دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیستم، مهر و آبان ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

نگاشت‌های حافظ تعامد روی فضاهای C^*–مدول ضرب داخلی

علی خلیلی قلی‌آبادی[۱]، مریم امیاری[*۲]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، مشهد، ایران
[۲] دانشیارگروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، مشهد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۵/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۵/۰۱

چکیده

فرض کنید A یک C^*–جبرباشد، رده تمام نگاشت‌های A –خطی بین دو فضای A – مدول ضرب داخلی را در نظر می‌گیریم به‌طوری که برای هر دو بردار عمود برهم در فضای دامنه، تصاویر آنها تحت نگاشت مورد نظر در فضای برد، بر هم عمود باشند. در این مقاله، قصد داریم یک شکل نگاشت‌های A –خطی که تعامد را حفظ می‌کنند، معین کنیم. برای این منظور فرض کنیم E و F دو فضای A –مدول ضرب داخلی باشند و A^+ مجموعه تمام عناصر مثبت A باشد. ثابت می‌کنیم که یک نگاشت A –خطی $T: E \to F$ تعامد را حفظ می‌کند اگر و فقط اگر $a \in A^+$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $x, y \in E$ تساوی $\langle Tx, Ty\rangle = a^2\langle x, y\rangle$ برقرار باشد. ابتدا یادآوری می‌کنیم دو بردار x, y به طور معمولی بر هم عمود هستند اگر و فقط اگر $< x, y >= 0$ و سپس مفهوم تعامد در یک فضای A – مدول ضرب داخلی را به سه روش جدید ارائه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که یک نگاشت A –خطی حافظ تعامد معمولی است اگر و فقط اگر حافظ هر کدام از تعامدهای جدید باشد.

واژه‌های کلیدی: تعامد، نگاشت حافظ تعامد، فضای A–مدول ضرب داخلی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: maryam_amyari@yahoo.com

۱. مقدمه

تعامد یکی از آن خاصیت‌هایی است که مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان است. در دهه‌های اخیر بسیاری از ریاضیدانان توجه خود را به تعمیم این مفهوم در فضاهای ضرب داخلی و فضاهای نرم دار معطوف نموده‌اند. می‌توان گفت مفهوم تعامد در فضای ضرب داخلی، بر گرفته از مفهوم تعامد دو بردار در صفحه $\mathbb{R}^2$ است. دو بردار x و y را در یک فضای ضرب داخلی بر هم عمود گوییم، هرگاه $<\mathrm{x},\mathrm{y}>=0$. همچنین مفهوم تعامد در فضاهای نرم‌دار بر گرفته از این مفهوم در فضاهای ضرب داخلی است. تاکنون بیش از چهار نوع تعامد در فضاهای نرم‌دار ارائه گردیده است. در این مقاله، ابتدا یک فضای A–مدول ضرب داخلی را تعریف می‌کنیم و سپس شرط معادلی برای نگاشتی که تعامد را حفظ می‌کند ارائه می‌دهیم. در بخش سوم به تعریف تعامدهای متفاوت در فضای نرم‌دار پرداخته و به کمک قضایا، به بررسی شرایطی می‌پردازیم که این تعامدها، معادل گردند. چلمینسکی [1]، ثابت کرد که اگر E و F فضاهای ضرب داخلی باشند، آنگاه نگاشت A –خطی $\mathrm{T}: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ حافظ تعامد است اگر و تنها اگر یک $\gamma \in \mathbb{R}^+$ وجود داشته باشد بطوری که برای هر $\mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathrm{E}$ ،

$$< Tx, Ty >= \gamma^2 < x, y >$$

اکنون به بیان تعریف ساختارهایی ریاضی می‌پردازیم که در ادامه مورد نیاز است.

یک C^*-جبر، یک ×– جبر باناخ $(A,\|.\|)$ است به طوری که برای هر $a \in A$ همواره $\| aa^* \| = \| a \|^2$. اگر $a \in A$، آنگاه طیف a را به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(a) = \{ \lambda \in \mathbb{C}: \quad \lambda I - a \text{ وارون پذیر نباشد } \}.$$

عنصر $a \in A$ را مثبت نامند، هرگاه خود الحاق $(a = a^*)$ و $\sigma(a)$ زیرمجموعه $\mathbb{R}^+$ باشد. مجموعه تمام عناصر مثبت A را با نماد A^+ نمایش می‌دهند.

