دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
دوره ششم، شماره بیست و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بعضی از تعمیم های قضیه داربو برای حل یک دستگاه از معادلات انتگرال تابعی با استفاده از اندازه نافشردگی

جمال رضایی روشن*

گروه ریاضی، واحد قائم شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، قائم شهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۳/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۲۳

چکیده

در این مقاله با استفاده از مفهوم اندازه نافشردگی، که یک ابزار بسیار مفید و قدرتمند در آنالیز تابعی غیرخطی و نظریه نقطه ثابت متریک و معادلات انتگرال است، یک انقباض جدید در فضای باناخ معرفی می‌کنیم. برای این منظور با استفاده از یک اندازه نافشردگی روی یک فضای حاصل ضرب متناهی، تعمیم هایی از قضیه نقطه ثابت داربو بدست می‌آوریم. آنگاه با استفاده از نتایج حاصله، چند قضیه در وجود زوج نقطه ثابت برای رده‌ای از عملگرها در فضای باناخ ارائه می‌دهیم. نتایج حاصله بسیاری از نتایج قابل مقایسه را در پیشینه تحقیق بسط و توسعه می‌دهد. همچنین به عنوان یک کاربرد به مطالعه وجود جواب برای یک رده از دستگاه معادلات انتگرال تابعی غیر خطی می‌پردازیم که توابع و عملگرها در عملگرهای انتگرال وابسته، در یک شرط انقباض خاص صدق می‌کنند. سرانجام یک مثال ملموس نیز گنجانده شده است که کاربرد نتایج بدست آمده را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: اندازه نافشردگی، نقطه ثابت، فضای باناخ، دستگاه معادلات انتگرال تابعی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: Jmlroshan@gmail.com

۱- مقدمه

مطالعه معادلات انتگرال تابعی یکی از موضوعات مورد علاقه پژوهشگران در آنالیز تابعی غیر خطی است. معادلات انتگرال در بسیاری از کاربردها رخ می‌دهد، از جمله در ریاضیات کاربردی و همچنین در بسیاری از مسائل فیزیک. از طرف دیگر مفهوم اندازه نافشردگی یک ابزار بسیار مفید و قدرتمند در آنالیز تابعی غیرخطی، نظریه نقطه ثابت متریک و نظریه معادلات عملگرها در فضاهای باناخ است. از این نظریه برای مطالعه معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، نظریه کنترل بهینه، معادلات تابعی، معادلات دیفرانسیل جزئی کسری، معادلات انتگرال و همچنین برای مطالعه ویژگی‌های عملگرهای فشرده بین فضاهای باناخ استفاده شده است. در سال ۱۹۳۰ کوراتفسکی [۲۰] برای اولین بار مفهوم اندازه نافشردگی را معرفی کرد. بعدها، در سال ۱۹۵۵ داربو [۱۱] یک قضیه نقطه ثابت را با استفاده از اندازه نافشردگی کوراتفسکی ثابت کرد که هم قضیه کلاسیک نقطه ثابت شاودر و هم یک نوع خاص از اصل انقباض باناخ را تعمیم داد. در سال ۱۹۵۷ نوع دیگری از اندازه نافشردگی توسط گلدن استاین [۱۳] و همکارانش معرفی شد که آن را اندازه نافشردگی هاسدورف نامیدند. تعاریف دیگری از اندازه نافشردگی موجودند که در آن نویسندگان سعی داشتند آن را بر اساس یک اصول موضوعه معرفی کنند. اولین تلاشها در مقاله سادوفسکی [۲۱] به ظهور رسید. اما اصول موضوعه سادوفسکی بیش از حد کلی به نظر می رسید. سرانجام در سال ۱۹۸۰ باناس [۷و۸] تعریف دیگری از اندازه نافشردگی را بر اساس اصول موضوعه معرفی کرد که در کاربردها بسیار مفید بود. تا به حال چندین نویسنده مقالاتی در وجود جواب برای معادلات انتگرال غیر خطی ارائه داده‌اند که در آنها از تکنیک اندازه نافشردگی استفاده کردند، برای نمونه منابع [۱-۹] و [۱۲-۱۹] را ببینید.

در این مقاله، با استفاده از روش های مربوط به تکنیک اندازه نافشردگی به تعمیم و توسعه قضیه نقطه ثابت داربو [۱۱] و تعمیم نتایجی از آقاجانی و همکارانش [۱و۳] می‌پردازیم. در این راستا به بیان و اثبات چند قضیه وجودی از زوج نقطه ثابت برای رده‌ای از عملگرها در فضاهای باناخ می‌پردازیم. سرانجام بعنوان یک کاربرد از این قضایا به مطالعه مسئله وجود جواب برای یک رده از معادلات انتگرال غیر خطی که در یک شرط انقباض خاص صدق می کند می‌پردازیم.

۲- پیشینه تحقیق

در ادامه بعضی از تعاریف، نمادها و نتایج مقدماتی که در سراسر این مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت را یاد آوری می‌کنیم. خاطر نشان می کنیم که $\mathbb{R}_+$ نشان دهنده مجموعه اعداد حقیقی و $\mathbb{R}_+ = [\cdot, +\infty)$. فرض کنیم $(E, \|.\|)$ یک فضای باناخ حقیقی با عنصر صفر θ باشد و بعلاوه $\bar{B}(a,r)$ گوی بسته به مرکز a و شعاع r در این فضا باشد. لازم به ذکر است که $\bar{B}_r$ نشان دهنده گوی $\bar{B}(\theta, r)$ می‌باشد. هرگاه X زیر مجموعه ای ناتهی از E باشد بستار X و کوچک ترین زیر مجموعه‌ی محدب شامل X را به ترتیب با $\overline{X}$ و $ConvX$ نمایش می‌دهیم. همچنین فرض کنیم که $\mathcal{M}_E$ خانواده‌ی تمام زیر مجموعه های ناتهی و کراندار E و $\mathcal{N}_E$ زیر خانواده‌ای از $\mathcal{M}_E$ باشد که شامل تمام زیر مجموعه هایی بطور نسبی فشرده هستند. در این مقاله از تعریف اندازه نافشردگی که بصورت اصول موضوعه در کتاب [۹] آمده است استفاده خواهیم کرد.

1-1 تعریف [8]. نگاشت $\mu: \mathcal{M}_E \to [\cdot, \infty)$ را یک اندازه نافشردگی در فضای باناخ E گویم اگر در شرایط زیر صدق کند:

1) $Ker\mu = \{X \in \mathcal{M}_E : \mu(X) = \cdot\}$ ناتهی باشد و $\mathrm{Ker}\mu \subseteq \mathcal{N}_E$.

2) اگر $X \subseteq Y$ آنگاه $\mu(X) \leq \mu(Y)$.

3) $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$.

۴) $\mu(ConvX) = \mu(X)$.

۵) برای هر $\lambda \in (\cdot,۱)$ داشته باشیم $\mu(\lambda X + (۱-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (۱-\lambda)\mu(Y)$.

۶) اگر $\{X_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته $\mathcal{M}_E$ به قسمی باشد که به ازای هر $n \geq ۱$ داشته باشیم $X_{n+۱} \subseteq X_n$ و $\mu(X_n) \to 0$ آنگاه مجموعه‌ی $X_\infty = \bigcap_{n=۱}^{\infty} X_n$ ناتهی باشد.

$Ker\mu$ را هسته اندازه نافشردگی μ می‌نامند. مشاهده می‌شود که $X_\infty \in Ker\mu$. در واقع، چون برای هر n، $\mu(X_\infty) \leq \mu(X_n)$

آن ایجاب می‌کند $\mu(X_\infty) = \cdot$ یعنی $X_\infty \in Ker\mu$.

اکنون تعریف زوج نقطه ثابت برای یک تابع دو متغیره برداری و یک قضیه مفید راجع به ساختن یک اندازه نافشردگی

روی فضای حاصل ضرب متناهی ارائه می‌دهیم که در اثبات نتایج اصلی به آنها نیاز داریم.

۱-۲ تعریف [10] . عنصر $(x,y) \in X \times X$ را یک زوج نقطه ثابت نگاشت $T: X \times X \to X$ گوییم اگر $T(x,y) = x$ و $T(y,x) = y$.

1-3 قضیه [8] . فرض کنید $\mu_۱, \mu_۲, \dots, \mu_n$ به ترتیب اندازه های نافشردگی در فضاهای باناخ $E_۱, E_۲, \dots, E_n$ باشند. بعلاوه فرض کنید تابع $F: [۰,\infty)^n \to ۰,\infty)$ محدب باشد و $F(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = ۰$ اگر و فقط اگر $x_i = ۰$، برای $i = ۱,۲,\dots,n$. آنگاه $\tilde{\mu}(X) = F(\mu_۱(X_۱), \mu_۲(X_۲), \dots, \mu_n(X_n))$ یک اندازه نافشردگی در $E_۱ \times E_۲ \times \dots \times E_n$ تعریف می‌کند که در آن X_i نشان دهنده تصویر طبیعی از X بتوی E_i برای $i = ۱,۲,\dots,n$ است.

اکنون بعنوان نتایجی از قضیه ۱-۳ مثال های زیر را ارائه می‌دهیم.

