

## مرزهای دوگانه در تحلیل پوششی داده‌های نامحدب با داده- های بازه‌ای: ارزیابی کارایی و ناکارایی و تحلیل پایداری

نسیم نصرآبادی<sup>۱\*</sup>، شیدا آیتی<sup>۲</sup>

<sup>(۱و۲)</sup> گروه ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه بیرجند، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۲/۲۴

### چکیده

مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها به طور ذاتی ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده را با دیدگاه خوش‌بینانه انجام می‌دهند، به این مفهوم که ارزیابی عملکرد هر واحد تصمیم‌گیرنده از طریق مقایسه آن واحد با مرز کارایی انجام می‌شود. مرز کارایی در واقع مرز متشکل از همه واحدهایی است که نشان‌دهنده بهترین عملکرد هستند. اگر یک فعالیت روی مرز کارایی قرار داشته باشد کاملاً کارا و در غیر این صورت غیرکارا نامیده می‌شود. به منظور ارائه یک ارزیابی دقیقتر می‌توان وضعیت واحدهای تصمیم‌گیرنده را با دیدگاه بدبینانه نیز مورد بررسی قرار داد، به این مفهوم که مرزی تحت عنوان مرز ناکارایی متشکل از همه واحدهایی که بدترین عملکرد را دارند، تشکیل داده و سپس عملکرد هر واحد تصمیم‌گیرنده را نسبت به آن ارزیابی نمود، به این صورت که هر چه یک واحد تصمیم‌گیرنده به مرز ناکارایی نزدیکتر باشد، ناکارتر تلقی می‌شود. به صورت مشابه یک فعالیت را کاملاً ناکارا گوئیم اگر روی مرز ناکارایی قرار داشته باشد. در غیر این صورت آن را غیر ناکارا می‌نامیم. در این مقاله با در نظر گرفتن این فرض که مجموعه امکان تولید نامحدب است، به تحلیل کارایی و ناکارایی واحدهای تحت بررسی پرداخته و آنها را در دو رده کاملاً (نا) کارا و غیر (نا) کارا افزایش می‌کنیم. سپس مفهوم پایداری افزایش را در تحلیل کارایی و ناکارایی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت با فرض این که واحدهای تحت ارزیابی دارای ورودی و خروجی بازه‌ای هستند، به ارزیابی کارایی و ناکارایی آنها پرداخته و سپس بر اساس مقدار بهینه مدل‌های ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده را به سه زیرمجموعه افزایش کرده و موضوع پایداری را برای افزایش حاصل بررسی می‌کنیم. به این صورت که برای هر واحد تصمیم‌گیرنده بر حسب اینکه این واحد در کدامیک از زیرمجموعه‌های افزایش قرار می‌گیرد، شعاع پایداری را برای حفظ موقعیت فعلی آن به دست می‌آوریم.

**واژه‌های کلیدی:** مدل پوسته دسترسی پذیری آزاد، مرز کاملاً کارا، مرز کاملاً ناکارا، داده‌های بازه‌ای، افزایش، تحلیل حساسیت، شعاع پایداری.

## ۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش ناپارامتری و مبتنی بر برنامه ریزی ریاضی است که براساس ایده مطرح شده توسط فارل [۱] به منظور ارزیابی عملکرد تعدادی از واحدهای تصمیم‌گیرنده همگن که در یک تکنولوژی تولید چند ورودی- چند خروجی فعالیت می‌کنند، طراحی شده است. اولین مدل اساسی تحلیل پوششی داده‌ها که توسط چارنز و همکاران [۲] فرمول‌بندی شد، ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده را در یک تکنولوژی تولید با فرض بازده به مقیاس ثابت انجام می‌دهد. بعدها جنبه‌های مختلفی از مدل چارنز و همکاران همراه با توسعه‌ای متنوعی از آن ارائه شد که دارای قابلیت‌های گسترده‌تری از جمله ارزیابی عملکرد در تکنولوژی‌های با فرض بازده به مقیاس متغیر، افزایشی و کاهش‌ی یا تکنولوژی‌های تولید نامحدب، انجام فرآیند الگویابی، ارزیابی کارایی در حضور ورودی‌های کنترل‌ناپذیر یا خروجی‌های نامطلوب و غیره بوده و به تفصیل در [۳] مورد بحث قرار گرفته است. با وجود تنوع زیاد در مدل‌های رایج تحلیل پوششی داده‌ها، یک ویژگی مشترک و قابل توجه همه آنها این است که در این مدل‌ها ارزیابی عملکرد با دیدگاه خوش‌بینانه انجام می‌شود. به این مفهوم که بر اساس داده‌های موجود، یک مرز تحت عنوان مرز کارایی که متشکل از همه واحدهای (کاملاً) کارا بوده و در واقع نمایانگر بهترین عملکرد(های) موجود است، تشکیل می‌شود. هر واحد تصمیم‌گیرنده که روی این مرز قرار داشته باشد، (کاملاً) کارا و در غیر این صورت غیرکارا تلقی می‌شود. سپس عملکرد واحدهای غیرکارا بر اساس فاصله هر کدام تا مرز (کاملاً) کارا سنجیده می‌شود، به این صورت که هر چه یک واحد به این مرز نزدیک‌تر باشد، دارای عملکرد بهتر و مطلوب‌تری است. از طرف دیگر بسیاری از دانشمندان با هدف ارائه یک ارزیابی دقیق‌تر و معتبرتر، موضوع بررسی عملکرد

واحدهای تصمیم‌گیرنده را با دیدگاه بدبینانه مطرح نمودند. به این صورت که برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده، میزان ناکارایی آنها مورد بررسی قرار گیرد. برای این منظور مشابه مرز (کاملاً) کارا که در واقع یک پوشش بالایی برای مجموعه امکان تولید است، مرز دیگری تحت عنوان مرز (کاملاً) ناکارا متشکل از همه واحدهای دارای بدترین عملکردهای موجود تشکیل می‌شود. سپس هر واحد تصمیم‌گیرنده که روی این مرز قرار بگیرد، (کاملاً) ناکارا و در غیر این صورت غیر ناکارا نامیده می‌شود. با ایده مشابه، برای یک واحد غیر ناکارا هر چه این واحد به مرز (کاملاً) ناکارا نزدیکتر باشد، ناکارتر خواهد بود. در این راستا یامادا و همکاران [۴] برای اولین بار مفهوم تحلیل پوششی داده‌های بدبینانه معرفی نمودند. سپس اتنانی و همکاران [۵] مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های خوش‌بینانه و بدبینانه را با هم تلفیق نموده و سپس مدل حاصل را برای داده‌های بازه‌ای تعمیم داده و همچنین یک راهکار برای رتبه بندی واحدها ارائه نمودند. موضوع تحلیل داده‌های خوش‌بینانه و بدبینانه، که از آن در بسیاری متون تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها با مرزهای دوگانه نیز یاد می‌شود بعدها توسط دانشمندان دیگر نیز مورد بررسی قرار گرفت و تعمیم‌های دیگری از آن نیز ارائه شد. آلداما و همکاران در [۶] یک مرور جامع بر روشهای موجود در این حوزه را ارائه داده‌اند.

یکی از موضوعات بسیار مهم در تحلیل پوششی داده‌ها که تاکنون توسط بسیاری از دانشمندان بررسی شده است، موضوع نامحدب بودن تکنولوژی تولید و نحوه ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده تحت فرض نامحدب بودن می‌باشد. در این راستا تکنولوژی تولید پویسته دسترسی پذیری آزاد برای اولین بار توسط دپرینز و همکاران [۷] معرفی شده و بعداً توسط تولکنز [۸] تعمیم یافت. از آن جایی که در بسیاری از مسائل دنیای واقعی در بحث

در این پژوهش برای ارزیابی کارایی از مدل اساسی چارنز و همکاران [۲] استفاده شده بود، در بررسی پایداری واحدهای کارا، آشفتگی در داده‌های ورودی و خروجی نیز به صورت نسبی در نظر گرفته شده است. از طرف دیگر، کوپر و همکاران [۱۳] موضوع تحلیل حساسیت را در حالتی که تغییرات در داده‌های همه واحدهای تصمیم‌گیرنده به طور همزمان رخ دهد بررسی نموده و محدوده تغییرات ممکن را برای هر واحد به دست آوردند. موضوع پایداری در تحلیل پوششی داده‌ها تنها به موارد گفته شده محدود نمی‌شود. در یک پژوهش جدید، نرالیک و وندل [۱۴] پس از ارائه مرور جامعی از این بحث، به معرفی یک روش بهبودیافته به منظور گسترش شعاع پایداری و ناحیه پایداری در تحلیل پوششی داده‌ها پرداختند.

تا جایی که نویسندگان اطلاع دارند، موضوع تحلیل حساسیت و پایداری در مدل پوسته دسترسی پذیری آزاد تاکنون مورد بحث و بررسی قرار نگرفته است. در این مقاله با در نظر گرفتن مرزهای دوگانه در این مدل، ابتدا مدل پوسته دسترسی پذیری آزاد را در شکل جمعی فرمول‌بندی کرده و بر اساس تحلیل کارایی و تحلیل ناکارایی انجام شده، دو افراز برای مجموعه همه واحدهای تصمیم‌گیرنده به دست می‌آوریم. سپس موضوع پایداری افراز را مورد بررسی قرار می‌دهیم، به این صورت که به ازای هر واحد تصمیم‌گیرنده، با توجه به این که این واحد بر اساس مقدار بهینه تابع هدف مدل متناظر در کدام رده افراز قرار گرفته است، حداکثر میزان تغییرات در ورودی و خروجی آن واحد برای این که این واحد همچنان در همان رده قبلی از افراز قرار داشته باشد، به دست می‌آوریم. در ادامه مدل پوسته دسترسی پذیری آزاد را برای داده‌های بازه‌ای فرمول بندی کرده و پس از به دست آوردن افراهای جدید، به تحلیل پایداری می‌پردازیم. این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. ابتدا

ارزیابی عملکرد، یافتن یک توجیه خوب و قابل قبول برای برقراری شرط تحدب کار آسانی نیست، مدل پوسته دسترسی پذیری آزاد توجه بسیاری از دانشمندان و مدیران را به خود جلب کرده است و از این رو تاکنون پژوهش‌های ارزشمند و مفیدی در این حوزه انجام شده است. یک مرور کلی بر مدل‌های پوسته دسترسی پذیری آزاد و روش‌های حل آن توسط کرستنز و وان د ووئستین [۹] ارائه شده است. همچنین آلاماک و همکاران [۶] موضوع مرزهای دوگانه در مدل پوسته دسترسی پذیری آزاد را بررسی کردند. به علاوه آنها یک روش ابرکارایی بهبودیافته به منظور تمایز بین واحدهای کاملاً کارا و رتبه بندی آنها پیشنهاد نمودند. لازم به ذکر است که مدل‌های ارائه شده توسط آلاماک و همکاران [۶] بر مبنای مدل‌های شعاعی در ماهیت ورودی یا خروجی فرمول بندی شده است.

از طرف دیگر، از آن جایی که تحلیل پوششی داده‌ها یک روش با ماهیت مبتنی بر داده می‌باشد، موضوع تحلیل حساسیت و پایداری در آن دارای اهمیت ویژه است. چرا که نتایج حاصل از این تکنیک به طور مستقیم به داده‌های مساله وابسته‌اند و لذا هر گونه تغییر در داده‌های مساله، ولو کوچک، ممکن است نتایج حاصل را به طرز چشمگیری تغییر دهد. در این راستا، این موضوع توسط بسیاری از پژوهشگران با دیدگاه‌های مختلف مورد بحث و بررسی قرار گرفته است؛ چارنز و همکاران [۱۰] و چارنز و نرالیک [۱۱] تحلیل حساسیت را به ترتیب در مدل اصلی چارنز و همکاران و مدل جمعی مطالعه نمودند. همچنین ژو [۱۲] پایداری واحدهای تصمیم‌گیرنده (کاملاً) کارا را تحت تغییرات ورودی و خروجی مورد بررسی قرار دادند، به این صورت که برای هر واحد (کاملاً) کارا میزان تغییرات مجاز در داده‌های ورودی و خروجی آن (افزایش در ورودی‌ها و کاهش در خروجی‌ها) که وضعیت کاملاً کارا بودن آن را حفظ می‌کند، محاسبه کردند. از آن جایی که

مجموعه همه فعالیت‌های شدنی کاملاً کارا مرز مجموعه  $T$  را تشکیل می‌دهند که آن را مرز کاملاً کارا می‌نامیم. این مرز در واقع یک پوشش بالایی برای مجموعه امکان تولید را مشخص می‌کند به طوری که همه فعالیت‌های شدنی در زیر یا روی این مرز قرار می‌گیرند. به عبارت دقیقتر هر فعالیتی که روی مرز کاملاً کارا باشد، یک فعالیت کاملاً کارا و در غیر این صورت یک فعالیت غیرکارا می‌باشد.

