دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
دوره ششم، شماره بیست و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

# محاسبه برخی اندیس های توپولوژیکی از گراف فون نیومن منظم از حلقه $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$

**شروین صاحبی[1*]، منصوره دلدار[2]**

(1و2) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۲/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۱۸

**چکیده**

گراف فون نیومن منظم حلقه‌ی $R$ ($G_{Vnr}(R)$)، گرافی است که رئوس آن همه‌ی عضوهای حلقه‌ی $\mathrm{R}$ است و دو رأس مجزای $x$ و $y$ در آن تشکیل یال می‌دهند اگر و تنها اگر $x+y$ فون نیومن منظم باشد. در این مقاله نویسندگان شاخص‌های توپولوژیکی زاگرب اول، دوم و سوم ، رندیک، وینر، ابر وینر و وینر معکوس گراف $G_{Vnr}(\mathbb{Z}_{p^\alpha})$ را بر اساس درجه رئوس و فواصل آنها محاسبه می کنند.

**واژگان کلیدی:** شاخص های زاگرب اول، دوم و سوم ؛ شاخص رندیک؛ شاخص وینر.

* عهده دار مکاتبات

Email: sahebi@iauctb.ac.ir

## 1- مقدمه

فرض کنید $G$ گرافی ساده و بدون جهت با مجموعه رئوس ناتهی $V$ و مجموعه یال‌های $E$ باشد. درجه رأس $x$ از گراف $G$ که آن را با نماد $\deg(x)$ نشان می‌دهیم عبارت است از تعداد یال‌هایی که رأس $x$ بر آنها واقع است. گراف کامل گرافی است که به ازای هر $x \in V(G)$، $\deg(x) = |V(G)| - 1$ . طول کوتاهترین مسیر بین هر دو رأس $x$ و $y$ را با نماد $d(x,y)$ نشان می‌دهیم و آنرا فاصله دو رأس $x$ و $y$ می‌نامیم. قطر گراف $G$ را با $diam(G)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$diam(G) = \max\{d(x,y)|x,y \in V(G)\}.$$

فرض کنید $R$ یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. عضو $a$ در $R$ را فون نیومن منظم گوییم هر گاه $x$ی در $R$ وجود داشته باشد بطوریکه $a = a^2x$. حلقه $R$ را فون نیومن منظم گوییم هر گاه همه عضوهای آن، فون نیومن منظم باشند. مجموعه عضوهای فون
نیومن منظم حلقه‌ی $R$ را با $Vnr(R)$ نشان می‌دهیم. گراف فون نیومن منظم حلقه $R$ را که با $G_{Vnr}(R)$ نشان می‌دهیم در سال 2018 توسط جعفری و صاحبی بصورت زیر تعریف شد [1]. گراف فون نیومن منظم گرافی است که رئوس آن همه عضوهای حلقه $R$ است و دو رأس مجزای $x$ و $y$ در آن مجاورند اگر و فقط اگر $x + y \in Vnr(R)$ .

شاخص‌های توپولوژیکی که جزو توصیف کننده‌های توپولوژیکی می‌باشند، اعدادی هستند که از گراف‌های مولکولی ترکیبات شیمیایی حاصل می‌شوند. این شاخص‌ها بر پایه درجه و فاصله در گراف‌ها می‌باشند که بطور گسترده برای نشان دادن روابط بین ساختار مولکولی و خواص فیزیکی و شیمیایی بکار می‌روند. از نظر ریاضی شاخص توپولوژیکی یک گراف، مقدار عددی است که به آن گراف نسبت داده می‌شود و معرف بعضی از خواص آن می‌باشد. تا کنون صدها شاخص توپولوژیک و کاربردهای زیادی از آنها در شیمی و علوم نانو پیدا شده است. اولین کاربرد شاخص‌های توپولوژیکی در شیمی و بیولوژی در سال 1974 توسط پروفسور وینر انجام شد[2] . شاخص وینر گراف $G$ که از معروف‌ترین و قدیمی‌ترین شاخص‌هاست بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(G) = \sum_{\{x,y\} \subseteq V(G)} d(x,y)$$

