دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیستم، مهر و آبان ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

خروجی‌های با تأخیر زمانی: مدلی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها

سهیلا سیدبویر[۱*]، مهناز مقبولی[۲]، فاطمه مطرود[۳]

[۱و۳] گروه ریاضی کاربردی، واحد آبادان، دانشگاه آزاد اسلامی، آبادان، ایران
[۲] گروه ریاضی کاربردی، واحد هادی‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، هادی‌شهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۰/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۹/۲۷

چکیده

در این مقاله با استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با خروجی‌هایی سرو کار داریم که در مقاطع زمانی مختلف تولید می‌شوند. در اکثر مثال‌ها و مسایل عملی، خروجی‌ها در مقاطع زمانی مختلف تولید می‌گردند به این معنی که خروجی تولید شده در مرحله‌ی زمانی اول، تولیدات در زمان بعدی را تحت تاثیر قرار می‌دهد. این نوع خروجی‌ها را با عنوان خروجی‌هایی با تاخیر زمانی معرفی می‌کنند. لذا با توجه به اینکه این خروجی‌ها در مقاطع زمانی مختلف تولید می‌شوند قابلیت ایفای نقش در قالب فاکتورهای دوگانه را دارند به این معنی که هم زمان به‌عنوان خروجی مرحله اول وهم به‌عنوان ورودی در مرحله زمانی بعدی در نظر گرفته می‌شود. این مقاله، خروجی‌هایی با تاخیر زمانی را با دیدگاه فاکتور دوگانه مورد بررسی قرار داده و با هدف دستیابی به حداکثر کارایی واحد تحت ارزیابی، تعدیلی از تکنولوژی وابسته را ارایه می‌دهد. نتایج بررسی نمونه واقعی از ده دانشکده نشان دهنده قابلیت و توانایی مدل در رفتار با خروجی‌های با تاخیر زمانی است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، خروجی با تاخیر زمانی، فاکتور دوگانه و بازه زمانی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: s.seyedboveir@gmail.com

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یکی از متداول‌ترین روش‌های غیر پارامتری برای ارزیابی عملکرد نهادها و دیگر فعالیت‌های رایج در زمینه‌های مختلف است. علت مقبولیت گسترده این روش نسبت به سایر روش‌ها امکان بررسی روابط پیچیده و اغلب نامعلوم بین چدین ورودی و چندین خروجی است. به‌عبارت دیگر، در این روش برنامه‌ریزی ریاضی، واحدهای تصمیم‌گیرنده یا همان DMUها موجودیتی است که ورودی‌های نیمه مثبت چندگانه را به خروجی‌های نیمه مثبت چندگانه تبدیل می‌کنند و ارزیابی آن مورد نظر است. در مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها، تمام خروجی‌های تولید شده در یک مقطع زمانی در نظر گرفته می‌شود و هیچ خروجی تقدم یا تاخری بر خروجی دیگر ندارد. واقعیت این است که در دنیای واقعی این فرض چندان درست نیست و خروجی‌ها لزوماً در یک زمان تولید نمی‌گردند بلکه می‌توانند در مقاطع زمانی مختلف تولید گردند. ساکوتو و همکاران در مقاله ۲۰۱۵ این نوع خروجی‌ها را تحت عنوان خروجی وابسته به زمان توصیف کرده و این نوع خروجی‌ها را مورد بررسی قرار داده‌اند. نویسندگان مقاله اظهار می‌دارند که دو خروجی که در مقاطع مختلف زمانی تولید می‌شوند می‌تواند به عنوان فاکتور دوگانه در نظر گرفته شود. فاکتورهای دوگانه همان فاکتورهایی هستند که هم زمان نقش ورودی و خروجی را بازی می‌کنند. در ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها، مدل‌های متفاوتی برای بیان و توصیف این فاکتورها به کار گرفته شده است. بیزلی در سال‌های ۱۹۹۰ و ۱۹۹۵ برای اولین بار از عبارت فاکتور دوگانه برای ارزیابی بهره‌وری در دانشگاه‌ها استفاده نموده و مدلی را ارایه نمود. کوک و همکاران در ۲۰۰۶ در مقاله‌ای به دو مشکل عمده این مدل اشاره نمودند. اول اینکه در غیاب نسبت‌های مخروطی بر روی ضرایب، هر واحد می‌تواند تا ۱۰۰ درصد کارا باشد و فاکتور دو گانه بیشتر تمایل به اجرای نقش ورودی دارد تا خروجی. دوم اینکه مدل دوگان مدل فوق، تمام ورودی‌های قابل کنترل از جمله فاکتورهای دوگانه را به نسبت یکسان کاهش می‌دهد و این امر سبب ناهماهنگی در رفتار با فاکتورهای دوگانه در نقش خروجی می‌شود. با در نظر گرفتن این معایب، مدل جدید ارایه شد و با اجرای آن بر مجموعه داده‌های مشابه با مقاله بیزلی، برتری مدل پیشنهادی نشان داده شد. کوک و ژو در ۲۰۰۷، مدلی مبتنی بر بازده به مقیاس ثابت و در چهارچوب مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها ارایه نمودند. این مدل ضمن در نظر گرفتن فاکتورهای دوگانه، نه تنها قادر به ارزیابی یک واحد است بلکه قادر به ارزیابی گروهی از واحدهای تصمیم‌گیرنده است. دیدگاه دیگر این است که زمانی که در حال ارزیابی با مدل‌های ورودی محور تحلیل پوششی داده‌ها هستیم، فاکتورهای دوگانه را به عنوان متغیرهای غیر قابل کنترل یا متغیرهای محیطی ثابت و در نقش ورودی به کار بگیریم. طلوع در سال ۲۰۰۹ با بررسی مدل پیشنهادی کوک و ژو (۲۰۰۷) نشان داد که این مدل نادرست است. زیرا یک اشتباه محاسباتی می‌تواند سبب ایجاد نمره کارایی نادرست گردد و مدلی متفاوت را ارایه نمود که فاقد این خطای محاسباتی بود. بررسی مدل پیشنهادی طلوع (۲۰۰۹) توسط امیرتیموری و امروز نژاد در سال ۲۰۱۲، نشان داد که مدل گاهی اوقات امتیاز کارایی را بیشتر از حد واقعی آن نشان می‌دهد و در برخی مثال‌های واقعی حتی نشدنی است. طلوع و برات در سال ۲۰۱۵ مجدداً مدلی را ارایه نمودند که قادر به معین نمودن نقش فاکتورهای دوگانه بود. برای بررسی نقش فاکتورهای دوگانه، اینکه این فاکتورها در نقش ورودی باشند یا خروجی، دو روش متفاوت از سوی نویسندگان مقاله ارایه شد. دینگ و همکاران در ۲۰۱۵ مدعی شدند که مدل‌های موجود رفتار استراتژیک محیط خارجی را در روند تصمیم‌گیری دخیل نمی‌دانند. از این رو تحلیل‌های ناشی از این مدل‌ها در اقتصاد به شدت رقابتی امروز، مناسب نمی‌باشد. نویسندگان، استراتژِی دو مرحله‌ای را پیشنهاد نمودند که قادر به یافتن کاراترین عرضه کننده در حضور فاکتورهای دوگانه باشد. صاین در ۲۰۱۰ مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها را چنان دستکاری نمود تا بتواند فاکتورهای دوگانه را در این مدل‌ها بگنجاند. مدل‌های پیشنهادی صاین در انتخاب تولید کننده‌های 3PL کاربردی و موثر بود. ون چن در ۲۰۱۴ مفهوم تکنولوژی وابسته را معرفی نمود و تمایل فاکتورهای دوگانه را به

