دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هفتم، آذر و دی ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

مدول کانونی نیم گروه‌های آفین کوهن- مکالی

راحله جعفری*

استادیار، موسسه تحقیقات ریاضی دکتر مصاحب، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۱/۲۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۶/۰۱

چکیده

فرض کنیم S یک نیم گروه آفین سادکی از فضای r بعدی $\mathbb{N}^r$، و $R = K[[S]]$ حلقه متناظر با آن باشند. در نتیجه R یک حلقه نوتری با بعد کرول r است. در حالت $r = 1$، S یک نیم گروه عددی و R حلقه‌ای کوهن-مکالی است. در این هنگام، هر مجموعه اَپری S متناهی است و تعداد اعضای ماکسیمال آن نسبت به رابطه ترتیب جزئی $\preccurlyeq_S$، با نوع حلقه R برابر است. در حالت کلی، اگر بعد نیم گروه بزرگتر از یک باشد، مجموعه‌های اَپری لزوماً متناهی نیستند. در این مقاله، برای نیم گروه سادکی S، r مجموعه اَپری معرفی می‌کنیم که اشتراک آن‌ها، $AP(S)$، مجموعه‌ای متناهی است و تعداد اعضای ماکسیمال آن نسبت به رابطه ترتیب جزئی $\preccurlyeq_S$، نوع حلقه R را مشخص می‌کند. علاوه بر این، مجموعه مولدی برای مدول کانونی حلقه R ارائه می‌دهیم که به راحتی قابل محاسبه است. در حالت نیم گروه‌های عددی، $AP(S)$ با یک مجموعه اَپری برابر خواهد بود که این نتیجه، تعمیم نتایج شناخته شده در حالت یک بعدی است.

واژه‌های کلیدی: نیم گروه آفین سادکی، مجموعه اَپری، مدول کانونی، نوع یک مدول.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:rjafari@khu.ac.ir

۱- مقدمه

در سراسر مقاله، $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد صحیح نامنفی است. یک *نیم‌گروه آفین*، زیر تکواره‌ای متناهی مولد از $\mathbb{N}^r$، با عمل طبیعی جمع بردارهای صحیح است و $r \leq 1$.
فرض کنیم $S = \langle a_1, \dots, a_{r+m} \rangle$ یک نیم‌گروه آفین تولید شده توسط مجموعه

$$A = \{a_1, \dots, a_{r+m}\} \subseteq \mathbb{N}$$

با حداقل r عضو باشد، به عبارت دیگر

$$S = \mathbb{N}a_1 + \cdots + \mathbb{N}a_{r+m}.$$

در این صورت A یک مجموعه مولد برای S نامیده می‌شود. اگر هیچ زیر مجموعه سره‌ای از A، مجموعه مولد S نباشد، A را یک مجموعه مولد مینیمال برای S گوییم. هر نیم‌گروه آفین یک مجموعه مولد مینیمال منحصر به فرد دارد [1]. به ازای میدان K، حلقه $K[[S]]$ زیر جبر تولید شده توسط تک جمله‌ای‌های

$$x^{a_i} = x_1^{a_{i_1}} \dots x_{r+m}^{a_{i_{r+m}}}$$

از حلقه چند جمله‌ای‌های

$$K[[x]] = K[[x_1, \dots, x_{r+m}]]$$

است. در واقع، $K[[S]]$ تصویر همریختی طبیعی پوشای

$$\varphi: K[[x_1, \dots, x_{r+m}]] \to K[[S]]$$

از K-جبر هاست که $\varphi(x_i) = x^{a_i}$.
نیم‌گروه S کوهن-مکالی (گرنشتاین) نامیده می‌شود در صورتی که حلقه $K[[S]]$ کوهن-مکالی (گرنشتاین) باشد. برای هر $v \in S$ ، مجموعه

$$AP(S, v) = \{s \in S : s - v \notin S\}$$

که در آن $s - v$ نشان دهنده تفاضل دو بردار از $\mathbb{N}^r$ است، مجموعه اَپری S نسبت به v نامیده می‌شود [2].
اگر $r = 1$ ، S نیم گروهی عددی نامیده می شود. اگر R دامنه صحیح موضعی از بعد کرول واحد و به طور تحلیلی تحویلناپذیر باشد، آنگاه ارزش گذاری نرمال شده بستار صحیح آن، $S = v(\bar{R})$، یک نیم‌گروه عددی است. علاوه بر این، در حالتی که R و بستار صحیح آن دارای میدان خارج قسمت یکسان باشند، داریم