اگر $a, b \in A$ دو عضو خود الحاق باشند، آنگاه می‌گویند $a \le b$ اگر و فقط اگر $b - a \ge 0$. اگر a مثبت باشد، آنگاه عضو یکتا و مثبت $b \in A$ وجود دارد به طوری که $a = b^2$ و آن را ریشه دوم مثبت a می‌نامند. ثابت می‌شود اگر $0 \le a \le b$، آنگاه $a^{1/2} \le \mathrm{b}^{1/2}$. خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای کسب اطلاعات بیشتر [2] را مطالعه کند.

تعریف ۱-۱. فرض کنیم A یک C^*–جبر باشد. یک فضای برداری E که یک A –مدول راست است و برای هر $x \in \mathrm{E}, a \in \mathrm{A}, \mu \in \mathbb{C}$ در شرط

$$\mu(xa) = (\mu x)a = x(\mu a)$$

صدق کند، همراه با نگاشت $<.,.>: E \times E \to A$ را یک فضای A–مدول ضرب داخلی نامند، هرگاه به ازای هر $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, a \in A$ و هر $x, y, z \in E$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) $< x, x > \ge 0$ و $x = 0$ اگر و تنها اگر $< x, x >= 0$

ب) $< x, \lambda y + \mu z >= \lambda < x, y > + \mu < x, z >$

ج) $< x, ya >=< x, y > a$

د) $< x, y >^* =< y, x >$

برای هر $x \in E$، نرم آن را به‌صورت $\|x\|^2 = \|< x, x >\|$ تعریف می‌شود. اگر E با این نرم کامل باشد، آنگاه فضای A – مدول ضرب داخلی را یک فضای A – مدول هیلبرت گویند.

طبق تعریف برای هر $x \in E$، همواره $< x, x >$ مثبت است، لذا ریشه دومی وجود دارد که آن را با $|x| =< x, x >^{1/2}$ نمایش می‌دهند. فرض کنید E فضای A – مدول ضرب داخلی باشد، عضو $x \in E$ را ناتباهیده گویند، اگر عضو $< x, x > \in A$ وارون پذیر باشد.

فرض کنید E و F دو فضای A – مدول ضرب داخلی باشند، نگاشت $T: E \to F$ را A–خطی نامند، هرگاه T خطی باشد و برای هر $a \in A$ $x \in E$، $T(xa) = T(x)a$. همچنین T راحافظ ضرب داخلی می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in E$، تساوی $< Tx, Ty >= < x, y >$ برقرار باشد.

در یک فضای A – مدول ضرب داخلی E، دو عضو

$x, y \in E$ را برهم عمود گویند و آن را با نماد $x \perp y$ نشان می‌دهند، هرگاه $< x, y > = 0$.
نگاشت T را حافظ تعامد می‌نامند، هرگاه $< x, y > = 0$ اگر و تنها اگر $< Tx, Ty >= 0$
نگاشت $T: E \to F$ را خود الحاق می‌گویند، هرگاه نگاشت $T^*: F \to E$ وجود داشته باشد بطوری که برای هر $x, y \in E$، $< x, Ty > =< x, T^* y >$.
در این مقاله، نشان می‌دهیم نگاشت A –خطی $T: E \to F$ تعامد را حفظ می‌کند اگر و فقط اگر $a \in A^+$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $x, y \in E$ تساوی $\langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}y\rangle = a^2\langle x, y\rangle$ برقرار باشد.

۲. نگاشت‌های حافظ تعامد

در این بخش با بیان و اثبات قضیه‌ای جامع به هدف اصلی مقاله نیز دست می‌یابیم.