۱-٤ مثال. فرض کنید μ یک اندازه نافشردگی روی فضای باناخ E، و فرض کنید تابع

$F: [۰,\infty)^۲ \to [۰,\infty)$ محدب باشد و

$F(x_۱, x_۲) = ۰$ اگر و فقط اگر $x_i = ۰$ برای $i = ۱,۲$، در این صورت

$\tilde{\mu}(X) = F(\mu(X_۱), \mu(X_۲))$ یک اندازه نافشردگی در $E \times E$ تعریف می‌کند که در آن X_i نشان دهنده تصویر طبیعی از X بتوی $E_i = E$ برای $i = ۱,۲$ است.

۱-۵ مثال [۳] . فرض کنید μ یک اندازه نافشردگی روی فضای باناخ E باشد.

تابع $F: [۰,\infty)^۲ \to [۰,\infty)$ با ضابطه $F(x,y) = x + y$ محدب است و

$F(x,\text{y}) = ۰$ اگر و فقط اگر $\text{x} = \text{y} = ۰$، از این رو تمام شرایط قضیه ۱-۳ برقرار است. بنابراین $\tilde{\mu}(X) = \mu(X_۱) + \mu(X_۲)$ یک اندازه نافشردگی در $E \times E$ تعریف می‌کند که در آن X_i نشان دهنده تصویر طبیعی از X بتوی $E_i = E$ برای $i = ۱,۲$ است.

۱-٦ مثال [۳] . فرض کنید μ یک اندازه نافشـردگی روی فضای باناخ E باشد.

تـابع $F: [۰,\infty)^۲ \to [۰,\infty)$ بـا ضـابطه $F(x,y) = max\{x,y\}$ در تمام شرایط قضیه ۱-۳ صدق می کند.

لـذا $\tilde{\mu}(X) = max\{\mu(X_۱), \mu(X_۲)\}$ یـک انـدازه نافشـردگی در $E \times E$ تعریـف می‌کنـد کـه در آن X_i نشـان دهنده تصویر طبیع ی از X بتـوی $E_i = E$ بـرای $i = ۱,۲$ است.

قضیه نقطه ثابت داربو یک تعمیم مهم از قضیه شاودر و شامل بخش وجودی قضیه نقطه ثابت باناخ است.

۱-۷ قضیه (شاودر [۲])۰ فرض کنید Ω یک زیر مجموعه بسته و محدب از فضای باناخ E باشد. آنگاه هر نگاشت فشرده و پیوسته $T: \Omega \to \Omega$ حداقل یک نقطه ثابت دارد.

۱-۸ قضیه (داربو [۷]). فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار، و محدب از فضای باناخ E باشد و $T: \Omega \to \Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد. فرض کنید که یک عدد ثابت $k \in [۰,۱)$ موجود باشد به قسمی که برای هر $X \subset \Omega$

$$\mu\big(T(X)\big) \leq k\mu(X)$$

آنگاه T یک نقطه ثابت دارد.

اخیرا آقاجانی و همکارانش در [۱و۳] تعمیم هایی از قضیه نقطه ثابت داربو بدست آوردند و با استفاده از اندازه نافشردگی قضایایی در زمینه زوج نقطه ثابت ارائه داده اند. برای این منظور آنها رده زیر از توابع را در نظر گرفتند:

$$\Lambda = \Big\{\delta: [۰,\infty) \to (۰,\infty): \lim_{n\to\infty} \delta^n(t) = ۰ \text{ و است صعودی } \delta\Big\}$$

و قضیه زیر را ثابت کردند.

۱-۹ قضیه [۳]. فرض کنید μ یک اندازه نافشردگی دلخواه باشد و $\delta \in \Lambda$.

فرض کنید $G:\Omega\times\Omega\to\Omega$ نگاشت پیوسته‌ای باشد که برای هر $X_1, X_2\subset\Omega$ در نامساوی

$$\mu(G(X_1\times X_2))\le\delta\left(\frac{\mu(X_1)+\mu(X_2)}{2}\right)$$

صدق کند. آنگاه G حداقل یک زوج نقطه ثابت دارد.

۱-۱۰ قضیه[۱]. فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار، و محدب از فضای باناخ E باشد، μ یک اندازه نافشردگی دلخواه و $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ یک تابع نیم پیوسته بالایی و نانزولی به قسمی باشد که برای هر $t>0$، $\varphi(t)<t$.

فرض کنید $G:\Omega\times\Omega\to\Omega$ نگاشت پیوسته‌ای باشد که برای هر $X_1, X_2\subset\Omega$

$$\mu\big(G(X_1\times X_2)\big)\le\varphi\left(\frac{\mu(X_1)+\mu(X_2)}{2}\right)$$

صدق کند. آنگاه G حداقل یک زوج نقطه ثابت دارد.

آقاجانی و همکارانش همچنین نشان دادند که فرض $\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t)=0$ برای هر $t>0$ می تواند با شرط معادل زیر جایگزین شود.

۱-۱۱ لم [۲]. فرض کنید $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ یک تابع نانزولی و نیم پیوسته بالایی باشد. در این صورت شرایط زیر با هم معادلند

الف) برای هر $t>0$،

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t)=0$$

ب) برای هر $t>0$، $\varphi(t)<t$.

۱-۱۲ تبصره. از لم فوق بلافاصله نتیجه می‌شود که قضایای ۱-۹ و ۱-۱۰ با هم معادلند.

۱-۱۳ نتیجه [۳]. فرض کنید $G:\Omega\times\Omega\to\Omega$ یک تابع پیوسته به قسمی باشد که برای هر $X_1, X_2\subset\Omega$

$$\mu(G(X_1\times X_2))\le\frac{k}{2}(\mu(X_1)+\mu(X_2))$$

صدق کند که در آن $0\le k<1$ یک ثابت است. آنگاه G یک زوج نقطه ثابت دارد

۳- نتایج اصلی و یافته ها

در این بخش به اثبات چند قضیه برای وجود زوج نقطه ثابت برای یک کلاس خاص از عملگرها در فضاهای باناخ می‌پردازیم. این نتایج اساسی در بخش بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت. ابتدا رابطه ترتیب معمولی " $\preccurlyeq$" روی $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ را برای هر $t_1, s_1, t_2, s_2\in\mathbb{R}_+$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(t_1,s_1)\preccurlyeq(t_2,s_2)\Leftrightarrow t_1\le t_2, s_1\le s_2$$

فرض کنیم Γ نشان دهنده رده همه توابع $\varphi:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ باشند که در خواص زیر صدق می‌کنند

الف) برای هر $t_1, t_2, s_1, s_2\in\mathbb{R}_+$، $\varphi(t_1+t_2, s_1+s_2)\le\varphi(t_1,s_1)+\varphi(t_2,s_2)$

ب) φ یک تابع پیوسته و نانزولی روی $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ است و بعلاوه $\varphi(0,0)=0$.

بعنوان مثال توابع $\varphi(t,s)=\ln(t+s+1)$ و $\varphi(t,s)=\max\{t,s\}$ به Γ تعلق دارند.

بعلاوه فرض کنید $\mathfrak{R}$ رده همه توابع $\beta:\mathbb{R}_+\longrightarrow[0,1)$ به قسمی باشد که شرط $\beta(t_n)\longrightarrow 1$ ایجاب کند $t_n\longrightarrow 0$.

۱-2 قضیه. فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار، و محدب از فضای باناخ E باشد، μ یک اندازه نافشردگی دلخواه باشد.

بعلاوه $T:\Omega\times\Omega\to\Omega\times\Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد که برای هر زیر مجموعه ناتهی X از $\Omega\times\Omega$ در شرط انقباضی زیر صدق کند

$$\tilde{\mu}(TX)+\varphi(\tilde{\mu}(TX),\tilde{\mu}(TX))\le \beta(\tilde{\mu}(X))\big(\tilde{\mu}(X)+\varphi(\tilde{\mu}(X),\tilde{\mu}(X))\big)\quad(1)$$

که در آن $\tilde{\mu}$ در مثال ۱-۴ تعریف شده است و $\beta\in\mathfrak{R}$ و $\varphi:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ یک تابع پیوسته است. آنگاه T حداقل یک نقطه ثابت در $\Omega\times\Omega$ دارد.

اثبات. با استفاده از استقرا دنباله $\{\Omega_n \times \Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ را به قسمی می‌سازیم که $\Omega_0 = \Omega_0 \times \Omega \times \Omega$ و برای هر $n = 1,2,\cdots$،

$$\Omega_n \times \Omega_n = ConvT(\Omega_{n-1} \times \Omega_{n-1}).$$

در این صورت واضح است که

$$\cdots \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n \times \Omega_n \subseteq \cdots \subseteq \Omega_1 \times \Omega_1 \subseteq \Omega_0 \times \Omega_0$$

حال اگر یک عدد صحیح $N \geq 0$ موجود باشد به قسمی که

$$\tilde{\mu}(\Omega_N \times \Omega_N) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_N \times \Omega_N), \tilde{\mu}(\Omega_N \times \Omega_N)\big) = 0$$

آنگاه $\tilde{\mu}(\Omega_N \times \Omega_N) = 0$، به عبارتی $\Omega_N \times \Omega_N$ فشرده نسبی است و چون

$$T(\Omega_N \times \Omega_N) \subseteq \Omega_N \times \Omega_N$$

لذا قضیه ۱-۷ ایجاب می‌کند T حداقل یک نقطه ثابت دارد.

