. (1991)

[20] M. Mihalescu, V. Radulesu. A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids: Proc. R. Soc. A 462 ,2625–2641(2006)

[21] M. Mihalescu, V. Radulesu. On a nonhomogeneous quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent: Proc. Amer. Math. Soc. 135 ,2929–2937(2007)

[22] T. G Myers. Thin films with high surface tension: SIAM Review, 40 (3) ,441-462(1998)

[23] M. Ruzicka. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory, Lecture Notes in Mathematics, 1748, Springer-Verlag, Berlin. (2000)