ایفای نقش ورودی یا خروجی براساس ارزیابی نتایج حاصل شده مورد بررسی قرار داد و آن را از زوایای متفاوت تشریح نمود. نویسنده مقاله مدعی است که این تمایل به ارایه یکی از دو نقش ورودی یا خروجی خاصیت مرز تصویر شده است نه خاصیت خود متغیر. نکته جالب توجه در تمام مدل‌های مورد بررسی، استفاده از مقادیر عددی و دقیق است. هر چند داده‌های دنیای واقعی همگی نادقیق می‌باشند. طلوع و همکاران در ۲۰۱۸ مدل‌های DEA بازه‌ای را با حضور فاکتورهای دوگانه چنان توسعه دادند که شامل مفهوم عدم اطمینان نیز باشد. در این مدل ضرایب بهینه به هر کدام از فاکتورهای دوگانه اختصاص داده شد تا معین گردد که آیا این فاکتور خروجی است.

یا ورودی یا اصلاً این فاکتور در حالت تعادل است. با توجه به بررسی اخیر، در این مقاله درصدد توسعه مفهوم تکنولوژی وابسته به خروجی‌هایی با تاخیر زمانی هستیم. براساس اصول موضوعه در DEA، برای مفهوم تکنولوژی وابسته و خروجی وابسته به زمان مجدداً اصول موضوعه تعریف گردیده و براساس این اصول موضوعه مدلی برای ارزیابی پیشنهاد خواهد شد. بنابر مفهوم تکنولوژی وابسته، مجموعه امکان تولید و مدل‌های پیشنهادی همگی خوش تعریف هستند. همچنین مدل پیشنهادی برای بررسی خروجی‌هایی با تاخیر زمانی کاملاً کاربردی و موثر می‌باشند. روند پیشنهادی ساده و خروجی‌های وابسته به زمان با تمام جزییات در آن پیاده سازی شده‌اند. برحسب زمان‌های مختلف تولید، خروجی‌هایی با تاخیر زمانی در قالب فاکتورهای دوگانه مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت. این مقاله به شرح زیر قالب‌بندی شده است.در بخش دوم مفهوم امکان تولید مشترک به‌عنوان یک روش ارزیابی عملکرد مورد بحث قرار می‌گیرد. در بخش سوم، با به کارگیری مفهوم فاکتور دوگانه، خروجی وابسته به زمان تحلیل می‌شود. سپس تکنولوژی پیشنهادی و مدل ارایه شده به همراه یک مثال واقعی در ادامه بخش آورده می‌شود. مقاله با نتیجه‌گیری به پایان می‌رسد.