بنابراین می‌توان فرض کرد که برای هر $n \geq 0$،

$$\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n), \tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)\big) > 0$$

اکنون بنابر (۱) داریم

$$\begin{aligned}&\tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1}) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1}), \tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1})\big)\\ &= \tilde{\mu}\big(T(\Omega_n \times \Omega_n)\big) + \varphi\Big(\tilde{\mu}\big(T(\Omega_n \times \Omega_n)\big), \tilde{\mu}\big(T(\Omega_n \times \Omega_n)\big)\Big)\\ &\leq \beta\big(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)\big) \times \begin{pmatrix}\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n) + \\ \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n), \tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)\big)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2}$$

در نتیجه برای هر $n \geq 0$

$$\begin{aligned}&\tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1}) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1}), \tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1})\big)\\ &\leq \tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n), \tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)\big)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n), \tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)\big)$$

یک دنباله نانزولی و نامنفی از اعداد حقیقی است، لذا یک $r \geq 0$ موجود است به قسمی که

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n), \tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)\big)\Big) = r \tag{3}$$

حال نشان می‌دهیم $r = 0$. برعکس اگر $r > 0$، آنگاه از (۲) داریم

$$\frac{\tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1}) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1}), \tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1})\big)}{\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n), \tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)\big)} \leq \beta\big(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)\big) \tag{4}$$

در (۴) اگر $n \to \infty$ آنگاه با استفاده از (۳) داریم

$$\beta\big(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)\big) \to 1$$

چون $\beta \in \Re$، آن ایجاب می‌کند

$$\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n) \to 0 \quad \text{وقتی که} \quad n \to \infty.$$

لذا بنابر اصل ۶ از تعریف ۱-۱ نتیجه می‌شود که مجموعه $\Omega_\infty \times \Omega_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n \times \Omega_n$ ناتهی، بسته، محدب و پایا تحت عملگر T و متعلق به $Ker\mu$ است. اکنون بنابر قضیه ۱-۷، T دارای حداقل یک نقطه ثابت در $\Omega \times \Omega$ است.

۲-2 قضیه. فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار، و محدب از فضای باناخ E باشد، μ یک اندازه نافشردگی دلخواه باشد و $T: \Omega \times \Omega \to \Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد که برای هر $X_1, X_2 \subseteq \Omega \times \Omega$ در شرط انقباضی زیر صدق کند

$$\mu\big(T(X_1 \times X_2)\big) +$$

$$\varphi\left(\mu\big(T(X_1 \times X_2)\big), \mu(T(X_1 \times X_2))\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\beta\big(\mu(X_1) + \mu(X_2)\big) \times$$

$$\begin{pmatrix} \mu(X_1) + \mu(X_2) + \\ \varphi(\mu(X_1) + \mu(X_2), \mu(X_1) + \mu(X_2)) \end{pmatrix} (5)$$

که در آن، $\beta \in \Re$ و $\varphi \in \Gamma$. آنگاه T دارای حداقل یک زوج نقطه ثابت است.

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که مثال ۱-۵ ایجاب می‌کند که $\tilde{\mu}(X) = \mu(X_۱) + \mu(X_۲)$ یک اندازه نافشردگی در فضای باناخ $E \times E$ است. که در آن X_i برای $i = ۱,۲$ نشان دهنده تصاویر طبیعی از X بتوی E است. اکنون نگاشت $\tilde{T}$ روی $\Omega \times \Omega$ را برای هر $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ با ضابطه

$$\tilde{T}(x, y) = (T(x, y), T(y, x))$$

تعریف می‌کنیم. به آسانی قابل ملاحظه است که $\tilde{T}$ روی $\Omega \times \Omega$ پیوسته است. ادعا می‌کنیم $\tilde{T}$ در تمام شرایط قضیه ۲-۱ صدق می‌کند. برای اثبات این مطلب فرض کنید $X \subset \Omega \times \Omega$ یک مجموعه ناتهی باشد در این صورت بنابر اصل ۲ از تعریف ۱-۱ و (۵) داریم

$$\tilde{\mu}(\tilde{T}X) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\tilde{T}X), \tilde{\mu}(\tilde{T}X)\big)$$

$$+\varphi\begin{pmatrix} \tilde{\mu}\big(T(X_1 \times X_2) \times T(X_2 \times X_1)\big), \\ \tilde{\mu}\big(T(X_1 \times X_2) \times T(X_2 \times X_1)\big) \end{pmatrix}$$

$$= \mu(T(X_1 \times X_2)) + \mu(T(X_2 \times X_1))$$

$$+\varphi\begin{pmatrix} \mu\big(T(X_1 \times X_2)\big) + \mu\big(T(X_2 \times X_1)\big), \\ \mu(T(X_1 \times X_2)) + \mu(T(X_2 \times X_1)) \end{pmatrix}$$

$$\leq \begin{bmatrix} \mu\big(T(X_1 \times X_2)\big) + \\ \varphi\big(\mu(T(X_1 \times X_2)), \mu(T(X_1 \times X_2))\big) \end{bmatrix}$$

$$+ \left[\mu(T(X_2 \times X_1)) + \varphi\begin{pmatrix} \mu\big(T(X_2 \times X_1)\big), \\ \mu(T(X_2 \times X_1)) \end{pmatrix}\right]$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\beta\big(\mu(X_1) + \mu(X_2)\big) \times$$

$$\left(\mu(X_1) + \mu(X_2) + \varphi\begin{pmatrix} \mu(X_1) + \mu(X_2), \\ \mu(X_1) + \mu(X_2) \end{pmatrix}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\beta\big(\mu(X_1) + \mu(X_2)\big) \times$$

$$\left(\mu(X_1) + \mu(X_2) + \varphi\begin{pmatrix} \mu(X_1) + \mu(X_2), \\ \mu(X_1) + \mu(X_2) \end{pmatrix}\right)$$

$$= \beta\big(\mu(X_1) + \mu(X_2)\big) \times$$

$$\left(\mu(X_1) + \mu(X_2) + \varphi\begin{pmatrix} \mu(X_1) + \mu(X_2), \\ \mu(X_1) + \mu(X_2) \end{pmatrix}\right)$$

$$= \beta(\tilde{\mu}(X))\big((\tilde{\mu}(X) + \varphi(\tilde{\mu}(X), \tilde{\mu}(X))\big)$$

از این رو بنابر قضیه ۲-۱ T دارای حداقل یک زوج نقطه ثابت است.

با انتخاب $\varphi \equiv ۰$ در قضیه ۲-۲ نتیجه زیر را داریم:

۲-۳ نتیجه. فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار، و محدب از فضای باناخ E باشد، μ یک اندازه نافشردگی دلخواه باشد و $T: \Omega \times \Omega \to \Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد که برای هر $X_۱, X_۲ \subseteq \Omega \times \Omega$ در شرط انقباضی زیر صدق کند

$$\mu\big(T(X_1 \times X_2)\big) \leq \frac{1}{2}\beta\big(\mu(X_1) + \mu(X_2)\big) \times (\mu(X_1) + \mu(X_2))$$

که در آن، $\beta \in \Re$. آنگاه T دارای حداقل یک زوج نقطه ثابت است.

۲-٤ تبصره. با انتخاب $\beta(t) = k$ برای $۰ \leq k < ۱$ در نتیجه ۲-۳ نتیجه ۱-۱۳ حاصل می‌شود.

۲-۵ نتیجه. فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار، و محدب از فضای باناخ E باشد. بعلاوه $T: \Omega \times \Omega \to \Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد که برای هر $X_۱, X_۲ \subseteq \Omega \times \Omega$ در شرط انقباضی زیر صدق کند

$$\mu(T(X_1 \times X_2)) \le \frac{k}{2}[\mu(X_1) + \mu(+\ln(\mu(X_1) + \mu(X_2) + 1)]$$

که در آن μ یک اندازه نافشردگی دلخواه است و k یک عدد ثابت است که $۰ \le k < ۱$. آنگاه T دارای حداقل یک زوج نقطه ثابت است.

اثبات. با انتخاب $\varphi(t,s) = \ln(t + s + ۱)$ و $\beta(t) = k$ در قضیه ۲-۲ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

در ادامه، با استفاده از دو رده از توابع Λ و Γ که در بالا تعریف شده اند ، قضایایی در زمینه زوج نقطه ثابت ارائه می‌دهیم.

۲-٦ قضیه. فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار، و محدب از فضای باناخ E باشد، μ یک اندازه نافشردگی دلخواه باشد و $T:\Omega \times \Omega \to \Omega \times \Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد که برای هر زیر مجموعه ناتهی X از $\Omega \times \Omega$ در شرط انقباضی زیر صدق کند

$$\tilde{\mu}(TX) + \varphi\big(\tilde{\mu}(TX), \tilde{\mu}(TX)\big) \le \psi\left(\frac{\tilde{\mu}(X)}{۲} + \varphi(\tilde{\mu}(X), \tilde{\mu}(X))\right) \qquad (۶)$$

که در آن $\tilde{\mu}$ در مثال ۱-۴ تعریف شده است و $\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ یک تابع پیوسته است و $\psi \in \Lambda$. آنگاه T حداقل یک نقطه ثابت در $\Omega \times \Omega$ دارد.