قضیه ۲-۱. فرض کنید A یک C^* – جبر یک دار و جابجایی باشد. همچنین E و F دوفضای A–مدول ضرب داخلی و $T: E \to F$ یک نگاشت و هر عضو از E و F ناتباهیده باشد. در این صورت گزاره‌های زیر باهم معادلند.
الف) T یک نگاشت A –خطی است و $a > 0$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x \in E$، $|Tx| = a|x|$.
ب) عضو $a > 0$ وجود دارد که برای هر $x, y \in E$،
$< Tx, Ty >= a^2 < x, y >.$

ج) T یک نگاشت A –خطی است و تعامد را حفظ می‌کند.
برهان: (الف← ب). با توجه به (الف) وجود دارد $a > 0$ به‌طوری که برای هر $x \in E$، $|Tx| = a|x|$. بنابراین $|Tx|^2 = (a|x|)^2$، لذا
$< Tx, Tx >= a^2 < x, x >$.

با توجه به قضیه همانی قطبی‌سازی[۲]

$$
\begin{aligned}
< \mathrm{T}x, \mathrm{T}y >&= \tfrac{1}{4}\big(\langle Tx + Ty, Tx + Ty\rangle - i\langle Tx + iTy, Tx + iTy\rangle - \langle Tx - Ty, Tx - Ty\rangle + i\langle Tx - iTy, Tx - Tiy\rangle\big)\\
&= \tfrac{1}{4}\big(\langle T(x + y), T(x + y)\rangle - i\langle T(x + iy), T(x + iy)\rangle - \langle T(x - y), Tx - Ty\rangle + i\langle Tx - iy), T(x - iy)\rangle\big)\\
&= \tfrac{1}{4}a^2\big(\langle x + y, x + y\rangle - i\langle x + iy, x + iy\rangle - \langle x - y, x - y\rangle + i\langle x - iy, x - iy\rangle\big)\\
&= \tfrac{1}{4}a^2(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - i\langle x, iy\rangle - i\langle x, iy\rangle)\\
&= a^2 < x, y >
\end{aligned}
$$

ب ←ج). فرض کنید (ب) برقرار باشد، نشان می‌دهیم T یک نگاشت A –خطی است.
برای هر $c \in A, x, y, z \in E$،

$$
\begin{aligned}
< T(cx + y), Tz > &= a^2 < cx + y, z >\\
&= a^2 c^*(< x, z > + < y, z >)\\
&= c^*(a^2 < cx, z > + a^2 < y, z >)\\
&= c^*(< Tx, Tz > + < Ty, Tz >)\\
&= < cTx + Ty, Tz >
\end{aligned}
$$

بنابراین $T(cx + y) = cTx + Ty$.
یعنی T یک نگاشت A –خطی است. به سادگی می‌توان نشان داد که T حافظ تعامد است.
(ج ←الف). فرض کنید $\dim \mathrm{E} = 1$ و $\{\mathrm{u}\}$ یک پایه برای E باشد. فرض کنید $T: E \to F$ یک نگاشت A –خطی باشد که تعامد را حفظ می‌کند.
برای هر $x \in E$، c_x وجود دارد در A به‌طوری که $x = c_x u$، لذا $|x|^2 = {c_x}^* c_x |u|^2$، چون T حافظ تعامد است

$$|Tx|^2 = {c_x}^* c_x |Tu|^2$$

حال قرار دهید $a = |u|^{-1}|Tu|$. ملاحظه می‌کنید $|c_x| = |\boldsymbol{x}||u|^{-1}$، $|c_x| = |\boldsymbol{Tx}||Tu|^{-1}$. این ایجاب می‌کند $|Tx| = |u|^{-1}|Tu||\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}|$.
فرض کنید $dim\, \mathrm{E} \geq 2$ و $x, y \in E - \{0\}$ و وجود داشته باشند $0 < a < b \in A$ بطوریکه

$$|Tx| = a|x| \text{ و } |Ty| = b|y| \qquad (\times)$$

سه حالت در نظر بگیرید.

حالت اول: نشان می‌دهیم x, y مستقل خطی هستند. زیرا در غیر این صورت اگر وجود داشته باشد $c \in A - \{0\}$ به‌طوری که $y = cx$ ، آنگاه

$$|Ty|^2 = |Tcx|^2 = c^* < Tx, Tx > c = cc^* a^2 |x|^2$$

لذا $cc^* a^2 |x|^2 = cc^* b^2 |x|^2$ چون $x \in E$ ناتباهیده است، لذا $cc^* a^2 = cc^* b^2$. همچنین $cc^* > 0$، لذا وارون پذیر است.