۲- تعاریف و پیش نیازها

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده داریم. هر واحد $DMU_j\,(j=1,\dots,n)$ در حضور d فاکتور دو گانه m ورودی نیمه مثبت $x_{ij}\,(i=1,\dots,m)\geq 0$ را برای تولید s خروجی نیمه مثبت $y_{rj}\,(r=1,\dots,s)\geq 0$ به کار می‌گیرد. فاکتور دوگانه با بردار $w_{kj}\,(k=1,\dots,d)\geq 0$ نشان داده می‌شود. فاکتور دوگانه همان طور که از اسم آن پیداست همزمان نقش ورودی و خروجی را خواهد داشت. وقتی این فاکتورها نقش خروجی را داشته باشند علاوه بر خروجی y، خروجی دوگانه نیز در ارزیابی وارد خواهد شد و اگر نقش ورودی را داشته باشد علاوه بر ورودی x، ورودی دوگانه نیز در ارزیابی دخیل خواهد بود. تکنولوژی مورد نظر با تاکید بر نقش خروجی فاکتور دوگانه W به صورت زیر قابل تعریف است:

$$T_1=\{(x,w,y);\,x\ \text{can produce}(w,y)\}$$

تکنولوژی مورد نظر با تولید خروجی y، با به کارگیری ورودی x و تاکید بر نقش ورودی فاکتور دوگانه W به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$T_2=\{(x,w,y);\,(x\,,w)\ \text{can produce}\ y\}.$$

تکنولوژی کلی با تاکید بر هر دو نقش ورودی و خروجی فاکتور دوگانه W در واقع اشتراک دو تکنولوژی فوق خواهد بود. براساس فرض دسترسی پذیری قوی، تحدب و بازده به مقیاس ثابت تخمین احتمالی برای مجموعه امکان تولید $T_1\bigcap T_2$ به قرار زیر می‌تواند باشد.

$$T_1\bigcap T_2=\left\{\begin{matrix}(x,w,y)|\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\leq x,\ \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j y_j\geq y,\ \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j w_j\geq w\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\leq x,\ \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j w_j\leq w,\ \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j y_j\geq y,\lambda_j\geq 0\end{matrix}\right\}$$

همانطور که از تکنولوژی فوق معلوم است ضریب واحد λ برای اشتراک گذاری دو تکنولوژی استفاده می‌شود. بر این اساس، کارایی واحد تحت ارزیابی (x_k,w_k,y_k) با به کارگیری برنامه‌ریزی خطی زیر قابل ارزیابی است:

$$\theta_k^{radial} = Min \ \theta$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta x_{ik} \quad i=1,\dots,m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{rk} \quad r=1,\dots,s,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_{pj} \le \theta w_{pk} \quad p=1,\dots,d,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_{pj} \ge \theta w_{pk} \quad p=1,\dots,d,$$

$$\lambda_j \ge 0, \quad j=1,\dots,n.$$

در مدل خطی بالا ضریب انقباض θ برای ورودی x و فاکتور دوگانه w که در نقش ورودی هم می‌تواند باشد اعمال شده است. تابع هدف مدل این انقباض را حداقل می‌کند. نکته در این است که بردار سه‌تایی (x_k, w_k, y_k) در تمام قیود مدل صدق می‌کند.

۳- تکنولوژی برای ساختاری دارای خروجی‌های با تاخیر زمانی

شکل ۱ ساختاریک واحد با خروجی‌هایی با تأخیر زمانی را نشان می‌دهد. در دوره زمانی t، ورودی‌ها با $x_{ij}^t (i = 1, \dots, m)$ و خروجی‌ها با $y_{rj}^t (r = 1, \dots, s)$ نشان داده می‌شود. فعالیت w_{dj}^t، به‌عنوان خروجی‌هایی با تأخیر زمانی در نظر گرفته می‌شوند یعنی هم می‌توانند به‌عنوان خروجی در دوره زمانی t عمل کرده و هم می‌توانند به‌عنوان ورودی در دوره زمانی دیگری $\bar{t}$ وارد شوند. حال با توجه به مفروضات بخش قبل و شکل ۱، ساختار جبری دو مجموعه امکان تولید T_1 و T_2 ساخته می‌شود. برای تعیین نمایش جبری T_1، فرض‌های زیر را در نظر بگیرید: (A_1) به ازای هر

$$(x_j^t, w_j^t, y_j^t) \in T_1 \ ; \ j = 1,\dots,n, t = 1,\dots,T$$

(A_2) اصل بی‌کرانی اشعه: برای هر

$$\lambda^t \ge 0 \ ; \ \text{if} \ (x^t, w^t, y^t) \in T_1$$

آنگاه

$$(\lambda^t x^t, \lambda^t w^t, \lambda^t y^t) \in T_1$$

(A_3) اصل تحدب: فرض کنید

$$(x^t, w^t, y^t) \in T_1 \quad , \quad (x''^t, w''^t, y''^t) \in T_1$$

در این صورت برای هر $\lambda \in [0,1]$خواهیم داشت

$$\lambda^t (x^t, w^t, y^t) + (1 - \lambda^t)(x''^t, w''^t, y''^t) \in T_1$$

(A_4) اصل دسترسی پذیری آزاد: فرض کنید

$$(x^t, w^t, y^t) \in T_1$$

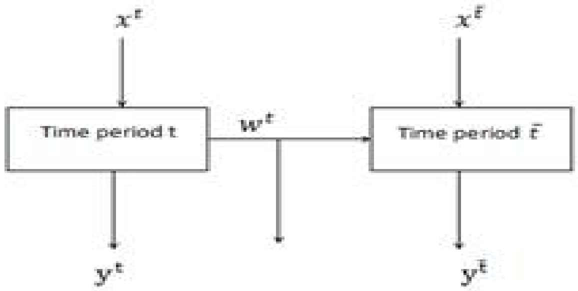
اگر

$$x''^t \ge x^t, \ y''^t \le y^t, w''^t \le w^t$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$(x''^t, w''^t, y''^t) \in T_1$$