اثبات. همانند اثبات قضیه ۲-۱ دنباله $\{\Omega_n \times \Omega_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را با ضابطه

$$\Omega_. \times \Omega_. = \Omega \times \Omega, \qquad (7)$$

$$\Omega_n \times \Omega_n = ConvT\big(\Omega_{n-۱} \times \Omega_{n-۱}\big)$$

برای هر $n = ۱,۲,\cdots$ به قسمی می‌سازیم که

$$\cdots \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n \times \Omega_n \subseteq \cdots \subseteq \Omega_1 \times \Omega_1 \subseteq \Omega_0 \times \Omega_0$$

اگر یک عدد صحیح $N \ge ۰$ به قسمی موجود باشد که

$$\tilde{\mu}(\Omega_N \times \Omega_N) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_N \times \Omega_N), \tilde{\mu}(\Omega_N \times \Omega_N)\big) = ۰$$

آنگاه $\tilde{\mu}(\Omega_N \times \Omega_N) = ۰$، به عبارتی $\Omega_N \times \Omega_N$ فشرده نسبی است و چون

$$T(\Omega_N \times \Omega_N) \subseteq \Omega_N \times \Omega_N$$

لذا قضیه ۱-۷ ایجاب می‌کند T حداقل یک نقطه ثابت دارد.
بنابراین برای هر $n \ge ۰$ می‌توان فرض کرد

$$\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n) + \varphi(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n), \tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)) > 0$$

اکنون بنابر (۶) داریم

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1}) + \varphi(\tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1}), \tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1})) \\
&= \tilde{\mu}\big(T(\Omega_n \times \Omega_n)\big) + \varphi\Big(\tilde{\mu}\big(T(\Omega_n \times \Omega_n)\big), \tilde{\mu}\big(T(\Omega_n \times \Omega_n)\big)\Big) \\
&\le \psi\left(\frac{\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)}{2} + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n), \tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)\big)\right) \\
&\le \psi\left(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n), \tilde{\mu}(\Omega_n \times \Omega_n)\big)\right) \\
&\le \psi^2\left(\frac{\tilde{\mu}(\Omega_{n-1} \times \Omega_{n-1})}{2} + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_{n-1} \times \Omega_{n-1}), \tilde{\mu}(\Omega_{n-1} \times \Omega_{n-1})\big)\right) \\
&\le \psi^n\Big(\tilde{\mu}(\Omega \times \Omega) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega \times \Omega), \tilde{\mu}(\Omega \times \Omega)\big)\Big).
\end{aligned}$$

در نتیجه برای هر $n \ge 0$

$$\tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1}) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1}), \tilde{\mu}(\Omega_{n+1} \times \Omega_{n+1})\big) \le \psi^n\Big(\tilde{\mu}(\Omega \times \Omega) + \varphi\big(\tilde{\mu}(\Omega \times \Omega), \tilde{\mu}(\Omega \times \Omega)\big)\Big) \qquad (8)$$

و این ایجاب می‌کند که

$\to \cdot \lim_{n\to\infty}\tilde{\mu}(\Omega_{n+1}\times\Omega_{n+1})$

وقتی $n\to\infty$.

لذا بنابر اصل ۶ از تعریف ۱-۱ نتیجه می‌شود که مجموعه $\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n\times\Omega_n\Omega_\infty\times\Omega_\infty =$ ناتهی، بسته، محدب و پایا تحت عملگر T و متعلق به $Ker\mu$ است. اکنون بنابر قضیه 1-7، T دارای حداقل یک نقطه ثابت در $\Omega\times\Omega$ است.

۷-2 قضیه. فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار، و محدب از فضای باناخ E باشد، μ یک اندازه نافشردگی دلخواه باشد. و$T:\Omega\times\Omega\to\Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد که برای هر

$X_1, X_2\subseteq\Omega\times\Omega$ در شرط انقباضی زیر صدق کند

$$\mu\big(T(X_1\times X_2)\big)+\varphi\left(\mu\big(T(X_1\times X_2)\big),\mu\big(T(X_1\times X_2)\big)\right)\le\frac{1}{2}\psi\begin{pmatrix}\frac{\mu(X_1)+\mu(X_2)}{2}+\\ \varphi(\mu(X_1)+\mu(X_2),\mu(X_1)+\mu(X_2))\end{pmatrix}$$

که در آن $\varphi\in\Gamma$ و $\psi\in\Lambda$ ، آنگاه T حداقل یک زوج نقطه ثابت دارد.

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که مثال ۱-۵ ایجاب می‌کند که $\tilde{\mu}(X)=\mu(X_1)+\mu(X_2)$ یک اندازه نافشردگی در فضای باناخ $E\times E$ است که در آن X_i، $i=1,2$ نشان دهنده تصاویر طبیعی از X بتوی E است. اکنون نگاشت $\tilde{T}$ روی $\Omega\times\Omega$ را برای هر $(x,y)\in\Omega\times\Omega$ با ضابطه

$$\tilde{T}(x,y)=(T(x,y),T(y,x))$$

تعریف می‌کنیم.

به آسانی قابل ملاحظه است که $\tilde{T}$ روی $\Omega\times\Omega$ پیوسته است. ادعا می‌کنیم که $\tilde{T}$ در تمام شرایط قضیه ۲-۶ صدق می‌کند. برای اثبات این مطلب فرض کنید $X\subset\Omega\times\Omega$ یک زیر مجموعه ناتهی باشد. آنگاه بنابر اصل ۲ از تعریف ۱-۱ و (۹) داریم

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mu}(\tilde{T}X)+\varphi\big(\tilde{\mu}(\tilde{T}X),\tilde{\mu}(\tilde{T}X)\big)\le\tilde{\mu}(T(X_1\times X_2),T(X_2\times X_1))\\
&+\varphi\big(\tilde{\mu}(T(X_1\times X_2)\times T(X_2\times X_1)),\tilde{\mu}(T(X_1\times X_2)\times T(X_2\times X_1))\big)\\
&=\mu(T(X_1\times X_2))+\mu(T(X_2\times X_1))\\
&+\varphi\begin{pmatrix}\mu\big(T(X_1\times X_2)\big)+\mu\big(T(X_2\times X_1)\big),\\ \mu\big(T(X_1\times X_2)\big)+\mu\big(T(X_2\times X_1)\big)\end{pmatrix}\\
&\le\mu\big(T(X_1\times X_2)\big)+\\
&\quad\varphi\big(\mu(T(X_1\times X_2)),\mu(T(X_1\times X_2))\big)\\
&+\mu\big(T(X_2\times X_1)\big)+\\
&\quad\varphi\big(\mu(T(X_2\times X_1)),\mu(T(X_2\times X_1))\big)\\
&\le\frac{1}{2}\psi\begin{pmatrix}\frac{\mu(X_1)+\mu(X_2)}{2}+\\ \varphi(\mu(X_1)+\mu(X_2),\mu(X_1)+\mu(X_2))\end{pmatrix}\\
&+\frac{1}{2}\psi\begin{pmatrix}\frac{\mu(X_2)+\mu(X_1)}{2}+\\ \varphi(\mu(X_2)+\mu(X_1),\mu(X_2)+\mu(X_1))\end{pmatrix}\\
&=\psi\left(\frac{\tilde{\mu}(X)}{2}+\varphi(\tilde{\mu}(X),\tilde{\mu}(X))\right).\qquad(10)
\end{aligned}$$

از این رو بنابر قضیه ۲-۶ T حداقل دارای یک زوج نقطه ثابت است.

اکنون با انتخاب $\varphi\equiv 0$ در قضیه ۲-۷ نتیجه زیر را داریم

۸-2 نتیجه. فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار، و محدب از فضای باناخ E باشد، μ یک اندازه نافشردگی دلخواه باشد. بعلاوه$T:\Omega\times\Omega\to\Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد که برای هر

$X_1, X_2\subseteq\Omega\times\Omega$ در شرط انقباضی زیر صدق کند

$$\mu\big(T(X_1\times X_2)\big)\le\frac{1}{2}\psi\left(\frac{\mu(X_1)+\mu(X_2)}{2}\right)$$

که در آن $\psi\in\Lambda$. آنگاه T حداقل یک زوج نقطه ثابت دارد.

۲-۹ تبصره. با انتخاب $\psi\psi_۱ = \frac{۱}{۲}$ در نتیجه ۲-۸ *و با توجه به تبصره ۱-۱۲ قضایای ۱-۹ و ۱-۱۰ نتیجه می‌شوند.*

۲-۱۰ نتیجه. فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار، و محدب از فضای باناخ E باشد، μ یک اندازه نافشردگی دلخواه باشد. بعلاوه $T:\Omega \times \Omega \to \Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد که برای هر

$X_۱, X_۲ \subseteq \Omega \times \Omega$ در شرط انقباضی زیر صدق کند

$$\mu\left(T(X_1 \times X_2)\right) \leq \frac{1}{4}\ln\left(1 + \frac{3\mu(X_1) + 3\mu(X_2)}{4}\right)$$

آنگاه T حداقل یک زوج نقطه ثابت دارد.