در نتیجه $a = b$ و این تناقض است.

حالت دوم: $< x, y > \neq 0$. زیرا اگر $< x, y >= 0$ ، آنگاه با فرض $u = x|x|^{-1}, v = y|y|^{-1}$ ملاحظه می‌کنید $< u, v >= 0$. چون T حافظ تعامد است، $< Tu, Tv >= 0$ و

$$|u|^2 =< u, u >= |x|^{-1} < x, x > |x|^{-1} = 1$$

بطور مشابه $|v|^2=1$. بنابراین

$$< u + v, u - v >= |u|^2 - |v|^2 = 0.$$

با توجه به فرض

$$< Tu + Tv, Tu - Tv > =0$$

از طرفی ملاحظه می‌کنید

$$|Tu|^2 = |x|^{-1} < Tx, T > |x|^{-1}$$
$$= |x|^{-1} a^2 |x|^2 |x|^{-1} = a^2$$

به طور مشابه $|Tv|^2=b^2$. در نتیجه

$$< T(u + v), T(u - v) >$$
$$= |Tu|^2 - |Tv|^2 = a^2 - b^2 \neq 0$$

و این تناقض است.

تاکنون نشان دادیم که x, y نمی‌توانند وابسته خطی و یا بر هم عمود باشند. لذا فرض کنید که x, y مستقل A -خطی و برهم عمود نباشند.

اینک قرار دهید

$$m =< x, y >< y, x >.$$

در این صورت $m = m^*$، لذا $m^2 = mm^*$.

همچنین با فرض $n =< y, x > |x|^2$ و $z = xm - yn$ ملاحظه می‌کنید $z \in E$ و

$$< z, x >=< xm - yn , x >$$
$$= m^* < x, x > -n^* < y, x >$$
$$= m^* |x|^2 - |x|^2 m^* = 0$$

بنابراین $< Tz, Tx >= 0$ قرار دهید $w = z|z|^{-1}$ و $u = x|x|^{-1}$. در این صورت

$$|w|^2 =< w, w > =< z|z|^{-1}, z|z|^{-1} >= 1$$

از طرفی

$$< w, u > = < z|z|^{-1}, \qquad x|x|^{-1} >$$
$$= |z|^{-1} < z, x > |x|^{-1} = 0$$

در نتیجه $< Tw, Tu >= 0$. همچنین

$$< w + u, w - u >= |w|^2 - |u|^2 = 0،$$

لذا

$$< T(w + u), \qquad T(w - u) >= 0$$

اکنون ملاحظه می‌کنید

$$|z|^2 =< xm - yn, xm - yn >$$
$$= m^* < x, x > m - m^* < x, y > n$$
$$- n^* < y, x > m + n^* < y, y > n$$
$$= m^2 |x|^2 - m^* < x, y >< y, x > |x|^2 -$$
$$|x|^2 < x, y >< my, x > m + |x|^2$$
$$< x, y >< y, y > m|x|^2$$
$$= |x|^4 |y|^2 m - |x|^2 m^2$$

در نتیجه

$$|z|^2 = |x|^4 |y|^2 m - m^2 |x|^2$$

چون $< Tz, Tx >= 0$،

$$< Tz, Tx > = < mTx - nTy, Tx >$$
$$= m^* < Tx, Tx > - n^* < Ty, Tx > = 0$$

این بدان معنی است که

$$m^* < Tx, Tx > = n^* < Ty, Tx \ >$$

لذا

$$< Tx, Ty > n =< Tx, Tx > m$$

اکنون ملاحظه می‌کنید

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Tz}|^2 &=< Tz, Tz > \\
&=< mTx - nTy, m\mathrm{Tx} - \mathrm{nTy} \\
&= \mathrm{m}^* < Tx, Tx > m - \mathrm{m}^* < Tx, Ty > n - \mathrm{n}^* < Ty, Tx > m + \mathrm{n}^* < Ty, Ty > n.
\end{aligned}
$$

با توجه به محاسبات بالا

$$
\begin{aligned}
|Tz|^2 &= n^*|Ty|^2 n - m^*|Tx|^2 m \\
&=|x|^4|Ty|^2 m - m^2|Tx|^2 \\
&= b^2|x|^4\, |y|^2\, m - a^2 m^2|x|^2 > a^2|z|^2.
\end{aligned}
$$