شکل ۱. ساختار یک واحد با خروجی‌هایی با تاخیر زمانی



(A_5) اصل کمینه درونیابی:

فرض کنید T' در فرض‌های A1 تا A4 صدق کند در این صورت $T' \subseteq T_1$. پس T_1 به صورت

$$T_1=\left\{(x^t,y^t,w^t)\left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t x_j^t \le x^t, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t y_j^t \ge y^t \\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t w_j^t \ge w^t, \lambda_j^t \ge 0, j=1,\dots,n, t=1,\dots,T \end{array}\right.\right\}$$

قابل تعریف است.

و اگر متغیر w به عنوان ورودی در نظر گرفته شود آنگاه مجموعه امکان تولید T_2 را خواهیم داشت که نمایش جبری آن بر اساس اصول موضوعه:

(A_1) به ازای هر

$(x_j^{\bar{t}}, w_j^{t}, y_j^{\bar{t}}) \in T_2$ ، $j=1,\dots,n, \bar{t}=1,\dots,T$.

(A_2) اصل بی کرانی اشعه برای هر

$\lambda^{\bar{t}} \ge 0$ ؛ if $(x^{\bar{t}}, w^t, y^{\bar{t}}) \in T_2$

آنگاه

$(\lambda^{\bar{t}} x^{\bar{t}}, \lambda^{\bar{t}} w^t, \lambda^{\bar{t}} y^{\bar{t}}) \in T_2$

(A_3) اصل تحدب: فرض کنید

$(x^{\bar{t}}, w^t, y^{\bar{t}}) \in T_2$ و $(x'^{\bar{t}}, w'^t, y'^{\bar{t}}) \in T_2$

در این صورت برای هر $\lambda \in [0,1]$ خواهیم داشت:

$\lambda^{\bar{t}}(x^{\bar{t}}, w^t, y^{\bar{t}}) + (1-\lambda^{\bar{t}})(x'^{\bar{t}}, w'^t, y'^{\bar{t}}) \in T_2$

(A_4) اصل دسترسی پذیری آزاد:

فرض کنید

$(x^{\bar{t}}, w^t, y^{\bar{t}}) \in T_2$ ،

if $x'^{\bar{t}} \ge x^{\bar{t}}$, $w'^t \ge w^t$ ، $y'^{\bar{t}} \le y^{\bar{t}}$

در این صورت خواهیم داشت:

$(x'^{\bar{t}}, w'^t, y'^{\bar{t}}) \in T_2$.

(A_5) اصل کمینه درون‌یابی فرض کنید T' در فرض‌های A1 تا با A4 صدق کند در این صورت $T_2 \subseteq T'$، به صورت زیر خواهد بود:

$$T_2=\left\{(x^{\bar{t}},w^t,y^{\bar{t}})\left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{\bar{t}} x_j^{\bar{t}} \le x^{\bar{t}}, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{\bar{t}} y_j^{\bar{t}} \ge y^{\bar{t}} \\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{\bar{t}} w_j^t \ge w^t, \lambda_j^{\bar{t}} \ge 0, j=1,\dots,n, t,\bar{t}=1,\dots,T \end{array}\right.\right\}$$

با توجه به اینکه فاکتور w^t دارای نقش دوگانه بین دو دوره زمانی می‌باشد. بنابراین تکنولوژی کلی به‌صورت تقریبی از $T = T_1 \cap T_2$ می‌باشد و نمایش جبری آن به‌صورت زیر است:

$$T_1 \cap T_2=\left\{(x^t,w^t,y^t,x^{\bar{t}},w^t,y^{\bar{t}})\left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t x_j \le x^t, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t y_j \ge y^t, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^t w_j \ge w^t \\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{\bar{t}} x_j \le x^{\bar{t}}, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{\bar{t}} y_j \ge y^{\bar{t}}, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{\bar{t}} w_j \le w^t \\ \lambda_j^t, \lambda_j^{\bar{t}} \ge 0, j=1,\dots,n, t,\bar{t}=1,\dots,T \end{array}\right.\right\}$$

سه قید اول مربوط به تکنولوژی T_1 در دوره زمانی $t = 1, \dots, T$ دارای ضریب λ_j^t و بقیه قیود مربوط به تکنولوژی T_2 در دوره زمانی $\bar{t}$، است و از ضریب $\lambda_j^{\bar{t}}$ استفاده شده است. در تعریف $T = T_1 \cap T_2$ فرض بر این است که اندازه w^t یک فاکتور با نقش دوگانه است و تکنولوژی مربوط به آن به نام تکنولوژی مشترک به این صورت ساخته شده است که فاکتور با نقش دوگانه هم زمان به‌عنوان ورودی و خروجی می‌تواند در ارزیابی دخیل باشد.