در تحلیل پوششی داده‌ها، فرض کنیم  $n$  واحد تصمیم‌گیرنده داریم که در تکنولوژی تولید فوق فعالیت می‌کنند. برای واحد تصمیم‌گیرنده  $j$ ام، بردار ورودی را با نماد  $DMU_j$  و  $X_j = (x_{ij})_{m \times 1}$  و بردار خروجی را با نماد  $Y_j = (y_{rj})_{s \times 1}$  نشان می‌دهیم. در این مقاله، فرض بر این است که بردارهای ورودی و خروجی برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده همگی نامنفی و با حداقل یک مولفه مثبت میباشند. مجموعه امکان تولید در تحلیل پوششی داده‌ها با به‌کارگیری اصول موضوعه مفروض به صورت زیر تشکیل می‌شود [۳]:

$$T = \{(X, Y) \mid X \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, 0 \leq Y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \lambda_j \in \Lambda\}$$

که در آن مجموعه  $\Lambda$  بر اساس مفروضاتی که در مورد سیستم تحت بررسی وجود دارد، تعیین می‌شود. به‌ویژه برای یک تکنولوژی تولید که تنها بر اساس دو اصل شمول مشاهدات و اصل دسترسی پذیری آزاد بنا می‌شود، داریم:

$$\Lambda = \{\lambda \in R^n \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n\}.$$

مجموعه  $\Lambda$  تعریف شده در فوق را که مجموعه امکان تولید پوسته دسترسی‌پذیری آزاد را مشخص می‌کند، با نماد  $\Lambda^{FDH}$  و مجموعه  $T$  متناظر با آن را با نماد  $T^{FDH}$  نشان می‌دهیم. واضح است که

در بخش ۲ برخی از مفاهیم مقدماتی تحلیل پوششی داده‌ها با مرزهای دوگانه همراه با مدل پوسته دسترسی‌پذیری آزاد ارائه می‌شود. در بخش ۳ موضوع پایداری مدل‌های تحلیل کارایی و ناکارایی مورد بحث قرار می‌گیرد. در ادامه بخش ۴ به تعمیم مدل‌های پوسته دسترسی‌پذیری آزاد برای داده‌های بازه‌ای پرداخته و در بخش ۵ موضوع پایداری این مدل‌ها بررسی می‌شود. بخش ۶ شامل یک مثال تشریحی است که به فهم قضایای ارائه شده در دو بخش قبل کمک می‌کند. در نهایت بخش ۷ به بحث و نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

## ۲. مدل پوسته دسترسی‌پذیری آزاد و مرزهای دوگانه

### ۲.۱. پیش‌نیازها و تعاریف

فرآیند تولیدی را در نظر بگیرید که در آن  $m$  ورودی مختلف برای تولید  $s$  خروجی مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. مجموعه امکان تولید که معرف تکنولوژی تولید مد نظر است، به صورت مجموعه همه زوج‌های مرتب به شکل  $(X, Y)$  که در آن بردار ورودی  $X \in R^m$  می‌تواند بردار خروجی  $Y \in R^s$  را تولید کند، تعریف می‌شود.

هر عضو مجموعه امکان تولید را یک فعالیت شدنی می‌نامیم. به طور طبیعی و بدیهی فرض بر این است که در مورد ورودی‌ها هرچه کمتر، بهتر و در مورد خروجی‌ها هر چه بیشتر، بهتر است. یک فعالیت شدنی را کارا گوئیم هرگاه هیچ فعالیت شدنی دیگری که بهتر از آن باشد، وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر، بردار فعالیت  $(\bar{X}, \bar{Y}) \in T$  کاراست هرگاه هیچ  $(X, Y) \in T$  وجود نداشته باشد که  $(Y, -X) \geq (\bar{Y}, -\bar{X})$  و نامساوی حداقل به ازای یک مولفه به صورت اکید برقرار باشد. در این مقاله به منظور تاکید بیشتر و برای فهم بهتر مطلب به جای کارا از عبارت "کاملاً کارا" استفاده می‌کنیم.

واضح است که اولاً جهت نامساوی‌ها در مجموعه  $\bar{T}$  عکس جهت نامساوی‌ها در مجموعه  $T$  می‌باشد و ثانیاً تمامی فعالیت‌های مشاهده شده به مجموعه  $T \cap \bar{T}$  تعلق دارند. از این رو تحلیل کارایی/ناکارایی نسبت به مرز بالایی/پایینی این مجموعه که در واقع همان مرز کاملاً کارا/کاملاً ناکارا می‌باشد، انجام می‌شود. از این موضوع گاهی تحت عنوان مرزهای دوگانه در تحلیل پوششی داده‌ها یاد می‌شود. یادآوری می‌کنیم با توجه به این که در این مقاله مدل پوسته دسترسی‌پذیری آزاد مورد بررسی قرار می‌گیرد همواره  $\Lambda = \Lambda^{FDH}$  اختیار شده و لذا  $T$  و  $\bar{T}$  به ترتیب همان  $T^{FDH}$  و  $\bar{T}^{FDH}$  می‌باشند.

## ۲.۲. ارزیابی کارایی و ناکارایی

مدل پوسته دسترسی‌پذیری آزاد برای ارزیابی کارایی یک واحد تصمیم‌گیرنده نسبت به یک تکنولوژی نامحدب برای اولین بار توسط دپرینز و همکاران [۷] ارائه شد. این مدل را می‌توان در شکل جمعی برای ارزیابی  $DMU_o$  به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} d_o^* = \max \quad & 1^T d^x + 1^T d^y \quad (1) \\ \text{s.t.} \quad & X_o - d^x = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \\ & Y_o + d^y = \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & (d^x, d^y) \geq (0, 0) \\ & \lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

مدل (۱) در واقع فاصله نرم یک  $DMU_o$  را از مرز مجموعه امکان تولید  $T^{FDH}$  اندازه می‌گیرد. به راحتی می‌توان نشان داد که  $DMU_o$  در  $T = T^{FDH}$  کاملاً کاراست اگر و تنها اگر مقدار بهینه مدل (۱) برابر صفر باشد، یا به طور معادل،

مجموعه  $T^{FDH}$  به واسطه وجود قید  $\lambda_j \in \{0, 1\}$  یک مجموعه نامحدب است.

یادآوری می‌کنیم که یک فعالیت مشاهده شده کاملاً کارا است هرگاه هیچ فعالیت مشاهده شده دیگری که بهتر از آن باشد وجود نداشته باشد. در غیر این صورت آن را ناکارا می‌نامیم. به عبارت دیگر مرز کاملاً کارا (متشکل از همه واحدهای کاملاً کارا) نشان دهنده بهترین عملکرد(های) موجود می‌باشد. در تحلیل پوششی داده‌ها از طریق محاسبه فاصله هر فعالیت شدنی تا مرز کاملاً کارا می‌توان وضعیت کارایی آن فعالیت را ارزیابی نمود. به طور کلی، تحلیل کارایی به معنی ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده از طریق مقایسه فاصله آن تا مرز کاملاً کارا یا همان مرز بهترین عملکرد است. به منظور ارائه تحلیلی قویتر می‌توان عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده را از منظر ناکارایی نیز مورد بررسی قرار داد، به این مفهوم که مرز دیگری تحت عنوان مرز کاملاً ناکارا که نشان دهنده بدترین عملکرد(های) موجود است تشکیل داده و سپس میزان ناکارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده را از طریق محاسبه فاصله آن تا مرز کاملاً ناکارا ارزیابی نمود. در واقع مرز کاملاً ناکارا مرزی متشکل از همه واحدهای کاملاً ناکارا است با این توضیح که یک واحد تصمیم‌گیرنده را کاملاً ناکارا گوئیم هرگاه هیچ واحد دیگری که بدتر از آن باشد وجود نداشته باشد. به عبارت دقیقتر، فعالیت  $(\bar{X}, \bar{Y}) \in T$  را کاملاً ناکارا گوئیم هرگاه هیچ  $(X, Y) \in T$  وجود نداشته باشد به طوری که  $(Y, -X) \leq (\bar{Y}, -\bar{X})$  و نامساوی حداقل برای یک مولفه به طور اکید برقرار باشد. در این حالت میتوان مجموعه دیگری که نشان‌دهنده همه‌ی واحدهای کاملاً ناکارا می‌باشد و به عبارتی مشخص کننده مرز کاملاً ناکارا است، به صورت زیر تشکیل داد:

$$\bar{T} = \{(X, Y) \mid 0 \leq X \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, Y \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \lambda \in \Lambda\}.$$

بر اساس مقدار بهینه تابع هدف مدل (۳)، افراز

$$J = F^0 \cup F^>$$

$$F^0 = \{j | f_o^* = 0\}, \quad (4)$$

$$F^> = \{j | f_o^* > 0\},$$

در بخش بعدی موضوع پایداری دو افراز به دست آمده، یعنی افراز مبتنی بر کارایی و افراز مبتنی بر ناکارایی را بررسی می‌کنیم.

### ۳. پایداری در مدل پوسته دسترسی پذیری

#### آزاد

در بخش قبل ملاحظه نمودیم که در فرآیند تحلیل کارایی / ناکارایی مجموعه واحدهای تصمیم‌گیرنده را می‌توان به دو زیر مجموعه کاملاً کارا و غیر کارا / کاملاً ناکارا و غیر ناکارا افراز نمود. این دو افراز را به ترتیب افراز مبتنی بر کارایی و افراز مبتنی بر ناکارایی می‌نامیم. در این بخش موضوع پایداری را برای هر یک از این دو افراز را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم، گرچه تکنیک مورد استفاده در مورد هر دو افراز از نظر پایه‌ای مشابه‌اند.

برای تحلیل پایداری افراز مبتنی بر کارایی به این صورت عمل می‌کنیم که با در نظر گرفتن یک واحد مفروض، بر حسب این که این واحد در کدامیک از مجموعه‌های  $D^0$  یا  $D^>$  قرار می‌گیرد، حداکثر میزان تغییرات مجاز در داده‌های آن را با هدف این که واحد مورد بررسی (تغییر یافته) همچنان در همان زیرمجموعه قبلی خود باقی بماند، به دست می‌آوریم. لازم به ذکر است که به منظور سادگی در بحث، تغییرات در داده‌های ورودی و خروجی واحد تحت بررسی را در تنها در دو حالت تغییرات بهبود دهنده (پیشرفت) و تغییرات زیان‌آور (پسرفت) در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم  $DMU_o$  واحد تحت ارزیابی باشد. با حل مساله (۱) برای این واحد، یکی از دو حالت زیر را خواهیم داشت:

بردار  $(d^x, d^y) = (0, 0)$  تنها جواب بهینه مدل

(۱) باشد. به عبارت دیگر در تحلیل کارایی مقدار

$d_o^* = 0$  نشان‌دهنده این است که  $DMU_o$  کاملاً

کاراست و مقدار  $d_o^* > 0$  بر غیرکارا بودن  $DMU_o$

دلالیت دارد. بر اساس مقدار بهینه مساله (۱)،

می‌توان مجموعه همه واحدهای تصمیم‌گیرنده

$J = \{1, \dots, n\}$  را به دو زیرمجموعه واحدهای کاملاً

کارا و واحدهای غیرکارا افراز نمود:

$$D^0 = \{j | d_o^* = 0\}, \quad (2)$$

$$D^> = \{j | d_o^* > 0\}.$$

به صورت مشابه، به منظور تحلیل ناکارایی می‌توان

مدل زیر را که فاصله نرم یک  $DMU_o$  را از مرز

مجموعه  $\bar{T}^{FDH}$  اندازه‌گیری می‌کند، فرمول‌بندی

نمود:

$$f_o^* = \max \quad 1^T f^x + 1^T f^y \quad (3)$$

$$\text{s.t.} \quad X_o + f^x = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j$$

$$Y_o - f^y = \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$(f^x, f^y) \geq (0, 0)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n.$$

با یک استدلال آسان می‌توان تحقیق کرد که

$DMU_o$  در  $T = \bar{T}^{FDH}$  کاملاً ناکاراست اگر و تنها

اگر در مدل (۳) داشته باشیم  $f_o^* = 0$ ، یا به عبارت

دیگر بردار  $(f^x, f^y) = (0, 0)$  تنها جواب بهینه

مدل (۳) باشد. به صورت مشابه آنچه در تحلیل

کارایی داشتیم، مقدار  $f_o^* = 0$  بر کاملاً ناکارا بودن

$DMU_o$  دلالیت دارد، در حالیکه  $f_o^* > 0$  نشان

می‌دهد که  $DMU_o$  کاملاً ناکارا نیست. همچنین

کنیم  $(\alpha', \beta') \leq (\alpha^*, \beta^*)$  و  $(\alpha', \beta') \neq (\alpha^*, \beta^*)$ .  
 به فرض خلف فرض کنیم  $[X_o + \alpha', Y_o - \beta']$   
 کاملا کارا نباشد. پس  $k$  ی هست که  
 $1 \leq k \leq n, k \neq o$

$$[Y_k, -X_k] \geq [Y_o - \beta', -(X_o + \alpha')],$$

$$[Y_k, -X_k] \neq [Y_o - \beta', -(X_o + \alpha')].$$

حال معلوم می‌شود که بردار  $(\alpha', \beta', \lambda' = e_k)$  یک جواب شدنی برای مساله  $(\Delta)$  است و این با فرض بهینه پارتو بودن  $(\alpha^*, \beta^*)$  برای این مساله در تناقض است.