از جمله شاخص‌های توپولوژیک دیگر می‌توان به شاخص‌های زاگرب نوع اول، دوم و سوم [3و4]، اشاره کرد که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M_1(G) = \sum_{x \in V(G)} deg^2(x)$$

$$M_2(G) = \sum_{xy \in E(G)} \deg(x)\deg(y)$$

$$M_3(G) = \sum_{xy \in E(G)} |\deg(x) - \deg(y)|$$

شاخص رندیک از گراف $G$ اولین بار در سال 1975 توسط رندیک بصورت زیر تعریف شد [5].

$$\chi(G) = \sum_{xy \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(x)\deg(g)}}$$

لذا در این مقاله بر آن شدیم که شاخص های توپولوژیکی زاگرب اول، دوم و سوم ، رندیک، وینر، ابر وینر و وینر معکوس گراف $G_{Vnr}(\mathbb{Z}_{p^\alpha})$ را بر اساس درجه رئوس و فواصل آنها محاسبه کنیم.

## 2- پیش نیازها

به منظور اثبات نتایج اصلی در این مقاله، ابتدا قضایا و گزاره‌های زیر را برای گراف $G_{Vnr}(R)$ ثابت می‌کنیم.

**قضیه 2-1:** فرض کنید R یک حلقه جا به جایی و یکدار باشد. اگر $2x \notin Vnr(R)$ آنگاه $\deg(x) = |Vnr(R)|$ و اگر $2x \in Vnr(R)$، آنگاه $\deg(x) = |Vnr(R)| - 1$.

اثبات: فرض کنید $x$ عضوی از حلقه باشد. در اینصورت $x + R = R$. بنابراین برای هر $v$ در $Vnr(R)$ عنصر $x_v$ وجود دارد بطوریکه $x + x_v = v$. بوضوح $x_v$ بطور منحصر بفرد با $v$ تعیین می‌شود. ابتدا فرض کنید $2x \notin Vnr(R)$. در این حالت داریم $x_v \neq x$. بنابراین $x_v$ با $x$ مجاور است. لذا تابع $f$ از $Vnr(R)$ به مجموعه همه عناصر مجاور با $x$ با تعریف $f(x) = x_v$ یک تابع خوش تعریف است. بوضوح $f$ یک تناظر یک به یک است و بنابراین $\deg(x) = |Vnr(R)|$. حال فرض کنید $2x \in Vnr(R)$. پس برای $2x \neq v$ داریم $x_v \neq v$ و $x_{2x} = x$. لذا برای $2x \neq v$، $x_v$ با $x$ مجاور است. لذا تابع $f$ از $Vnr(R)$ به مجموعه همه عناصر مجاور با $x$ با تعریف

$f(x) = x_v$ یک تابع خوش تعریف است. بوضوح $f$ یک تناظر یک به یک است. در نتیجه $\deg(x) = |Vnr(R)| - 1$.

از این پس قرار می‌دهیم $R = \mathbb{Z}_{p^\alpha}$ و $G = G_{Vnr}(\mathbb{Z}_{p^\alpha})$. طبق قضیه 3 از [6] ، داریم:

$$|Vnr(R)| = p^\alpha - p^{\alpha-1} + 1$$

**گزاره 2-2:** فرض کنید $E(G)$ مجموعه یال های گراف $G$ باشد. در اینصورت

(1) اگر $p = 2$ آنگاه $|E(G)| = 2^{\alpha-1}(2^\alpha - 2^{\alpha-1} + 1) - 1$،

(2) اگر $p \neq 2$ آنگاه $|E(G)| = \frac{p^{\alpha-1}}{2}(p^\alpha - p^{\alpha-1} + 1)$.