۴- مدل پیشنهادی

در این بخش کارایی نسبی مربوط به مرز تکنولوژی مشترک $T = T_1 \cap T_2$ و مدل مربوط به آن پیشنهاد شده است. با توجه به شکل ۱، مرز کارایی مربوط به مجموعه امکان تولید T_1 به‌صورت زیر است:

$$EffT_1 = \left\{ \begin{array}{l} (x^t, w^t, y^t) \\ \in T_1 \left| \begin{array}{l} (-x'^t, w'^t, y'^t) \ge (-x^t, w^t, y^t) \\ , (x^t, w^t, y^t) \ne (x'^t, w'^t, y'^t) \end{array} \right. \\ \Rightarrow (x'^t, w'^t, y'^t) \in T_1 \end{array} \right\}$$

به طور مشابه، مرز کارایی مربوط به مجموعه امکان تولید T_2 در دوره زمانی $\bar{t}$ به صورت زیر است:

$$EffT_2 = \left\{ T_2 \left| \begin{array}{l} (x^{\bar{t}}, w^t, y^{\bar{t}}) \in \\ (-x'^{\bar{t}}, w'^t, y'^{\bar{t}}) \geq (-x^{\bar{t}}, w^t, y^{\bar{t}}), \\ (x^{\bar{t}}, w^t, y^{\bar{t}}) \neq (x'^{\bar{t}}, w'^t, y'^{\bar{t}}) \\ \Rightarrow (x'^{\bar{t}}, w'^t, y'^{\bar{t}}) \in T_2 \end{array} \right. \right\}$$

با توجه به تعریف تکنولوژی کلی مرز کارایی مربوط به مجموعه امکان تولید مشترک به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$EffT = (EffT_1 \cap T_2^c) \cap (EffT_2 \cap T_1^c) \quad (1)$$

با توجه به تعریف (۱) و قضایای زیر، بررسی خواهیم شد که ماکسیمم اندازه کارایی θ^*، برای حالتی که متغیر w^t به عنوان خروجی در دوره t و به عنوان ورودی در دوره $\bar{t}$ به کار برده می‌شود برابر با اندازه کارایی درحالتی است که این فاکتور با نقش دوگانه به کار برده می‌شود. به طور جبری می‌توان نوشت:

$$\theta^* = \min \left\{ \begin{array}{l} \theta | (\theta x^t, \theta w^t, y^t) \in T_1, \\ (\theta x^{\bar{t}}, \theta w^t, y^{\bar{t}}) \in T_2 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} \min_\theta \{\theta | (\theta x^t, \theta w^t, y^t) \in T_1\} \\ , \min_\theta \{\theta | (\theta x^{\bar{t}}, \theta w^t, y^{\bar{t}}) \in T_2\} \end{array} \right\} \quad (2)$$

قضیه ۱: اگر

$$\min_\theta \{\theta | (\theta x^t, \theta w^t, y^t) \in T_1\} > \min_\theta \{\theta | (\theta x^{\bar{t}}, \theta w^t, y^{\bar{t}}) \in T_2\}$$

آنگاه

$$(\theta x^t, \theta w^t, y^t) \in EffT_1 \cap T_2^c .$$

اثبات: این قضیه با توجه به اینکه که مرز کارایی مجموعه امکان تولید مشترک، اشتراک مرز کارایی دو مجموعه امکان تولید در دو دوره زمانی متفاوت می‌باشد، به آسانی قابل اثبات است. فرض کنید

$$\theta^* = \min_\theta \{(\theta x^t, \theta w^t, y^t) T_1\}$$

بنابراین

$$(\theta^* x^t, \theta^* w^t, y^t) \in T_1 .$$

فرض کنید اگر

$$x'^t \leq x^t \quad , w'^t \geq w^t \quad \text{and } y'^t \geq y^t$$

آنگاه

$$\theta^* x'^t \leq \theta^* x^t$$

در این صورت ما داریم:

$$\theta^* x'^t = \alpha \theta^* x^t = \theta_1^* x^t$$

و بنابراین

$$(\theta^* x'^t, \theta^* w'^t, y'^t) = (\theta_1^* x^t, \theta^* w'^t, y'^t) \notin T_1$$

بنابراین ما داریم:

$$(\theta^* x^t, \theta^* w^t, y^t) \in EffT_1 \cap T_2^c$$

و اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۲: اگر

$$\min_\theta \{\theta | (\theta x^t, \theta w^t, y^t) \in T_1\} < \min_\theta \{\theta | (\theta x^{\bar{t}}, \theta w^t, y^{\bar{t}}) \in T_2\}$$

آنگاه

$$(\theta x^{\bar{t}}, \theta w^t, y^{\bar{t}}) \in EffT_2 \cap T_1^c$$

اثبات: با نگاهی به رابطه (۱) قرار می‌دهیم:

$$\theta^* = \min_\theta \{(\theta x^{\bar{t}}, \theta w^t, y^{\bar{t}}) \in T_2\}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$(\theta^* x^{\bar{t}}, \theta^* w^t, y^{\bar{t}}) \in T_2$$