زیرا

$$a^2|z|^2 = a^2|x|^4|y|^2 m - a^2 m^2|x|^2$$

و لذا

$$(b^2|x|^4\, |y|^2\, m - a^2m^2|x|^2) - a^2|z|^2 = (b^2 - a^2)|x|^4\, |y|^2\, m > 0$$

بنابراین $|z|^{-2}|Tz|^2 > a^2$.با توجه به [2]، اگر C^* - جبر جابجایی باشد و $a < b$، آنگاه $a^2 < b^2$.
لذا

$$|Tw|^2 = |z|^{-2}|Tz|^2 > a^2$$

اما

$$|Tu|^2 = |x|^{-2}|Tx|^2 = a^2$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
&< T(w+u) >, T(w-u) > \\
&= |Tw|^2 - |Tu|^2 > a^2 - a^2 = 0
\end{aligned}
$$

که تناقض است.

بنابراین رابطه (×) نمی‌تواند برقرار باشد، یعنی برای هر $x \in E - \{0\}$ ، $|Tx||x|^{-1}$ مقدار ثابتی در A است.
قرار دهید $a = |Tx||x|^{-1}$.
در این صورت برای هر $x \in E - \{0\}$، $|Tx| = a|x|$ و لذا $< Tx, \mathrm{T}y > = a^2 < x, y >$.

۳. رابطه بین انواع تعامد در فضای A – مدول ضرب داخلی

در این بخش، ابتدا به تعریف چند نوع تعامد جدید در یک فضای A– مدول ضرب داخلی می‌پردازیم و سپس رابطه بین آنها و تعامد معمولی الهام گرفته از ضرب داخلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای کسب اطلاعات بیشتر به [4] مراجعه کنید.

تعریف ۳-۱. فرض کنید E یک فضای A– مدول ضرب داخلی باشد و $x, y \in E$. می گوییم $x \perp_1 y$، هرگاه برای هر $a \in \mathrm{A}$، $|x|^2 \leq |x + ay|^2$.

قضیه ۳-۲. فرض کنید E یک فضای A– مدول ضرب داخلی باشد و $x, y \in E$. در این صورت $< x, y > = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $a \in \mathrm{A}$، $|x|^2 \leq |x + ay|^2$. به عبارت دیگر تعامد معمولی با تعامد $\perp_1$ معادل است.

برهان: ابتدا فرض کنید $< x, y > = 0$. در این صورت

$$
\begin{aligned}
|x + ay|^2 &=< x + ay, x + ay > \\
&= |x|^2 + a^* < y, x > +< x, y > a + a^*|y|^2 a \\
&= |x|^2 + |y|^2|a|^2 \geq |x|^2
\end{aligned}
$$

برعکس فرض کنید $|x|^2 \leq |x + ay|^2$ و قرار دهید $a = -|y|^{-2} < x, y >$. در این صورت

$$
\begin{aligned}
|x + ay|^2 &=< x + ay, x + ay > \\
&= |x|^2 + a^* < y, x > +< x, y > a + a^*|y|^2 a \\
&= |x|^2 - 2|y|^{-2} < x, y >< y, x > - |y|^{-2} < x, y >< y, x > \\
&= |x|^2 - |y|^{-2} < x, y >< y, x > \leq |x|^2
\end{aligned}
$$

لذا $|x|^2 = |x + ay|^2$. یعنی $-|y|^{-2} < x, y > - < x, y > < y, x >= 0$، این ایجاب می‌کند $< y, x >= 0$ و در نتیجه $< x, y > = 0$.

نتیجه ۳-۳. فرض کنید $\mathrm{T}: \mathrm{E} \to E$ یک نگاشت A -خطی و $x, y \in E$. در این صورت T تعامد معمولی را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر T تعامد $\perp_1$ را حفظ کند.

قضیه ۳-۴. فرض کنید E یک فضای A– مدول ضرب داخلی باشد و $x, y \in E$.

در این صورت اگر $x \perp_1 y$، آنگاه $\|x\|^2 \leq \|x+ay\|^2$.