اثبات: از آنجائیکه،

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{x\in V(G)} \deg(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{2x\in Vnr(R)} \deg(x) + \sum_{2x\notin Vnr(R)} \deg(x)\Big)$$

(1) اگر $p = 2$ آنگاه

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\Big(\deg(0) + \deg(2^{\alpha-1}) + \sum_{i=1}^{2^\alpha-2} \deg(x)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(2|Vnr(R)| - 1 + (2^\alpha - 2)|Vnr(R)|\big)$$
$$= 2^{\alpha-1}(2^\alpha - 2^{\alpha-1} + 1) - 1$$

(2) اگر $p \neq 2$ آنگاه

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{|Vnr(R)|} |Vnr(R)| - 1 + \sum_{i=1}^{p^\alpha-|Vnr(R)|} |Vnr(R)|\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(|Vnr(R)|(|Vnr(R)| - 1)\big) + (p^\alpha - |Vnr(R)|)|Vnr(R)|$$
$$= \frac{p^{\alpha-1}}{2}(p^\alpha - p^{\alpha-1} + 1).$$

**گزاره 2-3:** فرض کنید $E_1$، $E_2$ و $E_3$ افرازی برای $E(G)$ باشد بطوریکه

$$E_1 = \{xy \in E(G) | 2x, 2y \notin Vnr(R)\}$$

$$E_2 = \{xy \in E(G) | 2x, 2y \in Vnr(R)\}$$

$$E_3 = \{xy \in E(G) | 2x \in Vnr(R), 2y \notin Vnr(R)\}$$

در اینصورت:

(1) اگر $p = 2$ آنگاه

$$|E_1| = \big(2^{\alpha-1}(2^\alpha - 2^{\alpha-1} + 1)\big) - 1$$
$$|E_2| = 0$$
$$|E_3| = 2^\alpha - 2^{\alpha-1}$$

(2) اگر $p \neq 2$ آنگاه

$$|E_1| = \frac{p^{\alpha-1}}{2}$$
$$|E_2| = (p^\alpha - p^{\alpha-1})\Big(\frac{p^\alpha}{2} - p^{\alpha-1} + 1\Big)$$
$$|E_3| = (p^{\alpha-1} - 1)(p^\alpha - p^{\alpha-1})$$

اثبات: (۱) فرض کنید $p = 2$.
اگر $xy \in E_3$ آنگاه $x = 0$ یا $x = 2^{\alpha-1}$.

الف- اگر $x = 0$ آنگاه $y \in Vnr(R)$ و بنابراین طبق قضیه 1-1، $|E_3| = |Vnr(R)| - 1 = 2^\alpha - 2^{\alpha-1}$.

ب- اگر $x = 2^{\alpha-1}$، از آنجائیکه $2y \notin Vnr(R)$ پس $y \neq 0$ . از طرفی $x + y \in Vnr(R)$ پس $(x + y, 2^\alpha) = 1$ و بنابراین $y$ فرد است. لذا:
$|E_3| = |Vnr(R)| - 1 = 2^\alpha - 2^{\alpha-1}$.

اگر $xy \in E_2$ آنگاه $x = 0$ و $y = 2^{\alpha-1}$ و بنابراین $x + y \notin Vnr(R)$ و این یک تناقض است.

اگر $xy \in E_1$ ، آنگاه طبق گزاره 2-2،

$$|E_1| = |E(G)| - (|E_2| + |E_3|) = (2^{\alpha-1}(2^\alpha - 2^{\alpha-1} + 1)) - 1$$

(2) فرض کنید $p \neq 2$ .

اگر $xy \in E_1$ در اینصورت $(2x, p^\alpha) \neq 1$ و $(2y, p^\alpha) \neq 1$ و چون $p \neq 2$ پس $(x, p^\alpha) \neq 1$ و $(y, p^\alpha) \neq 1$. لذا $(x + y, p^\alpha) \neq 1$ و چون $x + y \in Vnr(R)$ ، پس $x + y = 0$. لذا $|E_1| = \frac{p^\alpha-|Vnr(R)|}{2} = \frac{p^{\alpha-1}}{2}$.