اثبات. با انتخاب $\varphi(t,s) = \max\{t,s\}$ و $\psi(t) = \ln\left(۱ + \frac{t}{۲}\right)$ در قضیه ۲-۷ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

4-بررسی وجود جواب یک دستگاه از معادلات انتگرال

در این بخش فضای باناخ $BC(\mathbb{R}_+)$ شامل همه توابع حقیقی کراندار و پیوسته روی $\mathbb{R}_+$ با نرم سوپریمم

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|: t \geq ۰\}$$

را در نظر می‌گیریم. در ادامه از یک اندازه نافشردگی روی $BC(\mathbb{R}_+)$ که در منابع

[۸ و۹] آمده است استفاده خواهیم کرد. به منظور تعریف این اندازه نافشردگی یک مجموعه ناتهی و کراندار و از این پس ثابت X از $BC(\mathbb{R}_+)$ و عدد حقیقی $L > ۰$ را در نظر می‌گیریم. برای $x \in X$ و $\varepsilon \geq ۰$ مدول پیوستگی یا ضریب پیوستگی x روی بازه $[۰, L]$ را با نماد $\omega^L(x,\varepsilon)$ نشان می‌دهیم به عبارتی

$$\omega^L(x,\varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)|: t,s \in [۰, L], |t-s| \leq \varepsilon\}$$

بعلاوه قرار می‌دهیم

$$\omega^L(X,\varepsilon) = \sup\{\omega^L(x,\varepsilon): x \in X\},$$

$$\omega_۰^L(X) = \lim_{\varepsilon\to ۰}\omega^L(X,\varepsilon),$$

$$\omega_۰(X) = \lim_{L\to\infty}\omega_۰^L(X)$$

اگر t یک عدد ثابت در $\mathbb{R}_+$ باشد، آنگاه قرار می‌دهیم $X(t) = \{x(t): x \in X\}$. سرانجام تابع μ روی $\mathcal{M}_{BC(\mathbb{R}_+)}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu(X) = \omega_۰(X) + \limsup_{t\to\infty} diam X(t) \quad (۱۱)$$

که در آن

$$diam X(t) = \sup\{|x(t) - y(t)|: x, y \in X\}.$$

در منابع [۸ و۹] نشان داده شده که تابع $\mu(X)$ یک اندازه نافشردگی زیر خطی است که در تمام اصول موضوعه تعریف ۱-۱ صدق می‌کند.

بعنوان یک کاربرد از نتیجه ۲-۱۰، قصد داریم وجود جواب برای یک دستگاه از معادلات انتگرال غیر خطی زیر را بررسی کنیم

$$x(t) = A(t) + h\left(t, x(\xi(t)), y(\xi(t))\right) + f\left(t, x(\xi(t)), y(\xi(t))\right) \times \varphi\left(\int_0^{\beta(t)} g(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s)))ds\right)$$

و

$$y(t) = A(t) + h\left(t, y(\xi(t)), x(\xi(t))\right) + f\left(t, y(\xi(t)), x(\xi(t))\right) \times \varphi\left(\int_0^{\beta(t)} g(t,s,y(\eta(s)),x(\eta(s)))ds\right)$$

(12)

برای این منظور شرایط زیر را در نظر می‌گیریم

الف) تابع $A:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ پیوسته و کراندار باشد و

$$M_۱ = \sup\{|A(t)|: t \in \mathbb{R}_+\}.$$

ب) توابع $\xi, \eta, \beta:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ پیوسته باشند و $\xi(t) \to \infty$ وقتی $t \to \infty$.

ج) تابع $\varphi:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $\varphi(۰) = ۰$ و ثابت های مثبت α, δ به قسمی موجود باشند که برای هر $t_۱, t_۲ \in \mathbb{R}_+$، (۱۵)

$$|\varphi(t_۱) - \varphi(t_۲)| \le \delta |t_۱ - t_۲|^\alpha$$

د) توابع تعریف شده با ضابطه‌های $t \to |f(t,\cdot,\cdot)|$ و $t \to |h(t,\cdot,\cdot)|$ روی $\mathbb{R}_+$ کراندار باشند و بعلاوه

$$M_2 = \sup\{|f(t,0,0)|: t \in \mathbb{R}_+\} < \infty$$

$$M_3 = \sup\{|h(t,0,0)|: t \in \mathbb{R}_+\} < \infty$$

ه) توابع $f:\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $h:\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته باشند و برای هر $t \ge ۰$ و هر $x, y, u, v \in \mathbb{R}$

$$|h(t,x,y) - h(t,u,v)| \le \frac{1}{32}\ln\left(1 + \frac{3|x-u| + 3|y-v|}{4}\right)$$

$$|f(t,x,y) - f(t,u,v)| \le \frac{1}{32}\ln\left(1 + \frac{3|x-u| + 3|y-v|}{4}\right)$$

و) $g:\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته به قسمی باشد که

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{\beta(t)} \left| \begin{matrix} g\left(t, s, x(\eta(s)), y(\eta(s))\right) \\ -g\left(t, s, u(\eta(s)), v(\eta(s))\right) \end{matrix} \right| ds = 0 \qquad (14)$$

بطور یکنواخت نسبت به $x, y, u, v \in BC(\mathbb{R}_+)$، باشد، و $\delta M_۴ < ۱$، که در آن

$$M_۴ = \sup\left\{ \left| \int_0^{\beta(t)} g\left(t, s, x(\eta(s)), y(\eta(s))\right) ds \right|^\alpha : t \in \mathbb{R}_+, x, y \in BC(\mathbb{R}_+) \right\},$$

اکنون ادعای خود را بصورت زیر صورت بندی می-کنیم:

۱-۳ قضیه. اگر شرایط (الف) تا (و) برقرار باشند. آنگاه معادله (۱۲) حداقل یک جواب در فضای $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ دارد.

اثبات. عملگر

$$F: BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+) \to BC(\mathbb{R}_+)$$

را با ضابطه

$$F(x,y)(t) = A(t) + h\left(t, x(\xi(t)), y(\xi(t))\right) + f\left(t, x(\xi(t)), y(\xi(t))\right) \times \varphi\left(\int_0^{\beta(t)} g(t, s, x(\eta(s)), y(\eta(s))) ds \right) \qquad (۱۶)$$

تعریف می‌کنیم.

فضای $E := BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ را برای هر $(x,y) \in E$ به نرم

$$\|(x,y)\|_E = \|x\| + \|y\|$$

مجهز می‌کنیم. بوضوح $F(x,y)$ برای هر $(x,y)\in E$ پیوسته است. بعلاو ه بنابر (۱۵) و (۱۶) و (الف)، (ج)، (د)، (ه) و نامساوی مثلثی داریم

$$
\begin{aligned}
&|F(x,y)(t)| \le |A(t)| + \\
&\big|h\big(t,x(\xi(t)),y(\xi(t))\big)-h(t,0,0)\big| \\
&\qquad + |h(t,\cdot,\cdot)| \\
&+\big(|f(t,x(\xi(t)),y(\xi(t)))-f(t,0,0)| \\
&\qquad + |f(t,\cdot,\cdot)|\big) \\
&\times\left|\varphi\left(\int_0^{\beta(t)} g(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s)))ds\right)\right| \\
&\le M_1+\frac{1}{32}\ln\bigg(1 \\
&\qquad +\frac{3|x(\xi(t))|+3|y(\xi(t))|}{4}\bigg) \\
&+M_3 \\
&\quad +\left(\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3|x(\xi(t))|+3|y(\xi(t))|}{4}\right)\right. \\
&\quad \left. + M_2\right) \\
&\quad \times\delta\left|\int_0^{\beta(t)} g(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s)))ds\right|^{\alpha} \\
&\le M_1+\frac{3\|x\|+3\|y\|}{128}+M_3 \\
&+\delta\left(\frac{3\|x\|+3\|y\|}{128}+M_2\right)M_4 \\
&\le r, \qquad\qquad (17)
\end{aligned}
$$

که در آن $r=\frac{64M_1+64M_3+64\delta M_2M_4}{61-3\delta M_4}$.

بنابراین F خوش تعریف است و برآورد (۱۷) نشان می‌دهد که $F(\bar{B}_r\times\bar{B}_r)\subseteq\bar{B}_r$.

اکنون نشان می‌دهیم F روی $\bar{B}_r\times\bar{B}_r$ پیوسته است. برای این منظور فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ دلخواه باشد و $(x,y)\in\bar{B}_r\times\bar{B}_r$ را انتخاب می‌کنیم. بعلاوه $(u,v)\in\bar{B}_r\times\bar{B}_r$ را به قسمی در نظر می‌گیریم

$$\|(x,y)-(u,v)\|_E<\varepsilon$$

در این صورت برآورد زیر را داریم

$$
\begin{aligned}
&|F(x,y)(t)-F(u,v)(t)| \\
&\le \big|h\big(t,x(\xi(t)),y(\xi(t))\big) \\
&\qquad - h\big(t,u(\xi(t)),v(\xi(t))\big)\big| \\
&+\big|f\big(t,x(\xi(t)),y(\xi(t))\big) \\
&-f\big(t,u(\xi(t)),v(\xi(t))\big)\big| \\
&\times\left|\varphi\left(\int_0^{\beta(t)} g(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s)))ds\right)\right| \\
&+\Big(\big|f\big(t,u(\xi(t)),v(\xi(t))\big)-f(t,0,0)\big| \\
&\qquad +|f(t,0,0)|\Big) \\
&\times\left|\varphi\left(\int_0^{\beta(t)} g(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s)))ds\right)\right. \\
&\left.-\varphi\left(\int_0^{\beta(t)} g(t,s,u(\eta(s)),v(\eta(s)))ds\right)\right| \\
&\le\frac{1}{32}\ln\bigg(1 \\
&+\frac{3|x(\xi(t))-u(\xi(t))|+3|y(\xi(t))-v(\xi(t))|}{4}\bigg) \\
&+\frac{1}{32}\ln\bigg(1 \\
&+\frac{3|x(\xi(t))-u(\xi(t))|+3|y(\xi(t))-v(\xi(t))|}{4}\bigg) \\
&\times\delta\left|\int_0^{\beta(t)} g(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s)))ds\right|^{\alpha} \\
&\qquad +\bigg(\frac{1}{32}\ln\bigg(1 \\
&\qquad +\frac{3|x(\xi(t))|+3|y(\xi(t))|}{4}\bigg) \\
&\qquad + M_2\bigg) \\
&\quad\times\delta\left|\int_0^{\beta(t)}\big[g(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s)))\right. \\
&\quad\left.-g(t,s,u(\eta(s)),v(\eta(s)))\big]ds\right|^{\alpha}
\end{aligned}
$$

$$\le \left(\frac{3}{64}+\frac{3}{64}\delta M_4\right)\varepsilon+\left(\frac{3}{64}r+M_2\right)\times$$

$$\delta\left|\int_0^{\beta(t)}\begin{bmatrix} g\left(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s))\right)\\ -g(t,s,u(\eta(s)),v(\eta(s)))\end{bmatrix}ds\right|^{\alpha}.$$