برهان: فرض کنید $x \perp_1 y$. لذا برای هر $a \in A$، $|x|^2 \leq |x+ay|^2$. پس

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|\langle x,x\rangle\| \\ &= \||x|^2\| \\ &\leq \||x+ay|^2\| \\ &= \|\langle x+ay, x+ay\rangle\| \\ &= \|x+ay\|^2\end{aligned}$$

دقت کنید در یک C^*-جبر اگر $0 < c < b$، آنگاه $0 < \|c\| < \|b\|$.

تعریف ۳-۵. فرض کنید E یک فضای A– مدول ضرب داخلی باشد و $x, y \in E$. می‌گوییم $x \perp_2 y$، هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$|x - ay| = |x + a\,y|$$

قضیه ۳-۶. فرض کنید E یک فضای A– مدول ضرب داخلی باشد و $x, y \in E$. در این صورت $< x, y > = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$،

$$|x - ay| = |x + a\,y|.$$

برهان: ابتدا فرض کنید $< x, y > = 0$. در این صورت

$$\begin{aligned}|x-ay| &= < x-ay, x-ay > \\ &= |x|^2 - a^* < x,y > - < y,x > a + a^*|y|^2 a \\ &= |x|^2 + a^*|y|^2 a \\ &= |x|^2 + a^* < x,y > + < y,x > a + a^*|y|^2 a \\ &= |x + a\,y|\end{aligned}$$

برعکس فرض کنیم برای هر $a \in A$، $|x - ay| = |x + a\,y|$. لذا

$$2a^* < x,y > + 2 < y,x > a = 0$$

قرار دهید $a = < y$. در این صورت $2a^*a = 0$. لذا $\| aa^* \| = \| a \|^2 = 0$. بنابراین

$$< y, x > = a = 0$$

نتیجه ۳-۷. فرض کنید $T: E \to E$ یک نگاشت A-خطی و $x, y \in E$. در این صورت T تعامد معمولی را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر T تعامد $\perp_2$ را حفظ کند.

تعریف ۳-۸. فرض کنید E یک فضای A – مدول ضرب داخلی باشد و $x, y \in E$. می‌گوییم $x \perp_3 y$، هرگاه داشته باشیم

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

قضیه ۳-۹. فرض کنید E یک فضای A – مدول ضرب داخلی باشد و $x, y \in E$. در این صورت $< x, y > = 0$ اگر و تنها اگر $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

برهان: ابتدا فرض کنید $< x, y > = 0$. در این صورت

$$\begin{aligned}|x+y|^2 &= < x+y, x+y > \\ &= |x|^2 + < y,x > + < x,y > + |y|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2\end{aligned}$$

برعکس فرض کنید $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$. در این صورت $< y, x > + < x, y > = 0$.

به عبارت دیگر

$$< x,y >< y,x > + < x,y >< x,y > = 0$$

مجموع دو عضو مثبت از یک C^*-جبر A مساوی صفر شده است. بنابراین تک تک آن‌ها مساوی صفر است و در نتیجه خواهیم داشت $< x, y > = 0$.

نتیجه‌گیری

در این مقاله با بیان تعاریف تعامد در فضای A – مدول ضرب داخلی می‌توانیم بسیاری از قضایا و کاربردهای آنها در فضای ضرب داخلی را در این فضا ارائه نمود. همچنین می‌توان فرم نگاشت‌هایی که این تعامدها را حفظ می‌کنند را مورد بررسی قرار داد، لذا افق جدیدی برای ادامه کار در این فضا پیش روست.

فهرست منابع

[1] Chmieli’nski, J., 2005. Linear mappings approximately preserving orthogonality, J. Math. Anal. Appl. 304, pp.158-169.

[2] Murphy, G. J., 1990. C*- algebras and operator theory, Academic Press Inc., Boston, MA.

[3] Lance, E. C., 1995. Hilbert C*-modules A Toolkit for Operator Algebraists, Cam- bridge Univ. Press, Cambridge.

[4] Ilišević, D., and Turensk, A., 2008. Approximately orthogonality preserving mappings on C*-modules, J. Math. Anal. Appl., 341(1), pp. 298-308.