اگر $xy \in E_3$ در اینصورت $(2x, p^{\alpha}) \neq 1$ و چون $p \neq 2$ بنابراین $(x, p^{\alpha}) = 1$ . از طرفی $(2y, p^{\alpha}) = 1$ پس $(y, p^{\alpha}) = 1$. از آنجائیکه $x + y \in Vnr(R)$ پس $(x + y, p^{\alpha}) = 1$ و بنابراین $y \neq 0$ . لذا

$$|E_3| = (p^{\alpha} - |Vnr(R)|)(|Vnr(R)| - 1) = (p^{\alpha-1} - 1)(p^{\alpha} - p^{\alpha-1})$$

اگر $xy \in E_2$ پس طبق گزاره 2-2،

$$|E_2| = |E(G)|-(|E_1| + |E_3|) = (p^{\alpha-1} - 1)(p^{\alpha} - p^{\alpha-1})$$

**قضیه 2-4:** فرض کنید $p$ یک عدد اول باشد. آنگاه برای هر $x, y$ در $\mathbb{Z}_{p^{\alpha}}$، $d(x, y) \leq 2$ .

اثبات: اگر $\alpha = 1$ آنگاه $\mathbb{Z}_p$ یک میدان است و بنابراین فون نیومن منظم است. پس $G$ یک گراف کامل است و در نتیجه برای هر $x, y$ داریم $d(x, y) = 1$ .

اگر $\alpha \neq 1$ و $d(x, y) \neq 1$ پس $(x + y, p^{\alpha}) \neq 1$.

الف- اگر $(x, p^{\alpha}) \neq 1$ و $(y, p^{\alpha}) \neq 1$ پس $(x + \bar{1}, p^{\alpha}) = 1$ و $(y + \bar{1}, p^{\alpha}) = 1$. لذا $x\bar{1}$ و $y\bar{1}$ یال هایی از گراف $G$ خواهند بود. بنا بر این $d(x, y) = 2$.

ب- اگر $(x, p^{\alpha}) = 1$ و $(y, p^{\alpha}) \neq 1$ . چون $(x + y, p^{\alpha}) \neq 1$ پس $p|x + y$ و از آنجائیکه $p|y$ نتیجه می‌گیریم $p|x$ و این یک تناقض است.

ج- اگر $(x, p^{\alpha}) = 1$ و $(y, p^{\alpha}) = 1$، آنگاه $(2x + y, p^{\alpha}) = 1$ و $(2y + x, p^{\alpha}) = 1$ پس $xu, uy \in E(G)$ که در آن $u = x + y$ بنابراین $d(x, y) = 2$.

**نتیجه 2-5:** اگر $R = \mathbb{Z}_{p^{\alpha}}$ و $\alpha \neq 1$ آنگاه $diam(G) = 2$ و اگر $\alpha = 1$ آنگاه $diam(G) = 1$.

## 3- نتایج و بحث

**قضیه 3-1:** شاخص های زاگرب اول، دوم و سوم گراف $G$ عبارتند از:

$$M_1(G) = (p^{\alpha} - p^{\alpha-1} + 1)(p^{\alpha} - p^{\alpha-1})^2 + (p^{\alpha-1} - 1)(p^{\alpha} - p^{\alpha-1} + 1);$$

اگر $p = 2$ آنگاه :

$$M_2(G) = |E_3|(2^{\alpha} - 2^{\alpha-1})(2^{\alpha} - 2^{\alpha-1} + 1) + |E_1|(2^{\alpha} - 2^{\alpha-1} + 1)^2;$$

اگر $p \neq 2$ آنگاه:

$$M_2(G) = |E_1|(p^{\alpha} - p^{\alpha-1} + 1)^2 + |E_3|(p^{\alpha} - p^{\alpha-1} + 1)(p^{\alpha} - p^{\alpha-1}) + |E_2|(p^{\alpha} - p^{\alpha-1})^2;$$

و $M_3(G) = |E_3|$ .