فرض می‌کنیم

$$x'^{\bar{t}} \leq x^{\bar{t}} \quad , w'^t \leq w^t \quad \text{and } y'^{\bar{t}} \geq y^{\bar{t}}$$

سپس

$$(\theta^* x'^{\bar{t}}, \theta^* w'^t, y'^{\bar{t}}) \notin T_2$$

در اینصورت ما داریم:

$$\theta^* \neq \min_\theta \{(\theta x^{\bar{t}}, \theta w^t, y^{\bar{t}}) \in T_2\}$$

بنابراین

$$(\theta^* x^{\bar t}, \theta^* w^t, y^{\bar t}) \in EffT_2 \cap T_1^c$$

و اثبات کامل می‌شود.

قضیه۳: اگر

$$\min_\theta\{\theta|(\theta x^t,\theta w^t,y^t)\in T_1\} = \min_\theta\{\theta|(\theta x^{\bar t},\theta w^t, y^{\bar t})\in T_2\}$$

آنگاه

$$(\theta^* x^{\bar t},\theta^* w^t, y^{\bar t}) \in EffT_1\cap T_2^c \ ,$$
$$(\theta^* x^t,\theta^* w^t,y^t)\in EffT_2\cap T_1^c \ .$$

اثبات: قضیه از دو قضیه قبلی اثبات می‌شود. حال مدلی براساس اصول موضوعه DEA و با دلالت بر نقش دوگانه w^t ارایه می‌شود. براساس قضایا و به کمک روابط (۱) و (۲) مدل زیر

$$DMU_k(x_k^t, w_k^t, y_k^t, x_k^{\bar t}, y_k^{\bar t})$$

را ارزیابی می‌کند.

$$\begin{aligned}
&\theta^* = Min \quad \theta \\
&s.t. \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j^t x_{ij}^t \le \theta x_{ik}^t \quad i=1,\dots m,\ t=1,\dots,T\ , \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j^t w_{pj}^t \ge \theta w_{pk}^t \quad p=1,\dots,d,\ t=1,\dots,T, \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j^t y_{rj}^t \ge y_{rk}^t \quad r=1,\dots,s,\ t=1,\dots,T, \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j^{\bar t} x_{ij}^{\bar t} \le \theta x_{ik}^{\bar t} \quad i=1,\dots m,\ \bar t=1,\dots,T\ , \qquad (3) \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j^{\bar t} w_{oj}^t \le \theta w_{pk}^t \quad p=1,\dots d,\ t,\bar t=1,\dots,T\ , \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j^{\bar t} y_{ij}^{\bar t} \ge y_{rk}^{\bar t} \quad r=1,\dots s,\ \bar t=1,\dots,T\ , \\
&\lambda_j^t, \lambda_j^{\bar t} \ge 0 \quad j=1,\dots,n,\ t,\bar t=1,\dots,T\ ,
\end{aligned}$$

توجه کنید که θw_{pk}^t در سمت راست قیود دوم و پنجم است. زیرا بردار $(\theta x_k^t, \theta w_k^t, y_k^t, \theta x_k^{\bar t}, y_k^{\bar t})$ باید در قیود مربوط به هر دو تکنولوژی T_1 و T_2 صدق کند. بعلاوه ضرایب λ_j^t و $\lambda_j^{\bar t}$ برای دو دوره زمانی متفاوت در تکنولوژی مشترک در نظر گرفته شده‌اند. از آنجایی که مدل پیشنهاد شده ورودی محور است بنابراین مقدار کارایی نزدیک به یک بر این دلالت می‌کند که واحد تحت ارزیابی دارای کارایی بهتری می‌باشد. توجه داشته باشید اگر اندازه w^t گرایش به نقش خروجی داشته باشد، مجموعه امکان تولید T_1 غالب می‌شود و بنابراین مدل مربوط در فرم زیر قابلارایه می شود:

$$\begin{aligned}
&\theta_k^1 = Min \quad \theta \\
&s.t. \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j^t x_{ij}^t \le \theta x_{ik}^t \quad i=1,\dots m,\ t=1,\dots,T\ , \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j^t w_{pj}^t \ge \theta w_{pk}^t \quad p=1,\dots,d,\ t=1,\dots,T, \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j^t y_{rj}^t \ge y_{rk}^t \quad r=1,\dots,s,\ t=1,\dots,T, \qquad (4) \\
&\lambda_j^t, \quad j=1,\dots,n,\ t=1,\dots,T\ ,
\end{aligned}$$