**حالت دوم.**  $o \in D^>$  در این حالت  $DMU_o$  غیر کاراست. واضح است که اگر هر کدام از داده‌های ورودی و خروجی این واحد پسرقت کنند (یعنی ورودی‌ها) افزایش و خروجی‌ها) کاهش یابند، واحد تغییر یافته باز هم غیر کارا خواهد بود. لذا در این مورد تنها لازم است حالت پسرقت را برای  $DMU_o$  بررسی کنیم.

با در نظر گرفتن نمادهای معرفی شده در قبل، فرض کنیم  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^t$  بردار کاهش در ورودی‌ها و  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)^t$  بردار افزایش در خروجی‌ها باشد. برای محاسبه حداکثر میزان مجاز  $\alpha$  و  $\beta$  که تضمین می‌کند واحد تغییر یافته  $[X_o - \alpha, Y_o + \beta]$  کاملا کارا نباشد، مساله بهینه سازی برداری زیر را فرمول بندی می‌کنیم:

$$vec \max (\alpha, \beta) \quad (6)$$

$$s.t. \quad X_o - \alpha \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j$$

$$Y_o + \beta \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j$$

$$\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1$$

$$(\alpha, \beta) \geq (0, 0)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o.$$

**حالت اول.**  $o \in D^0$  در این حالت  $DMU_o$  کاملا کاراست. واضح است که اگر هر کدام از داده‌های ورودی و خروجی این واحد پسرقت کنند (یعنی ورودی‌ها) کاهش و خروجی‌ها) افزایش یابند، واحد تغییر یافته باز هم کاملا کارا خواهد بود. لذا در این مورد تنها لازم است حالت پسرقت را برای  $DMU_o$  بررسی کنیم.

فرض کنیم ورودی  $i$ -ام به اندازه  $\alpha_i$  افزایش و خروجی  $r$ -ام به اندازه  $\beta_r$  کاهش یابد. به عبارت دیگر فرض کنیم  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^t$  بردار افزایش در ورودی‌ها و  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)^t$  بردار کاهش در خروجی‌ها باشد. برای محاسبه حداکثر میزان مجاز  $\alpha$  و  $\beta$  که کاملا کارا بودن واحد تغییر یافته  $[X_o + \alpha, Y_o - \beta]$  را تضمین می‌کند، مساله بهینه‌سازی برداری زیر را فرمول بندی می‌کنیم:

$$vec \min (\alpha, \beta) \quad (5)$$

$$s.t. \quad X_o + \alpha \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j$$

$$Y_o - \beta \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j$$

$$\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1$$

$$(\alpha, \beta) \geq (0, 0)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o.$$

قضیه زیر اعتبار مدل فوق را نشان می‌دهد:

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $(\alpha^*, \beta^*)$  یک جواب بهینه پارتو برای مساله  $(\Delta)$  باشد. اگر  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha^*, \beta^*)$ ، آنگاه واحد تغییر یافته  $[X_o + \alpha, Y_o - \beta]$  کاملا کاراست.

**برهان.** ابتدا واضح است که فعالیت  $[X_o + \alpha^*, Y_o - \beta^*]$  کاملا کاراست. حال فرض

قضیه زیر اعتبار مدل فوق را روشن می‌سازد:

را داریم:

**حالت اول.**  $o \in F^0$  در این حالت  $DMU_o$  کاملاً ناکاراست. واضح است که اگر هر کدام از داده‌های ورودی و خروجی این واحد پسرقت کنند (یعنی ورودی‌ها) افزایش و خروجی‌ها) کاهش یابند، در وضعیت ناکارایی این واحد خللی وارد نمی‌شود. یعنی واحد تغییر یافته باز هم کاملاً ناکارا خواهد بود. لذا در این مورد تنها لازم است حالت پیشرفت را برای  $DMU_o$  بررسی کنیم.

مشابه قبل فرض کنیم  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^t$  بردار کاهش در ورودی‌ها و  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)^t$  بردار افزایش در خروجی‌ها باشد. برای محاسبه حداکثر میزان مجاز  $\alpha$  و  $\beta$  که تضمین میکند واحد تغییر یافته  $[X_o - \alpha, Y_o + \beta]$  کاملاً ناکارا باشد، مساله بهینه‌سازی برداری زیر را فرمول بندی می‌کنیم:

$$\text{vec min } (\alpha, \beta) \quad (7)$$

$$\text{s.t. } X_o - \alpha \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j$$

$$Y_o + \beta \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j$$

$$\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1$$

$$(\alpha, \beta) \geq (0, 0)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o.$$

قضیه زیر اعتبار مدل فوق را روشن می‌سازد:

**قضیه ۳.** فرض کنیم  $(\alpha^*, \beta^*)$  یک جواب بهینه پارتو برای مساله (۷) باشد. اگر  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha^*, \beta^*)$ ، واحد تغییر یافته  $[X_o - \alpha, Y_o + \beta]$  کاملاً ناکاراست. **برهان.** ابتدا واضح است که فعالیت  $[X_o - \alpha^*, Y_o + \beta^*]$  کاملاً ناکاراست. پس فرض کنیم  $(\alpha', \beta') \leq (\alpha^*, \beta^*)$  و  $(\alpha', \beta') \neq (\alpha^*, \beta^*)$ .

**قضیه ۲.** فرض کنیم  $(\alpha^*, \beta^*)$  یک جواب بهینه پارتو برای مساله (۶) باشد.

الف) اگر  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha^*, \beta^*)$  و  $(\alpha, \beta) \neq (\alpha^*, \beta^*)$ ، آنگاه واحد تغییر یافته  $[X_o - \alpha, Y_o + \beta]$  غیر کاراست.

ب) اگر  $(\alpha, \beta) = (\alpha^*, \beta^*)$ ، آنگاه واحد تغییر یافته  $[X_o - \alpha, Y_o + \beta]$  کاملاً کاراست.

**برهان.** الف) با توجه به فرض واضح است که در این حالت فعالیت  $[X_o - \alpha^*, Y_o + \beta^*]$ ، یک فعالیت شدنی و غالب بر  $[X_o - \alpha, Y_o + \beta]$  می‌باشد و این مطلب حکم را ثابت می‌کند.

ب) به فرض خلف، فرض کنیم  $[X_o - \alpha^*, Y_o + \beta^*]$  کاملاً کارا نباشد، پس پس  $k$  ی هست که  $1 \leq k \leq n, k \neq o$

$$[Y_k, -X_k] \geq [Y_o + \beta^*, -(X_o - \alpha^*)],$$

$$[Y_k, -X_k] \neq [Y_o + \beta^*, -(X_o - \alpha^*)].$$

حال اگر قرار دهیم  $\delta_x = (X_o - \alpha^*) - X_k \geq 0$  و

$\delta_y = Y_k - (Y_o + \beta^*) \geq 0$ ، اولاً  $(\delta_x, \delta_y) \geq (0, 0)$  و

$(\delta_x, \delta_y) \neq (0, 0)$ . ثانیاً به راحتی معلوم می‌شود که

بردار  $(\alpha', \beta', \lambda')$  با

$$\alpha' = \alpha + \delta_x,$$

$$\beta' = \beta + \delta_y,$$

$$\lambda' = e_k$$

یک جواب شدنی برای مساله (۶) است و این مطلب با بهینه پارتو بودن  $(\alpha^*, \beta^*)$  در تناقض است.

حال به بررسی پایداری برای افراز مبتنی بر ناکارایی می‌پردازیم. با فرض این که  $DMU_o$  واحد تحت ارزیابی باشد، با حل مساله (۳) یکی از دو حالت زیر



الف) اگر  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha^*, \beta^*)$  و  $(\alpha, \beta) \neq (\alpha^*, \beta^*)$ ، آنگاه واحد تغییر یافته  $[X_o + \alpha, Y_o - \beta]$  غیر ناکاراست.

ب) اگر  $(\alpha, \beta) = (\alpha^*, \beta^*)$ ، آنگاه واحد تغییر یافته  $[X_o + \alpha, Y_o - \beta]$  کاملاً ناکاراست.

برهان. الف) با توجه به فرض، واضح است که

$$[X_o + \alpha^*, Y_o - \beta^*] \text{ یک فعالیت شدنی است و}$$

$$[Y_o - \beta^*, -(X_o + \alpha^*)] \leq [Y_o - \beta, -(X_o + \alpha)],$$

$$[Y_o - \beta^*, -(X_o + \alpha^*)] \neq [Y_o - \beta, -(X_o + \alpha)].$$

که غیر ناکارا بودن  $[X_o - \alpha, Y_o + \beta]$  را نشان می‌دهد.

ب) به فرض خلف، فرض کنیم  $[X_o + \alpha^*, Y_o - \beta^*]$  کاملاً ناکارا نباشد. پس  $k$  ی هست که  $1 \leq k \leq n, k \neq 0$

$$[Y_k, -X_k] \leq [Y_o - \beta^*, -(X_o + \alpha^*)],$$

$$[Y_k, -X_k] \neq [Y_o - \beta^*, -(X_o + \alpha^*)].$$

در این صورت، مشابه قضیه ۲ می‌توان یک جواب شدنی  $(\alpha', \beta')$  برای مساله (۸) یافت به طوری که  $(\alpha', \beta') \geq (\alpha^*, \beta^*)$  و  $(\alpha', \beta') \neq (\alpha^*, \beta^*)$ . این مطلب با فرض بهینه پارتو بودن  $(\alpha^*, \beta^*)$  برای این مساله در تناقض است.

با توجه به مطالب گفته شده به منظور یافتن ناحیه پایداری برای حفظ افراز فعلی  $DMU_o$ ، لازم است یک مساله بهینه‌سازی برداری حل شده و تمامی جواب‌های بهینه پارتوی آن به دست آید. این فرآیند از نظر محاسباتی ممکن است پیچیده و زمان‌بر باشد، گرچه می‌توان نشان داد که مساله چند هدفه متناظر در هر حالت دارای تعداد متناهی جواب بهینه پارتو است که می‌توانند از طریق شمارش به دست آیند. به هر صورت، چنانچه تغییر در تنها یکی از داده‌های ورودی یا خروجی مد نظر باشد،

اگر فعالیت  $[X_o - \alpha, Y_o + \beta]$  کاملاً ناکارا نباشد، آنگاه به راحتی می‌توان نشان داد که  $k$  ی هست که  $1 \leq k \leq n, k \neq 0$  و  $(\alpha', \beta', \lambda' = e_k)$  یک جواب شدنی برای مساله (۷) است. این نتیجه با فرض بهینه پارتو بودن  $(\alpha^*, \beta^*)$  برای این مساله در تناقض است.

**حالت دوم.**  $o \in F^>$  در این حالت  $DMU_o$  غیر ناکاراست. واضح است که اگر هر کدام از داده‌های ورودی و خروجی این واحد پیشرفت کنند (یعنی ورودی‌ها) کاهش و خروجی‌ها) افزایش یابند، واحد تغییر یافته باز هم غیر ناکارا خواهد بود. لذا در این مورد تنها لازم است حالت پسرفت را برای  $DMU_o$  بررسی کنیم.

با فرض این که  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)'$  بردار افزایش در ورودی‌ها و  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)'$  بردار کاهش در خروجی‌ها باشد، برای محاسبه حداکثر میزان مجاز  $\alpha$  و  $\beta$  که تضمین می‌کند واحد تغییر یافته  $[X_o + \alpha, Y_o - \beta]$  غیر ناکارا باقی بماند، مساله بهینه‌سازی برداری زیر را فرمول بندی می‌کنیم:

$$\text{vec max } (\alpha, \beta) \quad (8)$$

$$\text{s.t. } X_o + \alpha \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j$$

$$Y_o - \beta \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j$$

$$\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1$$

$$(\alpha, \beta) \geq (0, 0)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o.$$

قضیه زیر اعتبار مدل فوق را روشن می‌سازد:

**قضیه ۴.** فرض کنیم  $(\alpha^*, \beta^*)$  یک جواب بهینه پارتو برای مساله (۸) باشد.

داده‌های ورودی و خروجی در دو ستون اول جدول ۱ داده شده اند و شکل ۱ این فعالیت‌ها را در فضای ورودی و خروجی نشان می‌دهد. به منظور ارزیابی کارایی، مقدار بهینه تابع هدف مساله (۱) به همراه رده به دست آمده برای هر واحد در دو ستون بعدی جدول ۱ گزارش شده است.

در گام بعدی تحلیل پایداری افزاز حاصل انجام شده است. در این راستا ابتدا تحلیل پایداری را برای واحدهای متعلق به رده  $D^0$  انجام می‌دهیم. در این راستا سه حالت در نظر می‌گیریم.