اثبات: از آنجاییکه ،

$$M_1(G) = \sum_{x \in V(G)} \deg^2(x) = \sum_{2x \in Vnr(R)} \deg^2(x) + \sum_{2 \notin Vnr(R)} \deg^2(x);$$

$$M_2(G) = \sum_{xy \in E(G)} \deg(x)\deg(y) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{xy \in E_i} \deg(x)\deg(y)$$

و

$$M_3(G) = \sum_{xy \in E(G)} |\deg(x) - \deg(y)| = \sum_{i=1}^{3} \sum_{xy \in E_i} |\deg(x) - \deg(y)|$$

طبق قضیه 2-1 و گزاره 2-3، اثبات کامل است.

**قضیه 3-2:** شاخص رندیک گراف $G$ عبارت است از:

1) اگر $p = 2$ آنگاه:

$$\chi(G) = \frac{|E_3|}{\sqrt{(2^{\alpha} - 2^{\alpha-1})(2^{\alpha} - 2^{\alpha-1} + 1)}} + \frac{|E_1|}{(2^{\alpha} - 2^{\alpha-1} + 1)}$$

2) اگر $p \neq 2$ آنگاه:

$$\chi(G) = \frac{|E_1|}{(p^{\alpha} - p^{\alpha-1} + 1)} + \frac{|E_2|}{(p^{\alpha} - p^{\alpha-1})} + \frac{|E_3|}{\sqrt{(p^{\alpha} - p^{\alpha-1} + 1)(p^{\alpha} - p^{\alpha-1})}}.$$

اثبات: از آنجاییکه ،

$$\chi(G) = \sum_{xy \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(x)\deg(y)}} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{xy \in E_i} \frac{1}{\sqrt{\deg(x)\deg(y)}}$$

طبق قضیه 2-1 و گزاره 2-3، اثبات کامل است.

**قضیه 3-3:** شاخص وینر گراف $G$ عبارت است از:

1) $W(G) = 1$ اگر $\alpha = 1$ و $p = 2$.

2) $W(G) = \frac{p(p-1)}{2}$ اگر $\alpha = 1$ و $p \neq 2$.

3) $W(G) = (2^\alpha - 1)^2 - 2^{2\alpha-2} + 2^{\alpha-1}$ اگر $\alpha \neq 1$ و $p = 2$.

4) $W(G) = \frac{p^{\alpha-1}-1}{2}(p^\alpha + p^{\alpha-1} - 1)$ اگر $\alpha \neq 1$ و $p \neq 2$.

اثبات: از آنجاییکه ،

$$W(G) = \sum_{\{x,y\}\subseteq V(G)} d(x,y) = \sum_{xy\in E(G)} d(x,y) + \sum_{xy\notin E(G)} d(x,y) = |E(G)| + 2\left(\binom{p^\alpha}{2} - |E(G)|\right)$$

طبق گزاره 2-2 و قضیه 2-4، اثبات کامل است.

در سال 1995 کلاین و همکارش [8]، توسیعی از شاخص وینر به نام شاخص ابر وینر را به صورت زیر معرفی کردند:

$$WW(G) = \frac{1}{2}\left(W(G) + \sum_{\{x,y\}\subseteq V(G)} d^2(x,y)\right)$$

**نتیجه 3-4:** شاخص ابر وینر گراف $G$ عبارت است از:

1) $WW(G) = 1$ اگر $\alpha = 1$ و $p = 2$ .

2) $WW(G) = \frac{p(p-1)}{2}$ اگر $\alpha = 1$ و $p \neq 2$.

3) $WW(G) = 2^{2\alpha} + 2^{\alpha-1} - 3 \times 2^\alpha + 2$ اگر $\alpha \neq 1$ و $p = 2$.

4) $WW(G) = (p^\alpha - 1)\left(\frac{p^\alpha}{2} + p^{\alpha-1} - 1\right)$

در سال 2000 بلابان و همکارانش [7] ، شاخص وینر معکوس را به صورت زیر معرفی کردند:

$$\Lambda(G) = \frac{1}{2}n(n-1)diam(G) - W(G)$$

جاییکه $n = |V(G)|$ .

**نتیجه 3-5:** شاخص وینر معکوس گراف $G$ عبارت است از:

1) $\Lambda(G) = 0$ اگر $\alpha = 1$.