آنچه که بدیهی است این است که اندازه w_k^t به عنوان یک خروجی در دوره زمانی t عمل می‌کند. به سادگی می‌توان گفت که این مدل علاوه بر مینیمم نمودن خروجی‌های با نقش دوگانه، ورودی‌های x_k^t نیز کاهش پیدا می‌کنند. از آنجایی که خروجی‌هایی با نقش دوگانه به‌عنوان یک ورودی برای دوره زمانی در آینده عمل می‌کنند، بنابراین مجموعه امکان تولید T_2، مدلی را برای معین کردن اندازه کارایی شعاعی در اختیار می‌گذارد. مدل خطی ارایه شده به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\theta_k^2 = Min \quad \theta \\
&s.t. \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j^{\bar t} x_{ij}^{\bar t} \le \theta x_{ik}^{\bar t} \quad i=1,\dots m,\ \bar t=1,\dots,T\ , \qquad (5) \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j^{\bar t} w_{oj}^t \le \theta w_{pk}^t \quad p=1,\dots d,\ t,\bar t=1,\dots,T\ , \\
&\sum_{j=1}^n \lambda_j^{\bar t} y_{ij}^{\bar t} \ge y_{rk}^{\bar t} \quad r=1,\dots s,\ \bar t=1,\dots,T\ , \\
&\lambda_j^{\bar t} \ge 0 \quad j=1,\dots,n,\ ,\bar t=1,\dots,T\ ,
\end{aligned}$$

همانطور که از مدل خطی فوق بر می‌آید $(x_j^{\bar t}, w_j^t)$ بردار ورودی در مرحله $\bar t, (\bar t=1,\dots,T)$ است که خروجی $y_j^{\bar t}$ را در همان زمان تولید می‌کند.

۵- مثال عددی

برای نشان دادن کاربردی از مجموعه امکان تولید مشترک یک مثال واقعی که شامل ۱۰ واحد تصمیم گیرنده است استفاده می‌شود. داده‌ها در جدول ۱ نشان داده شده است. ورودی‌ها تعداد دانشجویان (x_1)، تعداد اساتید (x_2) و تعداد کارهای پژوهشی (x_3) است. خروجی‌های نهایی دانشجویان فارغ‌التحصیل (y_1) و درآمد حاصل از دانشگاه (y_2) است. درصدی از دانشجویان که به موقع فارغ‌التحصیل نشدند و برای ترم‌های آینده به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شوند خروجی‌هایی با تاخیر زمانی هستند (w) که در مقاله ساکاتو و همکاران (۲۰۱۵) چنین خروجی‌هایی با نقش دوگانه در نظر گرفته شده‌اند. ستون دوم و سوم از جدول (۲) اندازه کارایی برای دوره‌های زمانی t و $\bar{t}$ مربوط به تکنولوژی‌های T_1 و T_2 را به ترتیب نشان می‌دهد. مقادیر بهینه مدل‌های (۴) و (۵) به ترتیب با θ_k^{1*} و θ_k^{2*} نشان داده شده‌اند. با به کار بردن تکنولوژی مشترک $T = T_1 \cap T_2$، اندازه کارایی با نماد θ^* در ستون آخر جدول ۲ نشان داده شده است. به‌عبارت دیگر به کار بردن مدل (۳) به ستون آخر جدول ۲ منتهی می‌شود.

همانطور که در جدول ۲ نشان داده شده واحدهای ۳ و ۵ کارا هستند. واحدهای ۸ و ۹ هنگامی که w^t نقش ورودی را دارد کارا نیستند. همانطور که انتظار می‌رود اندازه‌های کارایی برای دو دوره زمانی متفاوت، اختلاف دارند. مطابق با دو ردیف آخر در جدول ۲، نتیجه می‌گیریم که میانگین اندازه کارایی برای دوره زمانی اول کمتر از دوره دوم و تکنولوژی مشترک است.

جدول ۱: داده‌های مثال عددی

DMU	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	W
1	0.838	0.277	0.962	0.879	0.337	0.894
2	1.233	0.132	0.443	0.538	0.180	0.678
3	0.321	0.045	0.482	0.911	0.980	0.836
4	1.483	0.111	0.467	0.570	0.491	0.869
5	1.592	0.208	0.073	1.086	0.372	0.693
6	0.790	0.139	0.545	0.722	0.253	0.996
7	0.451	0.075	0.366	0.509	0.241	0.647
8	0.480	0.074	0.229	0.619	0.097	0.756
9	1.864	0.061	0.690	1.023	0.380	1.191
10	1.222	0.149	0.337	0.769	0.178	0.792

جدول ۲: نتایج تحلیلی

DMU	θ_k^{1*}	θ_k^{2*}	θ^*
1	0.453	0.800	0.800
2	0.425	0.582	0.582
3	1	1	1
4	0.479	0.548	0.548
5	1	1	1
6	0.558	0.608	0.608
7	0.621	0.673	0.673
8	1	0.976	1
9	1	0.828	1
10	0.645	0.719	0.719
واریانس	0.11	0.06	0.05
میانگین	0.576	0.759	0.762

همانطور که دیده می‌شود هنگامی که w^t نقش ورودی را بازی می‌کند تفاوت میان تکنولوژی مشترک و دوره زمانی دوم چشمگیر نیست. بر اساس محاسبات آماری، واریانس کارایی‌ها در دوره زمانی اول به طور واضح نشان می‌دهد که دانشجویان با تأخیر چگونه در تحلیل کارایی اثر می‌گذارند. به علاوه اندازه این کمیت در تکنولوژی مشترک کمترین مقدار را دارد (۰/۰۵).