در حالت اول تغییرات را تنها در ورودی مجاز در نظر می‌گیریم. حداکثر میزان مجاز تغییر در ورودی هر واحد که تعلق به رده  $D^0$  را تضمین می‌کند، توسط مساله بهینه‌سازی تک هدفه زیر محاسبه شده است:

$$\begin{aligned} P(in): \quad & \min \quad \delta \\ \text{s.t.} \quad & x_o + \delta \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j x_j \\ & y_o \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j y_j \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1 \\ & \delta \geq 0 \\ & \lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o. \end{aligned}$$

در حالت دوم تغییرات را فقط در خروجی مجاز در نظر می‌گیریم. در این حالت حداکثر میزان تغییرات مجاز در خروجی که تعلق به رده  $D^0$  را تضمین می‌کند، با حل مساله به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(out): \quad & \min \quad \delta \\ \text{s.t.} \quad & x_o \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j x_j \\ & y_o - \delta \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j y_j \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1 \\ & \delta \geq 0 \\ & \lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o. \end{aligned}$$

مساله بهینه‌سازی برداری مورد نظر به یک مساله بهینه سازی تک هدفه تبدیل می‌شود که حل آن به مراتب آسان‌تر از مساله چندهدفه می‌باشد. لذا در حالت کلی می‌توان میزان تغییرات مجاز در هر یک از ورودی‌ها و هر یک از خروجی‌های  $DMU_o$  را به طور جداگانه و مستقل، مشروط بر این که سایر ورودیها و خروجیها ثابت بمانند، محاسبه نمود. به عبارت دقیق‌تر در مورد ورودی  $P$ -ام کفایت قرار دهیم  $(\alpha, \beta) = (\delta e_p, 0)$ . همچنین به صورت مشابه در مورد خروجی  $q$ -ام،  $(\alpha, \beta) = (0, \delta e_q)$ ؛ که در آن  $e_p$  و  $e_q$  به ترتیب بردارهای واحد  $P$ -ام و  $q$ -ام در فضای  $R^m$  و  $R^s$  بوده و  $\delta$  حداکثر مقدار مجاز تغییر در ورودی یا خروجی متناظر می‌باشد. در این صورت با جایگذاری این تابع هدف، مساله چندهدفه به یک مساله تک هدفه تبدیل خواهد شد. در این حالت مساله بهینه‌سازی تک هدفه متناظر را به ترتیب با نماد  $P(in-p)$  و  $P(out-q)$  نشان می‌دهیم.

همچنین می‌توان در حالت ساده دیگر، در تابع هدف عبارت  $\delta = 1^T \alpha + 1^T \beta$  را قرار داد، که در واقع همان نرم یک بردار هدف  $(\alpha, \beta)$  می‌باشد. آنگاه می‌توان حداکثر مقدار مجاز  $\delta$  را با حل یک مساله بهینه‌سازی تک هدفه به دست آورد. مساله بهینه‌سازی که تابع هدف آن  $\delta = \|(\alpha, \beta)\|$  باشد، را با نماد  $P(norm-1)$  نشان خواهیم داد.

ملاحظه. با توجه به فرض نامنفی بودن بردارهای ورودی و خروجی، لازم است توجه کنیم که دو قید  $\alpha \leq X_o$  و  $\beta \leq Y_o$  (۵) و (۷) لحاظ شود.

**مثال عددی.** مجموعه‌ای از دوازده واحد تصمیم گیرنده را در یک تکنولوژی پوسته دسترسی پذیری آزاد با یک ورودی و یک خروجی در نظر بگیرید.

در نهایت با فرض این که تغییرات هم در ورودی و هم در خروجی مجاز است، حداکثر مقدار تغییرات مجاز بر حسب نرم یک توسط مساله زیر محاسبه می‌شود:

پایین و بالا برای خروجی  $r$  ام  $DMU_j$  هستند. واضح است که در حالتی که مقادیر ورودی و خروجی برای واحدهای تصمیم‌گیرنده به صورت بازه هستند، هر واحد تصمیم‌گیرنده را می‌توان در فضای  $R^{m+s}$  به صورت یک ابرمستطیل در نظر گرفت که ابعاد آن در واقع طول بازه متناظر برای ورودی و خروجی آن واحد می‌باشند. در این صورت برای هر واحد تصمیم‌گیرنده می‌توان برای آن دو حالت راسی خوش‌بینانه و بدبینانه متصور شد، به این صورت که هر واحد تصمیم‌گیرنده زمانی در بهترین حالت خود است که تمامی ورودی‌های آن کمترین مقدار ممکن و تمامی خروجی‌های آن بیشترین مقدار ممکن خود را اختیار کرده‌اند، به عبارت دیگر واحد تصمیم‌گیرنده در مطلوب‌ترین حالت خود قرار دارد. به صورت مشابه بدترین حالت ممکن برای هر واحد تصمیم‌گیرنده زمانی اتفاق می‌افتد که تمامی ورودی‌های آن در بیشترین مقدار ممکن و تمامی خروجی‌ها در کمترین مقدار ممکن قرار دارند، یعنی این واحد در نامطلوب‌ترین حالت خود قرار می‌گیرد. حال در فرآیند تحلیل کارایی، ارزیابی کارایی هر واحد را می‌توان تحت دو سناریوی خوش‌بینانه و بدبینانه انجام داد، به این صورت که در سناریوی خوش‌بینانه واحد تحت ارزیابی در بهترین حالت خود و سایر واحدهای تصمیم‌گیرنده در بدترین حالت خود قرار دارند. این سناریوی خوش‌بینانه، منجر مدل تحلیل کارایی خوش‌بینانه خواهد شد.

که برای  $DMU_o$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$d_o^{opt} = \max \quad 1^T d^x + 1^T d^y \quad (9)$$

$$\text{s.t.} \quad X_o^l - d^x = \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j^u + \lambda_o X_o^l$$

$$Y_o^u + d^y = \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j^l + \lambda_o Y_o^u$$

در نهایت با فرض این که تغییرات هم در ورودی و هم در خروجی مجاز است، حداکثر مقدار تغییرات مجاز بر حسب نرم یک توسط مساله زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P(\text{norm-1}): \quad & \min \quad \delta_x + \delta_y \\ \text{s.t.} \quad & x_o + \delta_x \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j x_j \\ & y_o - \delta_y \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j y_j \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1 \\ & \delta_x, \delta_y \geq 0 \\ & \lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o. \end{aligned}$$

نتایج سه مساله فوق در سه ستون بعدی جدول ۱ گزارش شده‌اند.

در گام بعدی تحلیل پایداری را برای واحدهای متعلق به رده  $D^>$  انجام می‌دهیم. برای این منظور لازم است مساله (۶) در سه شکل (P(out.P(in) و P(norm) ۱- تغییر یافته و حل شود. نتایج حاصل از حل این سه مساله در سه ستون آخر جدول ۱ داده شده‌اند.

در مورد تحلیل کارایی و پایداری افزاز حاصل از آن، فرآیند انجام شده دقیقاً مشابه حالت قبل انجام می‌شود. نتایج حاصل در جدول ۲ داده شده‌اند.

#### ۴. مدل پوسته دسترسی پذیری آزاد با داده‌های بازه‌ای

در تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های بازه‌ای فرض بر این است که (بعضی از) مقادیر ورودی و خروجی برای واحدهای تصمیم‌گیرنده به طور دقیق مشخص نبوده ولی در یک بازه بسته تغییر می‌کنند. برای  $j = 1, \dots, n$  فرض کنیم  $x_{ij} \in [x_{ij}^l, x_{ij}^u]$  و که در آن  $x_{ij}^u$  و  $x_{ij}^l$  به ترتیب نشان دهنده کران پایین و بالای ورودی  $i$  ام برای  $DMU_j$  است. به صورت مشابه

$$E^{++} = \{j \mid d_j^{opt} = 0, d_j^{pes} = 0\}, \quad (11)$$

$$E^+ = \{j \mid d_j^{opt} = 0, d_j^{pes} > 0\},$$

$$E^- = \{j \mid d_j^{opt} > 0, d_j^{pes} > 0\}.$$

در واقع  $E^{++}$  متشکل از واحدهایی است که در هر دو سناریوی خوش‌بینانه و بدبینانه کاملاً کارا هستند. به صورت مشابه  $E^+$  مجموعه همه واحدهایی است که تنها در سناریوی خوش‌بینانه کاملاً کارا هستند و در نهایت  $E^-$  متشکل از همه واحدهایی است که در هیچ کدام از سناریوهای خوش‌بینانه و بدبینانه کاملاً کارا نیستند.

یادآوری می‌کنیم که تحلیل کارایی فوق در واقع حاصل مقایسه عملکرد واحد تحت ارزیابی با مرز بهترین عملکرد تحت دو سناریوی خوش‌بینانه و بدبینانه می‌باشد. با در نظر گرفتن مطالب بخش پیشین می‌توان یک تحلیل مشابه را برای هر واحد تحت ارزیابی از طریق مقایسه آن با مرز بدترین عملکرد، در دو سناریوی خوش‌بینانه و بدبینانه نیز انجام داد. در این تحلیل که در واقع تحلیل ناکارایی نامیده می‌شود، فاصله نرم یک هر واحد تصمیم‌گیرنده تا مرز کاملاً ناکارا محاسبه می‌شود.

برای توضیح بیشتر توجه داریم که چون در اینجا هدف تحلیل ناکارایی است، دو حالت خوش‌بینانه و بدبینانه از منظر ناکارایی تعبیر می‌شوند. به این مفهوم که از منظر ناکارایی بهترین حالت ممکن برای هر واحد تصمیم‌گیرنده زمانی است که ورودی‌های آن بدترین مقدار ممکن و خروجی‌های آن بهترین مقدار ممکن خود را بگیرند. یعنی این واحد در مطلوبترین حالت خود از نظر ناکارایی، یا نزدیکترین موقعیت ممکن به مرز کاملاً ناکارا قرار دارد. به صورت مشابه، از منظر ناکارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده زمانی در بدترین حالت ممکن خود است که ورودی‌های آن کمترین مقدار ممکن و خروجی‌های آن بیشترین مقدار ممکن را اختیار

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$(d^x, d^y) \geq (0, 0)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n.$$

مقدار بهینه تابع هدف مساله فوق وضعیت کارایی  $DMU_o$  را در سناریوی خوش‌بینانه به دست می‌دهد، به این صورت که  $DMU_o$  در سناریوی خوش‌بینانه کاملاً کاراست اگر و تنها اگر  $d_o^{opt} = 0$ . به صورت مشابه در سناریوی بدبینانه برای  $DMU_o$  این واحد بدترین حالت خود و سایر واحدهای تصمیم‌گیرنده بهترین حالت خود را اختیار کرده‌اند. بنابراین مدل ریاضی تحلیل کارایی بدبینانه برای  $DMU_o$  به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$d_o^{pes} = \max \quad 1^T d^x + 1^T d^y \quad (10)$$

$$\text{s.t.} \quad X_o^u - d^x = \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j^l + \lambda_o X_o^u$$

$$Y_o^l + d^y = \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j^u + \lambda_o Y_o^l$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$(d^x, d^y) \geq (0, 0)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n.$$

با توجه به مدل ارزیابی فوق می‌توان گفت که  $DMU_o$  در سناریوی بدبینانه کاملاً کاراست اگر و تنها اگر  $d_o^{pes} = 0$ . با مقایسه دو مساله (۹) و (۱۰) به راحتی می‌توان نشان داد که  $d_o^{opt} \leq d_o^{pes}$ . این مطلب نتیجه می‌دهد که اگر  $DMU_o$  در سناریوی بدبینانه کاملاً کارا باشد، آنگاه به وضوح در سناریوی خوش‌بینانه نیز کاملاً کارا خواهد بود.

با توجه به مقدار تابع هدف دو مساله فوق، می‌توان مجموعه همه واحدهای تصمیم‌گیرنده،  $J$ ، را در سه دسته زیر افراز نمود:

کنند، یعنی واحد در نامطلوب‌ترین حالت خود از منظر ناکارایی قرار دارد. حال، مشابه آنچه در مورد تحلیل کارایی داشتیم، مدل‌های ارزیابی ناکارایی را نیز در دو سناریوی خوش‌بینانه و بدبینانه بررسی می‌کنیم. ابتدا، در تحلیل ناکارایی با سناریوی خوش‌بینانه فرض می‌کنیم که واحد تحت ارزیابی در بهترین حالت خود و سایر واحدها در بدترین حالت خود قرار دارند. با این توضیحات مدل ارزیابی ناکارایی خوش‌بینانه برای  $DMU_o$  به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

با استدلال مشابه،  $DMU_o$  در سناریوی بدبینانه کاملاً ناکاراست اگر و تنها اگر  $f_o^{pes} = 0$ . همچنین با در نظر گرفتن دو مساله (۱۲) و (۱۳) به راحتی می‌توان نشان داد که  $f_o^{opt} \leq f_o^{pes}$  و نتیجه گرفت که اگر  $DMU_o$  در سناریوی بدبینانه کاملاً ناکارا باشد، آنگاه به وضوح در سناریوی خوش‌بینانه نیز کاملاً ناکارا خواهد بود.