2) $\Lambda(G) = 2^{2\alpha-2} + 2^\alpha - 2^{\alpha-1} - 1$ اگر $\alpha \neq 1$ و $p = 2$ .

3) $\Lambda(G) = (p^\alpha - 1)\left(\frac{p^\alpha - p^{\alpha-1}+1}{2}\right)$ اگر $\alpha \neq 1$ و $p \neq 2$.

**مثال 3-6:** فرض کنید $\Gamma_1 = G_{Vnr}(\mathbb{Z}_4)$ و $\Gamma_2 = G_{Vnr}(\mathbb{Z}_9)$ ( شکل 1 و 2 ). در اینصورت مقادیر شاخص های زاگرب اول، دوم، سوم ، رندیک، وینر و ابر وینر گراف های $\Gamma_1$ و $\Gamma_2$ بصورت زیر است:

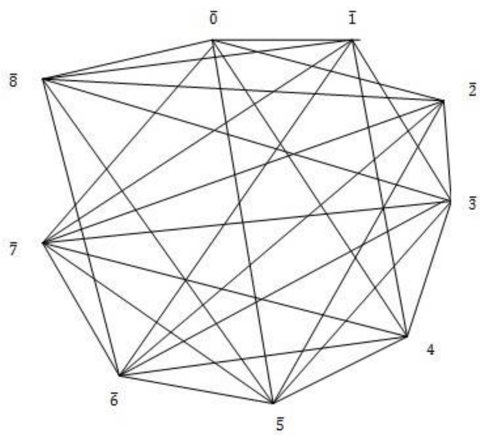


Fig.2.$G_{Vnr}(Z_9)$

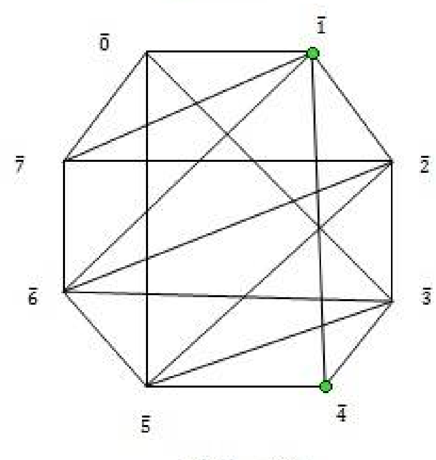


Fig.1.$G_{Vnr}(Z_8)$

| Index / G | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | X | $W$ | $WW$ | $\Lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma_1$ | 95 | 55 | 4 | 4/69 | 37 | 46 | 19 |
| $\Gamma_2$ | 226 | 1093 | 12 | 2/243 | 44 | 52 | 28 |

**فهرست منابع**

[1] A. Jafari Taloukolue, Sh. Sahebi, (2018).Von Neumann regular graphs associated with rings, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 10(3), .

[2] H. Wiener. (1947). Structural determination of the paraffin boiling points, J. Amer. Chem., 69, 17-20.

[3] G.H. Fath-Tabar. (2011). Old and new Zagreb indices of graphs, Match Commun.Math. Chem., 65, 79-84.

[4] I. Gutman, N. Trinajstic. (1972). Graph theory and molecular orbitals. Total $\pi$-elactron energy of alternate hydrocarbons, Chem.Phys. Lett., 17, 535-538.

[5] M.Randic. (1975). On characterization of molecular branching, J.Amer. Chem. Soc., 97, 6609-6615.

[6] D.F,Anderson, A.Badawi. (2012) Von Neumann Regular and relatedElements in Commutative Rings. Algebra Colloquium. 19, 1017-1040.

[7] A.T. Balaban, D. Mills, O. Ivanciuc, S.C. Basak. (2000). Reverse Wiener indices, Croat. Chem. Acta., 73, 923-941.

[8] D.J. Klein, I. Lukovits, I. Gutman. (1995). On the definition of the hyper-Wiener index for cycle-containing structures, J. Chem. Inf. Comput. Sci., ۳۵, ۵۰-۵۲.