بعلاوه بنابر (۱۴) عددی چون $L>0$ وجود دارد به قسمی که اگر $t>L$ آنگاه برای هر $x,y,u,v\in BC(\mathbb{R}_+)$

$$\left|\int_0^{\beta(t)}\left[g\begin{pmatrix} t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s))\\ -g(t,s,u(\eta(s)),v(\eta(s)))\end{pmatrix}ds\right]\right|$$

$$\le\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (19)$$

اکنون دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $t>L$ آنگاه از (۱۸) و (۱۹) داریم

$$|F(x,y)(t)-F(u,v)(t)|\le\left(\frac{3}{64}+\frac{3}{64}\delta M_4\right)\varepsilon+\left(\frac{3}{64}r+M_2\right)\varepsilon. \qquad (20)$$

حالت دوم: اگر $t\in[0,L]$ آنگاه با بحثی همانند آنچه در (۱۸) بدست آوردیم داریم

$$|F(x,y)(t)-F(u,v)(t)|$$

$$\le\left(\frac{3}{64}+\frac{3}{64}\delta M_4\right)\varepsilon+\left(\frac{3}{64}r+M_2\right)\times$$

$$\delta\left|\int_0^{\beta(t)}\begin{pmatrix} g\left(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s))\right)\\ -g\left(t,s,u(\eta(s)),v(\eta(s))\right)\end{pmatrix}ds\right|^{\alpha}$$

$$<\left(\frac{3}{64}+\frac{3}{64}\delta M_4\right)\varepsilon+$$

$$\delta\left(\frac{3}{64}r+M_2\right)(\beta_L\omega(\varepsilon))^{\alpha}, \qquad (21)$$

که در آن

$$\omega(\varepsilon)=\sup\left\{\begin{matrix}|g(t,s,x,y)-g(t,s,u,v)|:\\ t\in[0,L],\\ s\in[0,\beta_L],x,y,u,v\in[-r,r],\\ \|(x,y)-(u,v)\|_E<\varepsilon\end{matrix}\right\}$$

و

$\beta_L=\sup\{\beta(t):t\in[0,L]\}$.

با استفاده از پیوستگی g روی

$$[0,L]\times[0,\beta_L]\times[-r,r]\times[-r,r]$$

نتیجه می‌شود که $\omega(\varepsilon)\to 0$ وقتی که $\varepsilon\to 0$. از این رو (۲۰) و (۲۱) ایجاب می‌کنند که F یک تابع پیوسته از $\bar{B}_r\times\bar{B}_r$ بتوی $\bar{B}_r$ است. اکنون باید نشان دهیم F در شرایط نتیجه ۲-۱۰ صدق می‌کند. برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$, L و X_1, X_2 زیر مجموعه های ناتهی از $\bar{B}_r$ باشند. $t_1, t_2\in[0,L]$ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که $|t_1-t_2|\le\varepsilon$. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $\beta(t_1)<\beta(t_2)$ در این صورت برای $(x,y)\in X_1\times X_2$ داریم

$$|F(x,y)(t_1)-F(x,y)(t_2)|$$

$$\le|A(t_1)-A(t_2)|$$

$$+\left|\begin{matrix} h(t_1,x(\xi(t_1)),y(\xi(t_1)))\\ -h(t_2,x(\xi(t_1)),y(\xi(t_1)))\end{matrix}\right|$$

$$+\left|\begin{matrix} h(t_2,x(\xi(t_1)),y(\xi(t_1)))\\ -h(t_2,x(\xi(t_2)),y(\xi(t_2)))\end{matrix}\right|$$

$$+\left|\begin{matrix} f\left(t_1,x(\xi(t_1)),y(\xi(t_1))\right)\\ -f\left(t_2,x(\xi(t_1)),y(\xi(t_1))\right)\end{matrix}\right|\times$$

$$\left|\varphi\left(\int_0^{\beta(t_1)}g\left(t_1,s,x(\eta(s)),y(\eta(s))\right)ds\right)\right|$$

$$+\left|\begin{matrix} f\left(t_2,x(\xi(t_1)),y(\xi(t_1))\right)\\ -f\left(t_2,x(\xi(t_2)),y(\xi(t_2))\right)\end{matrix}\right|\times$$

$$\left|\varphi\left(\int_0^{\beta(t_1)}g\left(t_1,s,x(\eta(s)),y(\eta(s))\right)ds\right)\right|$$

$$+\left(\begin{matrix}\left|\begin{matrix} f\left(t_2,x(\xi(t_2)),y(\xi(t_2))\right)\\ -f(t_2,0,0)\end{matrix}\right|\\ +|f(t_2,0,0)|\end{matrix}\right)\times$$

$$\left|\varphi\left(\int_0^{\beta(t_1)} g\left(t_1, s, x(\eta(s)), y(\eta(s))\right) ds\right) - \varphi\left(\int_0^{\beta(t_2)} g\left(t_2, s, x(\eta(s)), y(\eta(s))\right) ds\right)\right|$$

$$\leq \omega^L(A,\varepsilon) + \omega_r^L(h,\varepsilon) + \frac{1}{32}\ln\left(+\frac{3\omega^L\left(x,\omega^L(\xi,\varepsilon)\right) + 3\omega^L\left(y,\omega^L(\xi,\varepsilon)\right)}{4}\right)$$

$$+\delta\omega_r^L(f,\varepsilon)M_4 + \frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3\omega^L\left(x,\omega^L(\xi,\varepsilon)\right)+3\omega^L\left(y,\omega^L(\xi,\varepsilon)\right)}{4}\right)\delta M_4$$

$$+\left(\frac{3}{64}r + M_2\right) \times \begin{pmatrix} \delta\left(\beta_L\omega_r^L(g,\varepsilon)\right)^\alpha \\ +\delta\left(K\omega^L(\beta,\varepsilon)\right)^\alpha \end{pmatrix}$$

$$\leq \omega^L(A,\varepsilon) + \omega_r^L(h,\varepsilon) + \frac{1}{16}\ln\left(1 + \frac{3\omega^L\left(x,\omega^L(\xi,\varepsilon)\right) + 3\omega^L\left(y,\omega^L(\xi,\varepsilon)\right)}{4}\right)$$
$$+\omega_r^L(f,\varepsilon) + \left(\frac{3}{64}r + M_2\right) \times \left(\delta\left(\beta_L\omega_r^L(g,\varepsilon)\right)^\alpha + \delta\left(K\omega^L(\beta,\varepsilon)\right)^\alpha\right), \quad (22)$$

که در آن

$$\omega^L(A,\varepsilon) = \sup\left\{\begin{matrix}|A(t_1) - A(t_2)|: t_1, t_2 \in \\ [0,L], |t_1 - t_2| \leq \varepsilon\end{matrix}\right\},$$

$$\omega_r^L(h,\varepsilon) = \sup\left\{\begin{matrix}|h(t_2,x,y) - h(t_1,x,y)|: t_1, t_2 \\ \in [0,L], |t_1 - t_2| \leq \varepsilon, x, y \in [-r,r]\end{matrix}\right\}$$

$$\omega^L(\xi,\varepsilon) = \sup\left\{\begin{matrix}|\xi(t_1) - \xi(t_2)|: t_1, t_2 \in \\ [0,L], |t_1 - t_2| \leq \varepsilon\end{matrix}\right\},$$

$$\omega^L\left(x,\omega^L(\xi,\varepsilon)\right) = \sup\left\{\begin{matrix}\left|\begin{matrix}x(t_1) - \\ x(t_2)\end{matrix}\right|: t_1, t_2 \in [0,L], \\ |t_1 - t_2| \leq \omega^L(\xi,\varepsilon)\end{matrix}\right\},$$

$$K = \beta_L \sup\left\{\begin{matrix}|g(t,s,x,y)|: t \in [0,L], s \in \\ [0,\beta_L], x, y \in [-r,r]\end{matrix}\right\},$$

$$\omega_r^L(f,\varepsilon) = \sup\left\{\begin{matrix}\left|\begin{matrix}f(t_2,x,y) - \\ f(t_1,x,y)\end{matrix}\right|: t_1, t_2 \\ \in [0,L], |t_1 - t_2| \leq \varepsilon, x, y \in [-r,r]\end{matrix}\right\},$$

$$\omega_r^L(g,\varepsilon) = \sup\left\{\begin{matrix}\left|\begin{matrix}g(t_1,s,x,y) \\ -g(t_2,s,x,y)\end{matrix}\right|: t_1, t_2 \in [0,L], |t_1 - t_2| \leq \varepsilon, \\ s \in [0,\beta_L], x, y \in [-r,r]\end{matrix}\right\},$$

$$\omega^L(\beta,\varepsilon) = \sup\left\{\begin{matrix}|\beta(t_1 - \beta(t_2)|: \\ t_1, t_2 \in [0,L], |t_1 - t_2| \leq \varepsilon\end{matrix}\right\}.$$