به صورت مشابه بر اساس تحلیل ناکارایی و با توجه به مقادیر تابع هدف دو مساله (۱۲) و (۱۳) برای واحدهای تصمیم‌گیرنده، می‌توان آنها را در سه مجموعه زیر طبقه‌بندی نمود:

$$NE^{++} = \{j | f_j^{opt} = 0, f_j^{pes} = 0\}, \quad (14)$$

$$NE^+ = \{j | f_j^{opt} = 0, f_j^{pes} > 0\},$$

$$NE^- = \{j | f_j^{opt} > 0, f_j^{pes} > 0\}.$$

مشابه آنچه که برای افراز (۱۱) گفته شد، می‌توان تفسیری مشابه مبتنی بر تحلیل ناکارایی برای افراز (۱۴) نیز بیان نمود.

$$f_o^{opt} = \max \quad 1^T f^x + 1^T f^y \quad (12)$$

$$\text{s.t.} \quad X_o^u + f^x = \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j^l + \lambda_o X_o^u$$

$$Y_o^l - f^y = \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j^u + \lambda_o Y_o^l$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$(f^x, f^y) \geq (0, 0)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n.$$

## ۵. پایداری و تحلیل حساسیت برای داده‌های بازه‌ای

با توجه به مدل فوق می‌توان گفت که  $DMU_o$  در سناریوی خوش‌بینانه کاملاً ناکاراست اگر و تنها اگر  $f_o^{opt} = 0$ . به صورت مشابه برای تحلیل ناکارایی بدبینانه  $DMU_o$  مدل زیر را داریم:

با توجه به مدل فوق می‌توان گفت که  $DMU_o$  در سناریوی خوش‌بینانه کاملاً ناکاراست اگر و تنها اگر  $f_o^{opt} = 0$ . به صورت مشابه برای تحلیل ناکارایی بدبینانه  $DMU_o$  مدل زیر را داریم:

$$f_o^{pes} = \max \quad 1^T f^x + 1^T f^y \quad (13)$$

$$\text{s.t.} \quad X_o^l + f^x = \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j^u + \lambda_o X_o^l$$

$$Y_o^u - f^y = \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j^l + \lambda_o Y_o^u$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$(f^x, f^y) \geq (0, 0)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n.$$

برای  $DMU_o$  بازه ورودی به صورت  $[X_o^l + \alpha, X_o^u]$  و بازه خروجی به صورت  $[Y_o^l, Y_o^u - \beta]$  در نظر گرفته شود. به منظور یافتن حداکثر میزان مجاز  $\alpha$  و  $\beta$  که این واحد تغییر یافته همچنان باشیم  $d_o^{opt} = 0$  مدل زیر را فرمول‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{vec min} \quad & (\alpha, \beta) \quad (15) \\ \text{s.t.} \quad & X_o^l + \alpha \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j^u \\ & Y_o^u - \beta \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j^l \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1 \\ & (\alpha, \beta) \geq (0, 0) \\ & \lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o. \end{aligned}$$

برای تایید اعتبار مساله فوق، قضیه زیر را داریم:

**قضیه ۵.** فرض کنیم  $(\alpha^*, \beta^*)$  یک جواب بهینه پارتو برای مساله (۱۵) باشد. اگر  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha^*, \beta^*)$ ، آنگاه واحد تغییر یافته با بازه ورودی  $[X_o^l + \alpha, X_o^u]$  و بازه خروجی  $[Y_o^l, Y_o^u - \beta]$  در سناریوی خوش بینانه کاملاً کاراست.

برای تحلیل پایداری در سناریوی بدبینانه به صورت مشابه عمل می‌کنیم. با توجه به مساله (۱۰) در تحلیل کارایی بدبینانه تنها  $X_o^u$  و  $Y_o^l$  نقش دارند. فرض کنیم  $\alpha$  بردار افزایش در  $X_o^u$  و بردار  $\beta$  بردار کاهش در  $Y_o^l$  باشد. به عبارت دیگر، فرض کنیم برای  $DMU_o$  بازه ورودی به صورت  $[X_o^l, X_o^u + \alpha]$  و بازه خروجی به صورت  $[Y_o^l - \beta, Y_o^u]$  در نظر گرفته شود.

در اینجا حداکثر میزان مجاز  $\alpha$  و  $\beta$  را برای این که واحد تغییر یافته همچنان در سناریوی بدبینانه کاملاً کارا بماند، به دست می‌آوریم. برای این منظور

تغییرات مجاز در داده‌های ورودی و خروجی آن واحد است، مشروط به این که واحد تصمیم‌گیرنده در همان رده تعیین شده خود باقی بماند. برای این منظور تحلیل پایداری را برای دو افراز معرفی شده در قبل به صورت جداگانه انجام می‌دهیم. تکنیک پیاده شده در این حالت، مشابه فرآیند تحلیل پایداری برای داده‌های معمولی می‌باشد، به این صورت که برای هر حالت یک مساله چندهدفه فرمول‌بندی شده و سپس توسط یک قضیه اعتبار مدل ارائه شده بررسی می‌شود. از آن جایی که نحوه اثبات این قضایا دقیقاً مشابه برهان قضیه‌های ارائه شده در بخش ۳ می‌باشد، از ارائه برهان‌ها صرف‌نظر می‌کنیم.

### ۵.۱. تحلیل پایداری برای افراز حاصل از ارزیابی کارایی

فرض کنیم  $DMU_o$  واحد تحت ارزیابی باشد. با در نظر گرفتن تحلیل کارایی این واحد در یکی از زیر مجموعه‌های  $E^{++}$ ،  $E^+$  یا  $E^-$  قرار می‌گیرد. در ادامه هریک از حالت‌های فوق را جداگانه بررسی می‌کنیم.

### ۵.۱.۱. تحلیل پایداری برای واحدهای متعلق به $E^{++}$

فرض کنیم  $o \in E^{++}$ . واضح است که اگر هر کدام از کران‌های مربوط به بازه‌های ورودی و خروجی برای  $DMU_o$  پیشرفت کنند، در کارایی این واحد خللی وارد نمی‌شود. لذا در مورد این واحد تنها لازم است حالت پسرفت را برای اندازه کارایی خوش‌بینانه و بدبینانه به صورت جداگانه بررسی کنیم.

با توجه به مساله (۹)، واضح است که برای ارزیابی کارایی خوش‌بینانه تنها  $X_o^l$  و  $Y_o^u$  نقش دارند. فرض کنیم بردار  $X_o^l$  به اندازه  $\alpha$  افزایش و بردار  $Y_o^u$  به اندازه  $\beta$  کاهش یابند. به عبارت دیگر، فرض کنیم

و بررسی کنیم که حداکثر میزان تغییر مجاز در این داده‌ها برای اینکه  $DMU_o$  همچنان متعلق به  $E^+$  باقی بماند چقدر است. واضح است که اگر  $X_o^u$  و  $Y_o^l$  پسرقت کنند (یعنی افزایش  $X_o^u$  و کاهش  $Y_o^l$  یابد)، اندازه  $d_o^{pes}$  از مقدار فعلی خود افزایش می‌یابد و لذا باز هم خواهیم داشت  $d_o^{pes} > 0$ . پس در اینجا لازم است تنها حالت پیشرفت در  $X_o^u$  و  $Y_o^l$  را مورد بررسی قرار دهیم. فرض کنیم  $\alpha$  بردار کاهش در  $X_o^u$  و  $\beta$  بردار افزایش در  $Y_o^l$  باشد. به عبارت دیگر، فرض کنیم برای  $DMU_o$  بازه ورودی به صورت  $[X_o^l, X_o^u - \alpha]$  و بازه خروجی به صورت  $[Y_o^l + \beta, Y_o^u]$  در نظر گرفته شود. حداکثر میزان مجاز  $\alpha$  و  $\beta$  برای این که برای واحد تغییر یافته همچنان داشته باشیم  $d_o^{pes} > 0$  از مدل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{vec max} \quad & (\alpha, \beta) \quad (17) \\ \text{s.t.} \quad & X_o^u - \alpha \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j^l \\ & Y_o^l + \beta \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j^u \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1 \\ & (\alpha, \beta) \geq (0, 0) \\ & \lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o. \end{aligned}$$

قضیه زیر اعتبار مدل فوق را نشان می‌دهد:

**قضیه ۷.** فرض کنیم  $(\alpha^*, \beta^*)$  یک جواب بهینه پارتو برای مساله (۱۷) باشد. الف) اگر  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha^*, \beta^*)$  و  $(\alpha, \beta) \neq (\alpha^*, \beta^*)$ ، آنگاه واحد تغییر یافته با بازه ورودی  $[X_o^l, X_o^u - \alpha]$  و بازه خروجی  $[Y_o^l + \beta, Y_o^u]$  در سناریوی بدبینانه غیر کاراست.

مدل زیر را فرمول‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{vec min} \quad & (\alpha, \beta) \quad (16) \\ \text{s.t.} \quad & X_o^u + \alpha \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j^l \\ & Y_o^l - \beta \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j^u \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1 \\ & (\alpha, \beta) \geq (0, 0) \\ & \lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o. \end{aligned}$$

قضیه زیر اعتبار مدل فوق را روشن می‌سازد.

**قضیه ۶.** فرض کنیم  $(\alpha^*, \beta^*)$  یک جواب بهینه پارتو برای مساله (۱۶) باشد. اگر  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha^*, \beta^*)$ ، آنگاه واحد تغییر یافته با بازه ورودی  $[X_o^l, X_o^u + \alpha]$  و بازه خروجی  $[Y_o^l, Y_o^u - \beta]$  در سناریوی بدبینانه کاملاً کاراست.

## ۵.۱.۲. تحلیل پایداری برای واحدهای متعلق به $E^+$

فرض کنیم  $o \in E^+$ ، یعنی  $d_o^{opt} = 0$  و  $d_o^{pes} > 0$ . در این بخش شعاع پایداری در تغییرات ورودی و خروجی  $DMU_o$  را برای این که این واحد همچنان متعلق به  $E^+$  باشد، به دست می‌آوریم. ابتدا در مورد پایداری کارایی خوش‌بینانه، مشابه قبل توجه داریم از آنجایی که  $d_o^{opt} = 0$ ، برای تحلیل حساسیت  $d_o^{opt}$  نسبت به تغییرات ورودی و خروجی تنها لازم است حالت پسرقت در ورودی‌ها و خروجی‌ها را در نظر بگیریم. لذا در این مورد، تحلیل پایداری دقیقاً مشابه حالت  $o \in E^{++}$  توسط مدل (۱۵) انجام می‌شود.

از طرف دیگر برای بررسی حساسیت کارایی بدبینانه لازم است تغییرات در  $X_o^u$  و  $Y_o^l$  را مد نظر قرار داده

اعتبار مدل فوق توسط قضیه زیر مشخص می‌شود:

**قضیه ۸.** فرض کنیم  $(\alpha^*, \beta^*)$  یک جواب بهینه پارتو برای مساله (۱۸) باشد.

الف) اگر  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha^*, \beta^*)$  و  $(\alpha, \beta) \neq (\alpha^*, \beta^*)$ ، آنگاه واحد تغییر یافته با بازه ورودی  $[X_o^l - \alpha, X_o^u]$  و بازه خروجی  $[Y_o^l, Y_o^u + \beta]$  در سناریوی خوش‌بینانه غیرکاراست.

ب) اگر  $(\alpha, \beta) = (\alpha^*, \beta^*)$  آنگاه واحد تغییر یافته با بازه ورودی  $[X_o^l - \alpha, X_o^u]$  و بازه خروجی  $[Y_o^l, Y_o^u + \beta]$  در سناریوی خوش‌بینانه کاملاً کاراست.

برای بررسی پایداری کارایی بدبینانه، با توجه به این که تنها لازم است حالت پیشرفت در داده‌های  $DMU_o$  مورد بررسی قرار بگیرد، تحلیل پایداری دقیقاً مشابه حالت  $o \in E^+$  انجام می‌شود. لذا حداکثر میزان تغییرات بهبود دهنده در  $X_o^l$  و  $Y_o^l$  از مساله (۱۷) به دست می‌آید.

## ۵. ۲. تحلیل پایداری برای افراز حاصل از ارزیابی ناکارایی

فرض کنیم  $DMU_o$  واحد تحت ارزیابی باشد. با در نظر گرفتن تحلیل ناکارایی این واحد در یکی از زیر مجموعه‌های  $NE^{++}$ ،  $NE^+$  یا  $NE^-$  قرار می‌گیرد. در ادامه به بررسی پایداری هر یک از حالت‌های فوق می‌پردازیم.

## ۵. ۲. ۱. تحلیل پایداری برای واحدهای متعلق به $NE^{++}$

فرض کنیم  $o \in NE^{++}$ ، یعنی  $f_o^{opt} = 0$  و  $f_o^{pes} = 0$  واضح است که اگر هر کدام از کران‌های مربوط به ورودی و خروجی برای  $DMU_o$  پسرفت کنند

ب) اگر  $(\alpha, \beta) = (\alpha^*, \beta^*)$  آنگاه واحد تغییر یافته با بازه ورودی  $[X_o^l, X_o^u - \alpha]$  و بازه خروجی  $[Y_o^l + \beta, Y_o^u]$  در سناریوی بدبینانه کاملاً کاراست.