برای منظور تعیین کردن موقعیت فاکتورهای دوگانه مقادیر کارایی ده واحد تحت ارزیابی در شکل (۲) نیز آورده شده است. مطابق با شکل(۲)، واحدهای ۳ و ۸ و ۹ بهترین عملکرد را بین واحدهای دیگر دارند. با نگاهی دقیق‌تر به شکل (۲)، معلوم است که واحد ۷ در اولین دوره زمانی کارا نیست. اما این واحد می‌تواند به‌عنوان واحد کارا برای دوره زمانی دوم و تکنولوژی مشترک عمل کند. لذا برای بررسی تفاوت‌های موجود بین دوره زمانی دوم و تکنولوژی مشترک تست آماری تی استیودنت انجام شده است. این تست تفاوت اندازه کارایی دو مدل (۵) و (۳) را با سطح معناداری ۱ درصد رد می‌کند. این نشان می‌دهد که تفاوت‌ها می‌توانند به‌طور تصادفی پخش شده و یا نادیده گرفته شوند. به‌علاوه نتایج نشان می‌دهد که هر واحد باید بتواند پروسه فارغ التحصیلی را بهینه کند. به‌عبارت دیگر نتایج نشان می‌دهد که هر تاخیر در فارغ‌التحصیلی از دانشجویان با تاخیر (که برای ترم‌های بعد به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شوند) باعث هیچ بهبودی در عملکرد واحدها نمی‌شود.

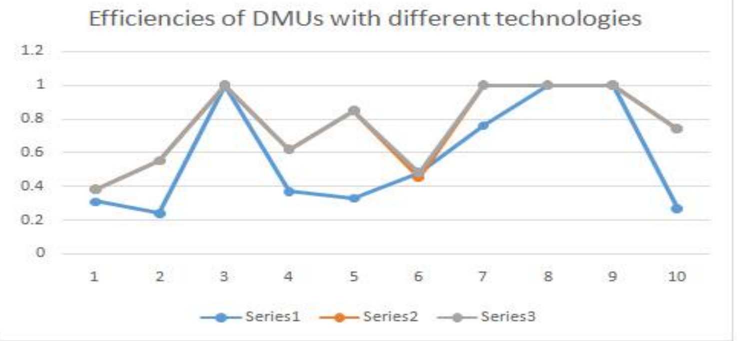
نتیجه‌گیری

در بسیاری از مسایل دنیای واقعی، خروجی‌های تولید شده در مقاطع زمانی مختلف تولید می‌گردند. هر چند این محصولات می‌توانند هم زمان در نقش ورودی و خروجی به سیستم تزریق شوند. این محصولات را فاکتورهای دوگانه می‌نامند. در این مقاله، خروجی‌هایی با تاخیر زمانی را با استفاده از دیدگاه فاکتورهای دوگانه در چهارچوب تحلیل پوششی داده‌ها مورد بررسی قرار دادیم. به این منظور، از مفهوم تکنولوژی مشترک استفاده کرده و مدل خطی برای مواجهه با این خروجی‌ها پیشنهاد داده شد. مثال عددی ذکر شده در مقاله قوت مدل پیشنهادی را در رفتار با خروجی‌های دارای تاخیر زمانی برجسته می‌سازد.

تشکر و قدردانی

مقاله فوق مستخرج از طرح پژوهشی انجام گرفته در دانشگاه آزاد اسلامی واحد آبادان است. نویسندگان مقاله از حمایت‌های مالی معاونت پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد آبادان نهایت تشکر و قدردانی را دارند.

شکل ۲. نتایج آماری



فهرست منابع

[1] Amirteimoori, A., Emrouznezhad, A. (2012), Notes on Classifying inputs and outputs in data envelopment analysis, Applied Mathematics Letter, 25(11), 1625-1628.

[2] Beasley, J. (1990), Comparing university Departments, Omega, 8(2), 171-183.

[3] Beasley, J. (1995), Determining teaching and research efficiencies, Journal of the Operational Research Society, 46,441-452.

[4] Chen, W.C. (2014), Revisiting dual-role factors in DEA: derivation and implications, IIE Transactions, 46 (7), 653-663

[5] Cook, W.D., Green, R.H., Zhu, J. (2006), Dual-role factors in data envelopment analysis, IIETransaction, 38(2), 105-115.

[6] Cook, W.D., Zhu, J.(2007), Classifying inputs and outputs in data envelopment analysis, European Journal of Operational Research, 180, 692-699.

[7] Ding, J., Dong, W., Bi, G., Liang, L. (2015), ADecision model for supplier selection in the presence of Dual-role factors, Journal of the Operational Research Society 66(5), 737-746.

[8] Sacoto, S.A., Castorena, D.G., Cook, W.D., Delgado, H.C. (2015), Time-Staged Outputs in DEA, Omega, 55, 1-9.

[9] Saen, R.F. (2010), A New model for selecting third-party reverse logistics providers in the presences of multiple dual-role factors, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology ,46(1), 405-410.

[10] Toloo, M. (2009), Notes on classifying inputs and outputs in data envelopment analysis: A comment, European Journal of Operational Research, 235(3), 810-812.

[11] Toloo, M., Barat, M. (2015),On considering dual-role factor in supplier selection problem, Mathematical Methods of Operations Research 82(1), 107-122.

[12] Toloo, M., Keshavarz, E., Hatami-Marbini, A. (2018), Dual-role factors for imprecise Data Envelopment Analysis, Omega, 77, 15-31.