چون (x,y) یک عضو دلخواه $X_۱ \times X_۲$ در (۲۲) است لذا

$$\omega^L(F(X_1 \times X_2),\varepsilon) \leq \omega^L(A,\varepsilon) + \omega_r^L(h,\varepsilon) + \frac{1}{16}\ln\left(1 + \frac{3\omega^L\left(x,\omega^L(\xi,\varepsilon)\right) + 3\omega^L\left(y,\omega^L(\xi,\varepsilon)\right)}{4}\right)$$
$$+\delta\omega_r^L(f,\varepsilon)M_4 + \left(\frac{3}{64}r + M_2\right) \times \left(\delta\left(\beta_L\omega_r^L(g,\varepsilon)\right)^\alpha + \delta\left(K\omega^L(\beta,\varepsilon)\right)^\alpha\right). \quad (23)$$

حال پیوستگی یکنواخت g ,fh, بترتیب روی $[0,L] \times [-r,r] \times [-r,r]$، $[۰,L] \times [۰,\beta_L] \times [-r,r] \times [-r,r]$ و $[۰,L] \times [-r,r] \times [-r,r]$ ایجاب می‌کند که $\omega_r^L(f,\varepsilon) \to ۰$، $\omega_r^L(g,\varepsilon) \to ۰$ و $\omega_r^L(h,\varepsilon) \to ۰$ وقتی $\varepsilon \to ۰$. همچنین پیوستگی یکنواخت ξ, β و A روی $[۰,L]$ایجاب می‌کند $\omega^L(\xi,\varepsilon) \to ۰$، $\omega^L(\beta,\varepsilon) \to ۰$ و $\omega^L(A,\varepsilon) \to ۰$ وقتی $\varepsilon \to ۰$.
بنابراین با حد گرفتن در (۲۳) وقتی $\varepsilon \to ۰$ داریم

$$\omega_0^L\left(F(X_1 \times X_2)\right) \leq \frac{1}{16}\ln\left(1 + \frac{3\omega_0^L(X_1) + 3\omega_0^L(X_2)}{4}\right) \quad (24)$$

حال اگر در (۲۴) $L \to \infty$ آنگاه

$$\omega_0\big(F(X_1\times X_2)\big)\le \frac{1}{16}\ln\left(1+\frac{3\omega_0(X_1)+3\omega_0(X_2)}{4}\right) \qquad (25)$$

بعلاوه برای هر $(x,y),(u,v)\in X_۱\times X_۲$ و $t\in\mathbb{R}_+$ دلخواه داریم

$$\begin{aligned}
|F(x,y)(t)-F(u,v)(t)| &\le \big|h(t,x(\xi(t)),y(\xi(t)))-h(t,u(\xi(t)),v(\xi(t)))\big| \\
&+\left|\begin{matrix} f\big(t,x(\xi(t)),y(\xi(t))\big)\\ -f(t,u(\xi(t)),v(\xi(t)))\end{matrix}\right|\times \left|\varphi\left(\int_0^{\beta(t)} g(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s)))ds\right)\right| \\
&+\left(\left|\begin{matrix} f\big(t,u(\xi(t)),v(\xi(t))\big)\\ -f(t,0,0)\end{matrix}\right|+|f(t,0,0)|\right)\times \\
&\left|\begin{matrix}\varphi\left(\int_0^{\beta(t)} g\big(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s))\big)ds\right)\\ -\varphi\left(\int_0^{\beta(t)} g(t,s,u(\eta(s)),v(\eta(s)))ds\right)\end{matrix}\right| \\
&\le \frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3diamX_1(\xi(t))+3diamX_2(\xi(t))}{4}\right)+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3diamX_1(\xi(t))+3diamX_2(\xi(t))}{4}\right)\delta M_4 \\
&+\left(\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3|u(\xi(t))|+3|v(\xi(t))|}{4}\right)+M_2\right)\times \\
&\delta\left|\int_0^{\beta(t)}\begin{pmatrix} g(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s)))\\ -g(t,s,u(\eta(s)),v(\eta(s)))\end{pmatrix}ds\right|^{\alpha} \\
&\le \frac{1}{16}\ln\left(1+\frac{3diamX_1(\xi(t))+3diamX_2(\xi(t))}{4}\right)+\left(\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3\|u\|+3\|v\|}{4}\right)+M_2\right)\times \\
&\delta\left|\int_0^{\beta(t)}\begin{pmatrix} g\big(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s))\big)\\ -g(t,s,u(\eta(s)),v(\eta(s)))\end{pmatrix}ds\right|^{\alpha}.
\end{aligned} \qquad (26)$$

چون $(x,y),(u,v)$ و t در (۲۶) دلخواه اند این ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}
diamF(X_1\times X_2)(t) &\le \frac{1}{16}\ln\left(1+\frac{3diamX_1\big(\xi(t)\big)+3diamX_2\big(\xi(t)\big)}{4}\right) \\
&+\left(\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3\|u\|+3\|v\|}{4}\right)+M_2\right)\times \\
&\delta\left|\int_0^{\beta(t)}\begin{pmatrix} g\big(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s))\big)\\ -g(t,s,u(\eta(s)),v(\eta(s)))\end{pmatrix}ds\right|^{\alpha}
\end{aligned}$$

از این رو با توجه به (ب) و این که در نامساوی (۲۷) $\xi(t)\to\infty$ وقتی $t\to\infty$ و سپس با استفاده از (۱۴) نتیجه می‌شود که

$$\limsup_{t\to\infty} diamF(X_1\times X_2)(t)\le \frac{1}{16}\ln\left(1+\frac{3diam\,X_1(\xi(t))+3diam\,X_2(\xi(t))}{4}\right) \qquad (28)$$

سرانجام با تلفیق (۲۵) و (۲۸)

$$\begin{aligned}
\omega_0\big(F(X_1\times X_2)\big)+\limsup_{t\to\infty} diamF(X_1\times X_2)(t) &\le \frac{1}{16}\ln\left(1+\frac{3\omega_0(X_1)+3\omega_0(X_2)}{4}\right)+\frac{1}{16}\ln\left(1+\frac{3diamX_1(\xi(t))+3diamX_2(\xi(t))}{4}\right) \\
&\le \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{3[\omega_0(X_1)+diamX_1(\xi(t))]+3[\omega_0(X_2)+diamX_2(\xi(t))]}{4}\right)
\end{aligned} \qquad (29)$$

از این رو از (۲۹) داریم

$$\mu\big(F(X_1\times X_2)\big)\le \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{3\mu(X_1)+3\mu(X_2)}{4}\right)$$

که در آن μ اندازه نافشردگی بر حسب تعریف (۱۱) است. حال با توجه به نتیجه ۲-۱۰ F حداقل یک زوج نقطه ثابت در فضای $BC(\mathbb{R}_+)\times BC(\mathbb{R}+)$ دارد و اثبات تمام است.

سرانجام یک مثال برای بررسی وجود جواب برای یک دستگاه از معادلات انتگرال تابعی ارائه می‌دهیم.

۳-۲ مثال. دستگاه معادلات انتگرال تابعی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{3}e^{-t^2}+\frac{1}{5}\sin t+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}\left|x(t^2)\right|\right)\right)+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}\left|y(t^2)\right|\right)\right)\\
&+\left[\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}\left|x(t^2)\right|\right)\right)+\frac{e^{-t}}{16}\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}\left|y(t^2)\right|\right)\right)\right]\times\\
&\arctan\left(\int_0^{\sqrt{t}}\frac{\ln\left(1+s\left|x\left(\sqrt[5]{t}\right)\right|\right)}{e^t\left(1+x^4\left(\sqrt[5]{t}\right)\right)\left(1+y^4\left(\sqrt[5]{t}\right)\right)}ds\right),\\
y(t) &= \frac{1}{3}e^{-t^2}+\frac{1}{5}\sin t+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}\left|y(t^2)\right|\right)\right)+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}\left|x(t^2)\right|\right)\right)\\
&+\left[\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}\left|y(t^2)\right|\right)\right)+\frac{e^{-t}}{16}\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}\left|x(t^2)\right|\right)\right)\right]\times\\
&\arctan\left(\int_0^{\sqrt{t}}\frac{\ln\left(1+s\left|y\left(\sqrt[5]{t}\right)\right|\right)}{e^t\left(1+x^4\left(\sqrt[5]{t}\right)\right)\left(1+y^4\left(\sqrt[5]{t}\right)\right)}ds\right)
\end{aligned}\tag{30}$$

با انتخاب های زیر به آسانی دیده می‌شود که این دستگاه یک حالات خاص از دستگاه معادلات انتگرال (۱۲) است.

$$h(t,x,y)=\frac{1}{5}\sin t+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|x|\right)\right)+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|y|\right)\right)$$

$$f(t,x,y)=\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|x|\right)\right)+\frac{e^{-t}}{16}\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|y|\right)\right)$$

$$g(t,s,x,y)=\frac{\ln(1+s|x(t)|)}{e^t\left(1+x^4(t)\right)\left(1+y^4(t)\right)}$$

$$A(t)=\frac{1}{3}e^{-t^2},\xi(t)=t^2,$$

$$\eta(t)=\sqrt[5]{t},\beta(t)=\sqrt{t},$$

$$\varphi(x)=\arctan x.$$

اکنون نشان می‌دهیم تمام شرایط قضیه ۱-۳ برای معادله (۳۰) برقرار است.