## ۵. ۱. ۳. تحلیل پایداری برای واحدهای متعلق به $E^-$

فرض کنیم  $o \in E^-$ ، یعنی  $d_o^{pes}, d_o^{opt} > 0$ . در این بخش حداکثر میزان تغییرات مجاز در ورودی و خروجی  $DMU_o$  را برای این که این واحد همچنان متعلق به  $E^-$  باشد، به دست می‌آوریم. واضح است که اگر داده‌های مربوط به ورودی و خروجی برای  $DMU_o$  پسرفت کنند، آنگاه مقادیر  $d_o^{pes}$  و  $d_o^{opt}$  از مقدار فعلی خود کاهش خواهند یافت و لذا واحد تغییر یافته باز هم متعلق به  $E^-$  باقی می‌ماند. پس در اینجا لازم است تنها حالت پیشرفت را برای تحلیل کارایی خوشبینانه و بدبینانه به‌طور جداگانه بررسی کنیم.

برای بررسی پایداری کارایی خوش‌بینانه، مشابه قبل فرض کنیم بردار  $X_o^l$  به اندازه  $\alpha$  کاهش و بردار  $Y_o^u$  به اندازه  $\beta$  افزایش یابند. به عبارت دیگر، فرض کنیم برای  $DMU_o$  بازه ورودی به صورت  $[X_o^l - \alpha, X_o^u]$  و بازه خروجی به صورت  $[Y_o^l, Y_o^u + \beta]$  در نظر گرفته شود. حداکثر میزان مجاز  $\alpha$  و  $\beta$  برای این که ویژگی  $d_o^{opt} > 0$  برقرار بماند، از مدل زیر به دست می‌آید:

$$\text{vec max } (\alpha, \beta) \quad (18)$$

$$\text{s.t. } X_o^l - \alpha \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j^u$$

$$Y_o^u + \beta \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j^l$$

$$\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o.$$



به صورت مشابه، برای تحلیل پایداری که  $f_o^{pes} = 0$  را حفظ می‌کند، ابتدا توجه داریم که با توجه مدل (۱۳)، در تعیین  $f_o^{pes}$  تنها  $X_o^l$  و  $Y_o^u$  نقش دارند. فرض کنیم بردار  $X_o^l$  به اندازه  $\alpha$  کاهش و بردار  $Y_o^u$  به اندازه  $\beta$  افزایش یابد؛ به عبارت دیگر، برای  $DMU_o$  بازه ورودی به صورت  $[X_o^l - \alpha, X_o^u]$  و بازه خروجی به صورت  $[Y_o^l, Y_o^u + \beta]$  در نظر گرفته شود. نشان می‌دهیم حداکثر مقدار مجاز  $\alpha$  و  $\beta$  که منجر به افزایش مقدار  $f_o^{pes}$  نمی‌شود، از مدل زیر به دست می‌آید:

$$vec \min (\alpha, \beta) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & X_o^l - \alpha \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j^u \\ & Y_o^u + \beta \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j^l \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1 \\ & (\alpha, \beta) \geq (0, 0) \\ & \lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o. \end{aligned}$$

قضیه زیر صحت این ادعا را نشان می‌دهد.

**قضیه ۱۰.** فرض کنیم  $(\alpha^*, \beta^*)$  یک جواب بهینه پارتو برای مساله (۲۰) باشد. اگر  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha^*, \beta^*)$ ، آنگاه واحد تغییر یافته با بازه ورودی  $[X_o^l - \alpha, X_o^u]$  و بازه خروجی  $[Y_o^l, Y_o^u + \beta]$  در سناریوی بدبینانه کاملاً ناکاراست.

## ۵.۲.۲. تحلیل پایداری برای واحدهای متعلق

به  $NE^+$

فرض کنیم  $o \in NE^+$  پس  $f_o^{opt} = 0$  و  $f_o^{pes} > 0$  به منظور انجام تحلیل حساسیت برای حفظ مقدار

(یعنی ورودی‌ها افزایش و خروجی‌ها کاهش یابند)، آنگاه در وضعیت ناکارایی این واحد تغییری حاصل نمی‌شود. پس برای  $DMU_o$  تنها لازم است حالت پیشرفت را بررسی کنیم. ذیلاً این موضوع را برای ناکارایی خوشبینانه و ناکارایی بدبینانه مورد بحث قرار می‌دهیم.

به منظور محاسبه شعاع پایداری برای اینکه  $DMU_o$  همچنان در سناریوی خوشبینانه کاملاً ناکارا باقی بماند، توجه داریم که با توجه به مدل (۱۲) برای محاسبه  $f_o^{opt}$  تنها  $X_o^u$  و  $Y_o^l$  نقش دارند. لذا فرض می‌کنیم بردار  $X_o^u$  به اندازه  $\alpha$  کاهش و بردار  $Y_o^l$  به اندازه  $\beta$  افزایش پیدا کنند. به عبارت دیگر، فرض کنیم برای  $DMU_o$  بازه ورودی به صورت  $[X_o^l, X_o^u - \alpha]$  و بازه خروجی به صورت  $[Y_o^l + \beta, Y_o^u]$  در نظر گرفته شود. برای محاسبه حداکثر میزان مجاز  $\alpha$  و  $\beta$  که ویژگی  $f_o^{opt} = 0$  را حفظ می‌کند، مدل زیر را داریم:

$$vec \min (\alpha, \beta) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & X_o^u - \alpha \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j^l \\ & Y_o^l + \beta \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j^u \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1 \\ & (\alpha, \beta) \geq (0, 0) \\ & \lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o. \end{aligned}$$

قضیه زیر اعتبار مدل فوق را روشن می‌سازد.

**قضیه ۹.** فرض کنیم  $(\alpha^*, \beta^*)$  یک جواب بهینه پارتو برای مساله (۱۹) باشد. اگر  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha^*, \beta^*)$ ، آنگاه واحد تغییر یافته با بازه ورودی  $[X_o^l, X_o^u - \alpha]$  و بازه خروجی  $[Y_o^l + \beta, Y_o^u]$  در سناریوی خوش بینانه کاملاً ناکاراست.

پارتو برای مساله (۱۲) باشد.

الف) اگر  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha^*, \beta^*)$  و  $(\alpha, \beta) \neq (\alpha^*, \beta^*)$ ،  
 آنگاه واحد تغییر یافته با بازه ورودی  $[X_o^l + \alpha, X_o^u]$   
 و بازه خروجی  $[Y_o^l, Y_o^u - \beta]$  در سناریوی بدبینانه  
 غیر ناکاراست.

ب) اگر  $(\alpha, \beta) = (\alpha^*, \beta^*)$  آنگاه واحد تغییر یافته  
 با بازه ورودی  $[X_o^l, X_o^u - \alpha]$  و بازه خروجی  
 $[Y_o^l + \beta, Y_o^u]$  در سناریوی بدبینانه کاملاً ناکاراست.

### ۵.۲.۳. تحلیل پایداری برای واحدهای متعلق

به  $NE^-$

فرض کنیم  $o \in NE^-$ ، یعنی  $f_o^{pes}, f_o^{opt} > 0$ . واضح  
 است که اگر داده‌های مربوط به ورودی و خروجی  
 برای  $DMU_o$  پیشرفت کنند، آنگاه در مقدار  $f_o^{pes}$  و  
 $f_o^{opt}$  کاهش رخ نمی‌دهد و لذا باز هم خواهیم  
 داشت  $o \in NE^-$ . پس در اینجا لازم است تنها تاثیر  
 پیشرفت در داده‌های  $DMU_o$  را در کاهش مقادیر  
 $f_o^{pes}$  و  $f_o^{opt}$  به‌طور جداگانه بررسی کنیم.

ابتدا در مورد  $f_o^{opt}$ ، با توجه به اینکه با توجه به  
 مدل (۱۲) در تعیین این مقدار تنها بردارهای  $X_o^u$  و  
 $Y_o^l$  نقش دارند، فرض کنیم بردار  $X_o^u$  به اندازه  
 $\alpha$  افزایش و بردار  $Y_o^l$  به اندازه  $\beta$  کاهش یابند. به  
 عبارت دیگر، برای  $DMU_o$  بازه ورودی به‌صورت  
 $[X_o^l, X_o^u + \alpha]$  و بازه خروجی به‌صورت  $[Y_o^l - \beta, Y_o^u]$   
 در نظر گرفته شود. حداکثر مقدار مجاز  $\alpha$  و  $\beta$  که  
 وضعیت  $f_o^{opt} > 0$  را حفظ می‌کند، از مدل زیر به  
 دست می‌آید:

$f_o^{opt}$ ، ابتدا مشابه قبل توجه داریم که برای محاسبه  
 این مقدار، تنها  $X_o^u$  و  $Y_o^l$  نقش دارند و از طرفی  
 چون  $f_o^{opt} = 0$ ، پس اگر هر کدام از داده‌های  
 ورودی و خروجی برای  $DMU_o$  پیشرفت کنند،  
 بدتر نمی‌شود. لذا در این مورد تنها لازم است حالت  
 پیشرفت را مورد بررسی قرار دهیم. لذا در این مورد،  
 تحلیل پایداری دقیقاً مشابه حالت  $o \in NE^{++}$  به  
 دست می‌آید، یعنی تحلیل پایداری برای حفظ  
 $f_o^{opt} = 0$  به کمک مساله (۱۹) انجام می‌شود.

از طرف دیگر برای بررسی میزان پایداری  $f_o^{pes}$  با  
 توجه به مساله (۱۳) لازم است تغییرات در  $X_o^l$  و  
 $Y_o^u$  را مورد بررسی قرار دهیم. واضح است که اگر  
 $X_o^l$  و  $Y_o^u$  پیشرفت کنند، اندازه  $f_o^{pes}$  از مقدار فعلی  
 خود کاهش نمی‌یابد و لذا باز هم خواهیم داشت  
 $f_o^{pes} > 0$ . بنابراین لازم است تنها حالت پیشرفت در  
 $X_o^l$  و  $Y_o^u$  را مورد بررسی قرار دهیم. فرض کنیم  
 بردار  $X_o^l$  به اندازه  $\alpha$  افزایش و بردار  $Y_o^u$  به اندازه  
 $\beta$  کاهش یابند. به عبارت دیگر، برای  $DMU_o$  بازه  
 ورودی به صورت  $[X_o^l + \alpha, X_o^u]$  و بازه خروجی به  
 صورت  $[Y_o^l, Y_o^u - \beta]$  در نظر گرفته شود. حداکثر  
 مقدار مجاز  $\alpha$  و  $\beta$  که برای این که کماکان  
 داشته باشیم  $f_o^{pes} > 0$ ، از مدل زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1$$

$$(\alpha, \beta) \geq (0, 0)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o.$$

قضیه زیر اعتبار مدل فوق را نشان می‌دهد:

قضیه ۱۱. فرض کنیم  $(\alpha^*, \beta^*)$  یک جواب بهینه

مسائلی که افزایش در کران پایین و/یا کاهش در کران بالای ورودی‌ها و خروجی‌ها در نظر گرفته می‌شود (یعنی مسائل (۱۵)، (۱۷)، (۱۹) و (۲۱))، در نهایت مولفه‌های دو بردار  $\alpha^*$  و  $\beta^*$  را به صورت زیر به‌نگام‌سازی کنیم:

$$\alpha_i^* \leftarrow \min\{\alpha_i^*, x_{io}^u - x_{io}^l\}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\beta_r^* \leftarrow \min\{\beta_r^*, y_{ro}^u - y_{ro}^l\}, \quad r = 1, \dots, s.$$

### ۶. مثال تشریحی

مجموعه‌ای از ۱۲ واحد تصمیم‌گیرنده را با یک ورودی بازه‌ای و یک خروجی بازه‌ای در نظر بگیرید. داده‌های متناظر با این واحدها در دو ستون اول جدول ۳ داده شده است. همچنین شکل ۲ موقعیت این واحدها را در فضای یک ورودی- یک خروجی نشان می‌دهد.

سه ستون آخر جدول ۳ نتایج حاصل از تحلیل کارایی، یعنی مقادیر بهینه دو مساله (۹) و (۱۰) به همراه رده تعیین شده برای هر واحد را نشان می‌دهد. برای روشن شدن مطلب ناحیه شدنی دو مساله (۹) و (۱۰) برای واحد B به ترتیب در شکل ۳ و ۴ نشان داده شده است.

در گام بعدی تحلیل پایداری افزاز حاصل برای واحدهای متعلق به هر رده جداگانه انجام شده است. سه جدول ۱-۴، ۲-۴ و ۳-۴ نتایج حاصل را گزارش می‌دهند. برای تفسیر نتایج حاصل به عنوان مثال، بر طبق ستون آخر جدول ۳، دو واحد F و G به عنوان اعضای رده ++E تعیین شده‌اند. جدول ۱-۴ نتایج تحلیل پایداری را برای این دو واحد نشان می‌دهد. با توجه به مطالب گفته شده در بخش ۴، به منظور حفظ ویژگی کارا بودن این واحد با سناریوی خوش بینانه، مساله (۱۵) برای هر کدام از این واحدها فرمول‌بندی می‌شود. در این جا مساله را در سه شکل (P(out), P(in)) و ۱-P(norm) اسکارسازی و حل کرده‌ایم. مقادیر ستون مربوط به این مدل حداکثر میزان تغییرات مجاز را گزارش می‌دهند. در

$$\text{vec max } (\alpha, \beta) \quad (22)$$

$$\text{s.t. } X_o^u + \alpha \leq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j X_j^l$$

$$Y_o^l - \beta \geq \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j Y_j^u$$

$$\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1$$

$$(\alpha, \beta) \geq (0, 0)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, j \neq o.$$

قضیه زیر اعتبار مدل فوق را روشن می‌سازد.

**قضیه ۱۲.** فرض کنیم  $(\alpha^*, \beta^*)$  یک جواب بهینه پارتو برای مساله (۲۲) باشد.

الف) اگر  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha^*, \beta^*)$  و  $(\alpha, \beta) \neq (\alpha^*, \beta^*)$

آنگاه واحد تغییر یافته با بازه ورودی  $[X_o^l, X_o^u + \alpha]$  و بازه خروجی  $[Y_o^l - \beta, Y_o^u]$  در سناریوی خوش بینانه غیر ناکاراست.

ب) اگر  $(\alpha, \beta) = (\alpha^*, \beta^*)$  آنگاه واحد تغییر یافته با

بازه ورودی  $[X_o^l, X_o^u + \alpha]$  و بازه خروجی  $[Y_o^l - \beta, Y_o^u]$  در سناریوی خوش بینانه کاملاً ناکاراست.

در نهایت برای بررسی تحلیل حساسیت  $f_o^{pes}$  نسبت به تغییرات پسرستی در داده‌های  $DMU_o$ ، با توجه به این که لازم است تنها حالت پسرست را برای حفظ ویژگی  $f_o^{pes} > 0$  بررسی کنیم، این حالت دقیقاً مشابه حالت  $o \in NE^+$  خواهد بود. لذا در این مورد حداکثر میزان تغییرات مجاز در  $X_o^l$  و  $Y_o^u$  از حل مساله (۲۱) به دست می‌آید.

ملاحظه. به منظور حفظ خوش تعریف بودن داده‌های بازه‌ای، باید توجه داشته باشیم که حداکثر میزان تغییرات مجاز به دست آمده، نباید از طول بازه مورد نظر تجاوز نماید. بنابراین لازم است در

واحدهای تصمیم‌گیرنده با داده‌های بازه‌ای تعمیم داده و برای هر تحلیل افزایش متناظر را مشخص کردیم. سپس با یک روند مشابه، مساله پایداری را برای افزایش حاصل مورد بررسی قرار دادیم. لازم به ذکر است که می‌توان مساله پایداری را در مورد سایر مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، مانند مدل‌های شعاعی یا مدل‌های مبتنی بر متغیرهای کمکی نیز مدلسازی و تحلیل نمود.

از طرف دیگر، توجه داریم که مدل‌های پیشنهادی برای تحلیل پایداری در این مقاله در قالب مدل پوسته دسترسی پذیری آزاد فرمول‌بندی شده‌اند، و لذا ناحیه شدنی این مسائل یک مجموعه گسسته است. بنابراین طراحی یک مدل مبتنی بر شمارش به منظور حل مسائل فوق امری شدنی به نظر می‌رسد. در گام‌های بعدی می‌توان با استفاده از یک تکنیک مبتنی بر شمارش، یک فرمول‌بندی ساده‌تر برای ناحیه شدنی به دست آورده و سپس همه جواب‌های بهینه پارتو را برای هر مساله چندهدفه مورد بحث، به‌طور صریح مشخص نمود. پرواضح است که در این حالت، می‌توان ناحیه پایداری را برای هر حالت، به صورت اجتماع تعدادی از مجموعه‌های محدب چند وجهی به‌دست آورد. از این رو، برای حل مسائل مذکور نیازی به روش‌های اسکالرسازی نخواهد بود. این موضوع می‌تواند در کارهای پژوهشی بعدی مورد بحث و بررسی قرار بگیرد. همچنین می‌توان موضوع تحلیل حساسیت را از دیدگاه‌های دیگر، مانند اضافه شدن یا حذف یک واحد تصمیم‌گیرنده، یا تغییر در تعداد شاخص‌های ورودی و خروجی نیز بررسی نمود. از آن جایی که مدل‌های نامحدب اخیرا توجه بسیاری از دانشمندان را به خود جلب نموده است، این مسائل می‌توانند در کاربردهای زیادی گره‌گشا باشند.

نهایت فرآیند تحلیل ناکارایی برای واحدهای تحت ارزیابی به صورت مشابه انجام می‌شود. برای توضیح بیشتر، ناحیه شدنی دو مساله (۱۱) و (۱۲) برای واحد J به ترتیب در شکل ۵ و ۶ نشان داده شده است. تحلیل پایداری برای افزایش مبتنی بر ناکارایی نیز به صورت مشابه انجام می‌شود. نتایج حاصل در جدول ۵ به همراه سه جدول ۱-۶، ۲-۶ و ۳-۶ داده شده‌اند.

## ۷. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله موضوع تحلیل کارایی و ناکارایی و نیز مساله پایداری نتایج در مدل پوسته دسترسی پذیری آزاد مورد بحث قرار گرفت. همان گونه که قبلا گفته شده، مفهوم پایداری در تحلیل پوششی داده‌ها را می‌توان از جنبه‌ها و دیدگاه‌های مختلف بررسی نمود. در این پژوهش ابتدا با استفاده از یک مدل ارزیابی عملکرد در شکل جمعی که به پیشینه سازی متغیرهای کمکی می‌پردازد، واحدهای تصمیم‌گیرنده را به دو رده واحدهای کاملا کارا و واحدهای غیرکارا (در تحلیل کارایی) یا واحدهای کاملا ناکارا و واحدهای غیرناکارا (در تحلیل ناکارایی) افزایش کردیم. سپس مساله پایداری را در مورد هر یک از افزایش‌های به دست آمده بررسی نمودیم، به این صورت که برای هر واحد تصمیم‌گیرنده، ابتدا رده متناظر با آن را مشخص کرده و سپس حداکثر میزان تغییرات پیشرفتی و پسرفتی مجاز در داده‌های آن را با این هدف که این واحد در همان رده فعلی خود باقی بماند، از طریق حل یک مساله برنامه ریزی چندهدفه به‌دست آوردیم. از آن جایی که حل مساله چندهدفه و بدست آوردن شکل کلی ناحیه پایداری در حالت کلی پیچیده است، در این مقاله به سه روش تابع هدف برداری را اسکالرسازی کرده و در هر حالت حداکثر میزان تغییرات مجاز را برای ورودی‌ها و/یا خروجی‌ها محاسبه کردیم. در ادامه مدل‌های ارائه شده را برای

## فهرست مراجع

- [8] Tulkens, H. (2006). On FDH efficiency analysis: some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit. In *Public goods, environmental externalities and fiscal competition* (pp. 311-342). Springer, Boston, MA.
- [9] Kerstens, K., & Van De Woestyne, I. (2014). Solution methods for nonconvex free disposal hull models: A review and some critical comments. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 31(01), 1450010.
- [10] Charnes, A., Cooper, W. W., Lewin, A. Y., Morey, R. C., & Rousseau, J. (1984). Sensitivity and stability analysis in DEA. *Annals of Operations Research*, 2(1), 139-156.
- [11] Charnes, A., & Neralić, L. (1990). Sensitivity analysis of the additive model in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 48(3), 332-341.
- [12] Zhu, J. (1996). Robustness of the efficient DMUs in data envelopment analysis. *European Journal of operational research*, 90(3), 451-460.
- [13] Cooper, W. W., Li, S., Seiford, L. M., Tone, K., Thrall, R. M., & Zhu, J. (2001). Sensitivity and stability analysis in DEA: some recent developments. *Journal of productivity analysis*, 15(3), 217-246.
- [14] Neralić, L., & Wendell, R. E. (2019). Enlarging the radius of stability and stability regions in Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 278(2), 430-441.
- [1] Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 120(3), 253-290.
- [2] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978), Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research* 2 (6), 429-444.
- [3] Cooper, William W., Seiford, Lawrence M., Tone, Kaoru, *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software* (2007), Springer.
- [4] Yamada, Y., Matsui, T., & Sugiyama, M. (1994). An efficiency measurement method for management-systems. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 37, 158-168.
- [5] Entani, T., Maeda, Y., & Tanaka, H. (2002). Dual models of interval DEA and its extension to interval data. *European Journal of Operational Research*, 136(1), 32-45.
- [6] Aldamak, A., Hatami-Marbini, A., & Zolfaghari, S. (2016). Dual frontiers without convexity. *Computers & Industrial Engineering*, 101, 466-478.
- [7] Deprins, D., Simar, L., & Tulkens, H. (2006). Measuring labor-efficiency in post offices. In *Public goods, environmental externalities and fiscal competition* (pp. 285-309). Springer, Boston, MA.

## پیوست ۱. جداول:

جدول ۱. تحلیل کارایی و پایداری برای داده‌های مثال عددی ۱. توضیح: نماد  $\inf$  بیانگر  $\text{infinity}$  (بی‌کران) می‌باشد.

واحد	ورودی	خروجی	مساله (۱)	رده	مساله (۵)			مساله (۶)		
					P(in)	P(out)	P(norm-1)	P(in)	P(out)	P(norm-1)
A	1.5	2	0	D0	0.5 $\uparrow$	2 $\downarrow$	0.5=0.5 $\uparrow$ +0 $\downarrow$			
B	3	2.5	3.5	D>				1 $\downarrow$	3 $\uparrow$	3.5=0.5 $\downarrow$ +3 $\uparrow$
C	2	4	0	D0	0.5 $\uparrow$	2 $\downarrow$	0.5=0.5 $\uparrow$ +0 $\downarrow$			
D	4.5	1	6.5	D>				3 $\downarrow$	6 $\uparrow$	6.5=2 $\downarrow$ +4.5 $\uparrow$
E	5.5	2.5	6	D>				3.5 $\downarrow$	4.5 $\uparrow$	6=3 $\downarrow$ +3 $\uparrow$
F	2.5	5.5	0	D0	2 $\uparrow$	1.5 $\downarrow$	1.5=0 $\uparrow$ +1.5 $\downarrow$			
G	4.5	7	0	D0	+inf $\uparrow$	1.5 $\downarrow$	1.5=0 $\uparrow$ +1.5 $\downarrow$			
H	6	6.5	2	D>				1.5 $\downarrow$	0.5 $\uparrow$	2=1.5 $\downarrow$ +0.5 $\uparrow$
I	8.5	5.5	6	D>				6 $\downarrow$	1.5 $\uparrow$	6=6 $\downarrow$ +0 $\uparrow$
J	6	5	4	D>				3.5 $\downarrow$	2 $\uparrow$	4=3.5 $\downarrow$ +0.5 $\uparrow$
K	7.5	4.5	6	D>				5 $\downarrow$	2.5 $\uparrow$	6=5 $\downarrow$ +1 $\uparrow$
L	7	3.5	6.5	D>				5 $\downarrow$	3.5 $\uparrow$	6.5=4.5 $\downarrow$ +2 $\uparrow$

جدول ۲. تحلیل ناکارایی و پایداری برای داده‌های مثال عددی ۱

واحد	ورودی	خروجی	مساله (۳)	رده	مساله (۷)			مساله (۸)		
					P(in)	P(out)	P(norm-1)	P(in)	P(out)	P(norm-1)
A	1.5	2	4	F>				3 $\uparrow$	1 $\downarrow$	4=3 $\uparrow$ +1 $\downarrow$
B	3	2.5	3	F>				2.5 $\uparrow$	1.5 $\downarrow$	3=1.5 $\uparrow$ +1.5 $\downarrow$
C	2	4	5.5	F>				5 $\uparrow$	3 $\downarrow$	5.5=2.5 $\uparrow$ +3 $\downarrow$
D	4.5	1	0	F0	3 $\downarrow$	1.5 $\uparrow$	1.5=0 $\downarrow$ +1.5 $\uparrow$			
E	5.5	2.5	0	F0	1 $\downarrow$	1 $\uparrow$	1=0 $\downarrow$ +1 $\uparrow$			
F	2.5	5.5	6.5	F>				6 $\uparrow$	4.5 $\downarrow$	6.5=4.5 $\uparrow$ +2 $\downarrow$
G	4.5	7	6	F>				4 $\uparrow$	6 $\downarrow$	6=2.5 $\uparrow$ +3.5 $\downarrow$
H	6	6.5	4	F>				2.5 $\uparrow$	3 $\downarrow$	4=1 $\uparrow$ +3 $\downarrow$
I	8.5	5.5	0	F0	1 $\downarrow$	1.5 $\uparrow$	1=1 $\downarrow$ +0 $\uparrow$			
J	6	5	2.5	F>				1.5 $\uparrow$	1.5 $\downarrow$	2.5=1 $\uparrow$ +1.5 $\downarrow$
K	7.5	4.5	0	F0	0.5 $\downarrow$	1 $\uparrow$	0.5=0.5 $\downarrow$ +0 $\uparrow$			
L	7	3.5	0	F0	1.5 $\downarrow$	1 $\uparrow$	1=0 $\downarrow$ +1 $\uparrow$			