شرایط (الف)، (ب) و (ج) بوضوح برقرارند و به آسانی مشاهده می‌شود که $M_1=\frac{1}{3}$، $\delta=1$ و $\alpha=1$.

بوضوح $M_2=0$ و $M_3=\frac{1}{5}$، لذا شرط (د) برقرار است.

بوضوح f و h پیوسته اند. اکنون فرض کنید $t\in\mathbb{R}_+$ و $x,y,z,u,v\in\mathbb{R}$ به قسمی باشند که $|x|\ge|u|$, $|y|\ge|v|$، حال با توجه به این حقیقت که

$$\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{3}{4}|x-u|\right)+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{3}{4}|y-v|\right)\le\ln\left(1+\frac{3|x-u|+3|y-v|}{4}\right)$$

برآورد زیر را داریم

$$|f(t,x,y)-f(t,u,v)|$$

$$\le \frac{1}{4}\left|\ln\left(\frac{1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|x|\right)}{1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|u|\right)}\right)\right|$$
$$+\frac{e^{-t}}{16}\left|\ln\left(\frac{1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|y|\right)}{1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|v|\right)}\right)\right|$$
$$\le \frac{1}{4}\left|\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|x|\right)-\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|u|\right)\right)\right|$$
$$+\frac{1}{4}\left|\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|y|\right)-\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|v|\right)\right)\right|$$
$$\le \frac{1}{4}\left|\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(\frac{1+\frac{3}{4}|x|}{1+\frac{3}{4}|u|}\right)\right)\right|$$
$$+\frac{1}{4}\left|\ln\left(1+\frac{1}{32}\ln\left(\frac{1+\frac{3}{4}|y|}{1+\frac{3}{4}|v|}\right)\right)\right|$$
$$\le \frac{1}{4}\frac{1}{32}\left|\ln\left(\frac{1+\frac{3}{4}|x|}{1+\frac{3}{4}|u|}\right)\right| + \frac{1}{4}\frac{1}{32}\left|\ln\left(\frac{1+\frac{3}{4}|y|}{1+\frac{3}{4}|v|}\right)\right|$$
$$\le \frac{1}{4}\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|x-u|\right)$$
$$+\frac{1}{4}\frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3}{4}|y-v|\right)$$
$$\le \frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{\frac{3}{4}|x-u|+\frac{3}{4}|y-v|}{4}\right)$$
$$\le \frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3|x-u|+3|y-v|}{4}\right)$$
(31)

بطور مشابه می‌توان نشان داد

$$|h(t,x,y)-h(t,u,v)| \le \frac{1}{32}\ln\left(1+\frac{3|x-u|+3|y-v|}{4}\right).$$
(32)

بطور مشابه برآوردهای (۳۱) و (۳۲) را برای حالت $|u| \ge |v| \ge |y||x|,$ نیز می‌توان نوشت. این نشان می‌دهد شرط (ه) برقرار است.

و سرانجام برای برقراری شرط (و) ملاحظه می‌شود که، بوضوح g پیوسته است .

بعلاوه برای هر $t,s \in \mathbb{R}_+$ و $x,y,u,v \in \mathbb{R}$ داریم

$$|g(t,s,x,y)-g(t,s,u,v)| \le \frac{۲s}{e^t}.$$

از این رو

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{\sqrt{t}}\left|\begin{matrix} g\left(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s))\right) \\ -g\left(t,s,u(\eta(s)),v(\eta(s))\right)\end{matrix}\right| ds = 0,$$

که این همگرایی نسبت به $x,y,u,v \in BC(\mathbb{R}_+)$ یکنواخت است .

بعلاوه برای هر $t,s \in \mathbb{R}_+$ و $x,y \in \mathbb{R}$ داریم

$$\left|\int_0^{\beta(t)} g\left(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s))\right)ds\right| \le \frac{t}{e^t}.$$

بنابراین

$$M_4 = \sup\left\{\left|\int_0^{\beta(t)} g\left(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s))\right)ds\right| : t\in\mathbb{R}_+, x,y\in BC(\mathbb{R}_+)\right\}$$
$$= \sup\left\{\frac{t}{e^t} : t \ge 0\right\} = \frac{1}{e} \cong 0.3679$$

بعلاوه

$\delta M_۴ = \frac{۱}{e} < ۱$.

بنابراین تمام شرایط قضیه ۳-۱ برقرار است و دستگاه معادلات انتگرال (۳۰) حداقل یک جواب در فضای $BC(\mathbb{R}_+)\times BC(\mathbb{R}_+)$ دارد.

فهرست منابع

[١] A. Aghajani, R. Allahyari, M. Mursaleen. A generalization of Darbos theorem with application to the solvability of systems of integral equations. Journal of Computational and Applied Mathematics 260: 68 − 77(2014)

[٢] A. Aghajani, J. Bans, N. Sabzali. Some generalizations of Darbo fixed point theorem and applications. Bulletin of the Belgian Mathematical Society- Simon Stevin 20(2): 345 − 358(2013)

[٣] A. Aghajani, N. Sabzali. Existence of coupled fixed points via measure of noncompactness and applications. Journal of Nonlinear and Convex Analysis 14(5): 941 − 952(2014)

[٤] R. Allahyari, R. Arab, A. Shole Haghighi. Measure of noncompactness in a Sobolev space and integro-differential equations. Bulletin of Australian Mathematical Society 94: 497 − 506(2016)

[٥] R. Allahyari, R. Arab, A. Shole Haghighi. Construction of measures of noncompactness of $DC^n[J,E]$ and $C_0^n[J,E]$ with application to the solvability of nth-order integro-differential equations in Banach spaces. Advances in Difference Equations 2015: 376(2015)

[٦] R. Arab. The existence of fixed points via the measure of noncompactness and its application to functional-integral equations. Mediterranean Journal of Mathematics ١٣:٧٥٩-٧٧٣ (٢٠١٦),

[٧] J. Banas′. One Measures of noncompactness in Banach spaces. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 21: 131 − 143 (1980)

[٨] J. Banas′, K. Goebel. Measures of noncompactness in Banach Space. Lecture Notes in pure and Applied Mathematics vol. 60, Marcel Dekker, New York (1980)

[٩] J. Banas′, R. Rzepka. An application of a measure of noncompactness in the study of asymptotic stability. Applied Mathematics Letters 16:1 − 6(2003)

[١٠] S. S. Chang, Y. J. Cho, N. J. Huang. Coupled fixed point theorems with applications. Journal of the Korean Mathematical Society 33(٣): 575 − 585(1996)

[١١] G. Darbo. Punti uniti in transformazioni a codomio non compatto. Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova 24:84 − 92(1955)

[١٢] J. Garcia-Falset, K. Latrach. On Darbo-Sadovskii’s fixed point theorems type for abstract measures of (weak) noncompactness. Bulletin of the Belgian Mathematical Society- Simon Stevin 22: 761 − 779(2015)

[١٣] L. S. Goldenstein, I. T. Gohberg, A. S. Markus. Investigations of somme properties of bounded linear operators with their q-norms. Ucen. Zap. Kishinovsk 29: 29 − 36(1957)

[١٤] M. Mursaleen, S.A. Mohiuddine. Applications of measures of noncompactness to the infinite system of differential equations in l_p spaces. Nonlinear Analysis 75: 2111 − 2115 (2012)

[١٥] M. Mursaleen, A. Alotaibi. Infinite system of differential equations in some spaces. Abstract and Applied Analysis Volume ٢٠١٤: Article ID 863483(2012)

[١٦] J. R. Roshan. Existence of solutions for a class of system of functional integral equation via measure of noncompactness. Journal of Computational and Applied Mathematics ٣١٣: ١٢٩-١٤١(٢٠١٧)

[۱۷] A. Samadi, M. B. Ghaemi. An Extension of Darbo's Theorem and Its Application. Abstract and Applied Analysis Volume ۲۰۱٤: Article ID ۸٥۲۳۲٤(۲۰۱٤)

[۱۸] A. Samadi, M. B. Ghaemi. An Extension of Darbo Fixed Point Theorem and its Applications to Coupled Fixed Point and Integral Equations. Filomat 28(4): 879 – 886(2014)

[۱۹] N. Khodabakhshi, S.M. Vaezpour. Common fixed point theorems via measure of noncompactness. Fixed Point Theory ۱۷(۲): ۳۸۱-۳۸٦(۲۰۱٦)

[۲۰] K. Kuratowski. Sur les espaces complets. Fundamenta Mathematicae 5: 301 – 309(1930)

[۲۱] B.N. Sadovskii. Limit compact and condensing operators. Russian Mathematical Surveys ۲۷: ۸٦-۱٤٤ (۱۹۷۲)