جدول ۳. تحلیل کارایی خوشبینانه و بدبینانه برای داده‌های مثال تشریحی

رده	مساله (۱۰)	مساله (۹)	خروجی	ورودی
E+	3	0	[1,2]	[1.5,2]
E+	5.5	0	[1.5,2.5]	[3,4]
E+	3.5	0	[3,4]	[2,3.5]
E-	8	4.5	[0.5,1]	[4.5,5.5]
E-	7.5	4	[2,2.5]	[5.5,6.5]
E++	0	0	[5,5.5]	[2.5,4]
E++	0	0	[6,7]	[4.5,5]
E+	4.5	0	[5.5,6.5]	[6,7]
E-	7.5	4	[5,5.5]	[8.5,9.5]
E-	5.5	2	[4,5]	[6,6.5]
E-	8	4	[4,4.5]	[7.5,9]
E-	8.5	4.5	[2.5,3.5]	[7,8]

جدول ۴-۱. تحلیل پایداری برای واحدهای متعلق به E++

واحد	ورودی	خروجی	مساله (۱۵)			مساله (۱۶)		
			P(in)	P(out)	P(norm-1)	P(in)	P(out)	P(norm-1)
F	[2.5,4]	[5,5.5]	1.5↑?	0.5↓	1.5=1.5↑+0↓	0.5↑	1↓	0.5=0.5↑+0↓
G	[4.5,5]	[6,7]	0.5↑	1↓	1=0↑+1↓	1↑	0.5↓	0.5=0↑+0.5↓

جدول ۴-۲. تحلیل پایداری برای واحدهای متعلق به E+

واحد	ورودی	خروجی	مساله (۱۵)			مساله (۱۷)		
			P(in)	P(out)	P(norm-1)	P(in)	P(out)	P(norm-1)
A	[1.5,2]	[1,2]	0.5↑	1↓	1=0↑+1↓	0↓	1↑	1=0↓+1↑
B	[3,4]	[1.5,2.5]	0.5↑	1↓	1=0↑+1↓	1↓	1↑	2=1↓+1↑
C	[2,3.5]	[3,4]	1.5↑	1↓	1.5=1.5↑+0↓	1↓	1↑	2=1↓+1↑
H	[6,7]	[5.5,6.5]	1↑	0.5↓	1=1↑+0↓	1↓	1↑	2=1↓+1↑

جدول ۴-۳. تحلیل پایداری برای واحدهای متعلق به E-

واحد	ورودی	خروجی	مساله (۱۷)			مساله (۱۸)		
			P(in)	P(out)	P(norm-1)	P(in)	P(out)	P(norm-1)
D	[4.5,5.5]	[0.5,1]	1↓	0.5↑	1.5=1↓+0.5↑	2.5↓	4↑	4.5=0.5↓+4↑
E	[5.5,6.5]	[2,2.5]	1↓	0.5↑	1.5=1↓+0.5↑	2↓	3.5↑	4=1.5↓+2.5↑
I	[8.5,9.5]	[5,5.5]	1↓	0.5↑	1.5=1+0.5↑	3.5↓	0.5↑	4=3.5↓+0.5↑
J	[6,6.5]	[4,5]	0.5↓	1↑	1.5=0.5↓+1↑	2↓	1↑	2=2↓+0↑
K	[7.5,9]	[4,4.5]	1.5↓	0.5↑	2=1.5↓+0.5↑	3.5↓	1.5↑	4=3.5↓+0.5↑
L	[7,8]	[2.5,3.5]	1↓	1↑	2=1↓+1↑	3↓	2.5↑	4=3↓+1.5↑

جدول ۵. تحلیل ناکارایی خوشبینانه و بدبینانه برای داده‌های مثال تشریحی

واحد	ورودی	خروجی	مساله (۱۱)	مساله (۱۲)	رده
A	[1.5,2]	[1,2]	2.5	5.5	NE-
B	[3,4]	[1.5,2.5]	1	5	NE-
C	[2,3.5]	[3,4]	3	7.5	NE-
D	[4.5,5.5]	[0.5,1]	0	0	NE++
E	[5.5,6.5]	[2,2.5]	0	2.5	NE+
F	[2.5,4]	[5,5.5]	4.5	8.5	NE-
G	[4.5,5]	[6,7]	4.5	8	NE-
H	[6,7]	[5.5,6.5]	2	6	NE-
I	[8.5,9.5]	[5,5.5]	0	2	NE+
J	[6,6.5]	[4,5]	1	4.5	NE-
K	[7.5,9]	[4,4.5]	0	2.5	NE+
L	[7,8]	[2.5,3.5]	0	0	NE++

جدول ۶-۱. تحلیل پایداری برای واحدهای متعلق به ++NE

واحد	ورودی	خروجی	مساله (۱۹)			مساله (۲۰)		
			1↓	0.5↑	1=1↓+0↑	2.5↓	1↑	1=0.5↓+0.5↑
D	[4.5,5.5]	[0.5,1]	1↓	0.5↑	1=1↓+0↑	2.5↓	1↑	1=0.5↓+0.5↑
L	[7,8]	[2.5,3.5]	1↓	1↑	1=1↓+1↑	0.5↓	0.5↑	0.5=0+0.5↑

جدول ۶-۲. تحلیل پایداری برای واحدهای متعلق به +NE

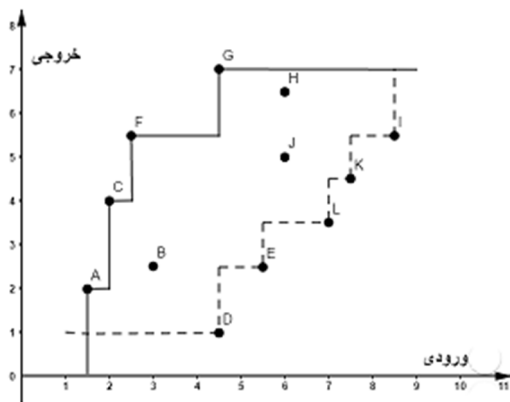
واحد	ورودی	خروجی	مساله (۱۹)			مساله (۲۱)		
			P(in)	P(out)	P(norm-1)	P(in)	P(out)	P(norm-1)
E	[5.5,6.5]	[2,2.5]	1↓	0.5↑	1=1↓+0↑	1↑	0.5↓	1=1↑+0↓
I	[8.5,9.5]	[5,5.5]	1↓	0.5↑	1=1↓+0↑	0.5↑	0.5↓	1=0.5↑+0.5↓
K	[7.5,9]	[4,4.5]	1.5↓	0.5↑	1.5=1.5↓+0↑	0.5↑	0.5↓	1=0.5↑+0.5↓

جدول ۶-۳. تحلیل پایداری برای واحدهای متعلق به -NE

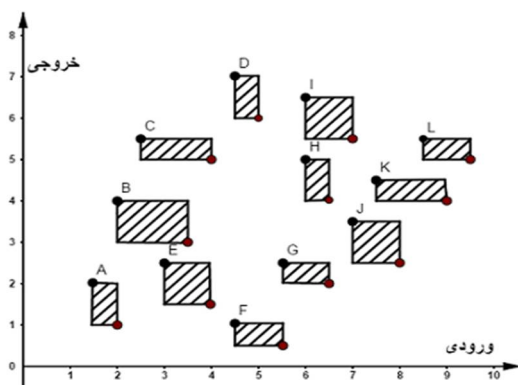
واحد	ورودی	خروجی	مساله (۲۱)			مساله (۲۲)		
			P(in)	P(out)	P(norm-1)	P(in)	P(out)	P(norm-1)
A	[1.5,2]	[1,2]	0.5↑	1↓	1.5=0.5↑+1↓	2.5↑	0↓	2.5=2.5↑+0↓
B	[3,4]	[1.5,2.5]	1↑	1↓	2=1↑+1↓	0.5↑	0.5↓	1=0.5↑+0.5↓
C	[2,3.5]	[3,4]	1.5↑	1↓	2.5=1.5↑+1↓	2↑	2↓	3=1↑+2↓
F	[2.5,4]	[5,5.5]	1.5↑	0.5↓	2=1.5↑+0.5↓	3.5↑	4↓	4.5=0.5↑+4↓
G	[4.5,5]	[6,7]	0.5↑	1↓	1.5=0.5↑+1↓	3.5↑	3.5↓	4.5=2↑+2.5↓
H	[6,7]	[5.5,6.5]	1↑	1↓	1=1↑+1↓	1.5↑	2↓	2=0+2↓
J	[6,6.5]	[4,5]	0.5↑	1↓	1.5=0.5↑+1↓	0.5↑	0.5↓	1=0.5↑+0.5↓



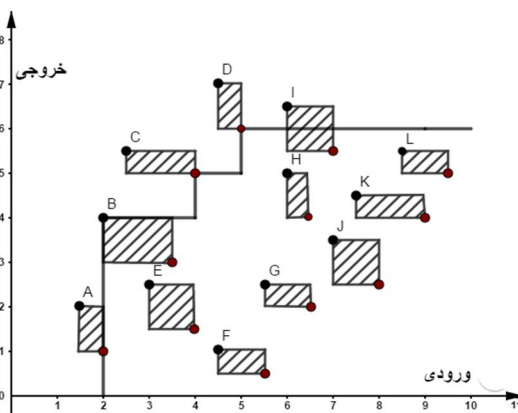
پیوست ۲. اشکال



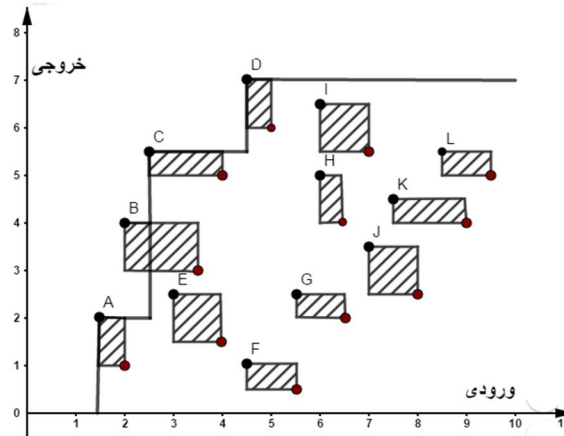
شکل ۱. موقعیت واحدهای تصمیم‌گیرنده مثال عددی در فضای ورودی - خروجی



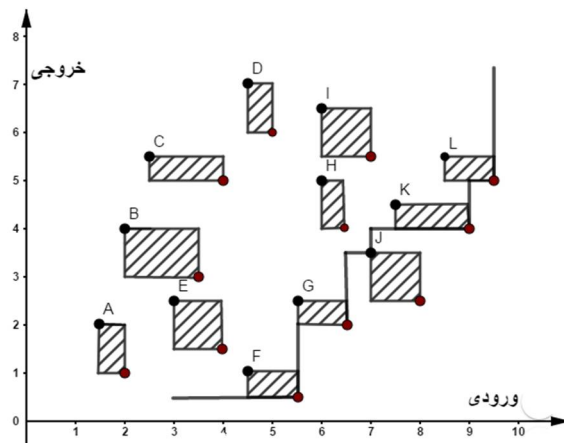
شکل ۲. موقعیت واحدهای تصمیم‌گیرنده مثال تشریحی در فضای ورودی-خروجی



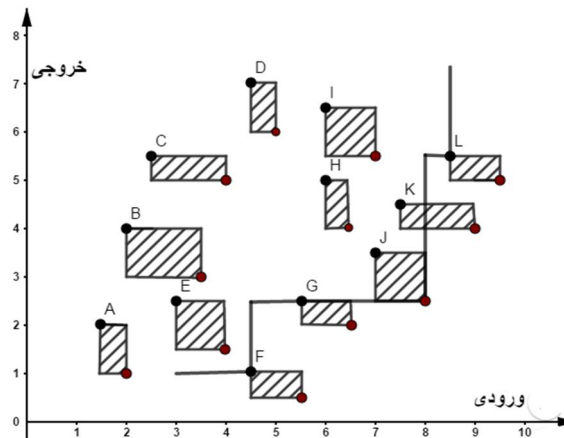
شکل ۳. ناحیه شدنی مدل ۹ برای واحد B در مثال تشریحی



شکل ۴. ناحیه شدنی مدل ۱۰ برای واحد B در مثال تشریحی



شکل ۵. ناحیه شدنی مدل ۱۱ برای واحد L در مثال تشریحی



شکل ۶. ناحیه شدنی مدل ۱۲ برای واحد L در مثال تشریحی