$$R = K[[S]].$$

بسیاری از ناورداها و ویژگی‌های جبری چنین حلقه‌هایی را می‌توان بر اساس ساختار ساده‌تر نیم‌گروه متناظر آن مشخص کرد. در مطالعه نیم گروه‌های عددی، مجموعه های آپری نقش کلیدی دارند. در این حالت برای هر $n \in S$، مجموعه $AP(S, n)$ متناهی و شامل n عضو است [2]. رابطه ترتیب جزئی

$$a \preccurlyeq_S b \iff b - a \in S$$

روی $\mathbb{N}^r$، را در نظر می‌گیریم. بخش‌های کلاف برداری یک چندگونای آفین، یک مدول روی حلقه مختصاتی آن تشکیل می‌دهند که *مدول کانونی* نامیده می‌شود. برای توضیحات بیشتر می‌توان به [3] مراجعه کرد. در تمرین 21.11 از صفحه 548 مرجع [3]، نشان داده شده است که برای $r = 1$ و $n \in S$، اگر

$$\max_{\preccurlyeq_S} AP(S, n) = \{w_1, \dots, w_t\}$$

آنگاه فضای برداری تولید شده توسط x^{n-w_i} یک مدول کانونی برای $K[[S]]$ است (یعنی مدولی کوهن-مکالی از نوع واحد [4]). در حقیقت تعداد اعضای ماکسیمال $AP(S, n)$ نسبت به رابطه $\preccurlyeq_S$، برابر با نوع حلقه $K[[S]]$ است که آن را نوع نیم‌گروه S می‌نامند [2].
در حالت کلی $r \leq 2$ ، مجموعه اَپری نسبت به یک عضو S، ممکن است نامتناهی باشد. اگر نیم گروه آفین $S \subseteq \mathbb{N}^r$، شامل r بردار مستقل خطی روی میدان اعداد گویا باشد، آن را نیم گروه آفین سادکی نامند. اگر S شامل بردارهای مستقل خطی $a_1, \dots, a_r$ باشد، همان‌طور که در ابتدای بخش ۲ اشاره شده است، به راحتی می‌توان دید

$$AP(S) := \bigcap_{i=1}^{r} AP(S, a_i)$$

یک مجموعه متناهی است.
در حالت $r = 1$، حلقه نیم‌گروه‌های عددی $K[[S]]$ حلقه‌ای کوهن-مکالی با بعد کرول واحد است. در حالت $r \geq 2$، $K[[S]]$ یک حلقه r بعدی است که لزوماً کوهن-مکالی نیست. در [5]، روزالس و گارسیا سنچس،

نشان داده‌اند که برای نیم گروه آفین سادکی و کوهن- مکالی S، نوع $K[[S]]$ برابر واحد است (به طور معادل S گرنشتاین است) اگر و تنها اگر $AP(S)$ تنها یک عضو ماکسیمال نسبت به رابطه $\preccurlyeq_S$ داشته باشد.
در این مقاله، برای نیم گروه آفین سادکی و کوهن- مکالی S ، نشان می‌دهیم که تعداد اعضای ماکسیمال $AP(S)$ برابر با نوع حلقه $K[[S]]$ بوده و مدول تولید شده توسط

$$\{x^{(a_1+\cdots+a_r)-w} : w \in \max_{\preccurlyeq_S} \cap_{i=1}^{r} AP(S,a_i)\}$$

یک مدول کانونی برای $K[[S]]$ است. این نتیجه، علاوه بر تعمیم [3، 12.11] در حالت $r = 1$، اثباتی ساده برای نتیجه [5] در خصوص تشخیص گرنشتاین بودن نیم گروه‌های آفین سادکی نیز ارائه می‌دهد.

۲- پیش‌نیازها

در ادامه مقاله، همه جا فرض می‌کنیم $S \subseteq \mathbb{N}^r$ نیم گروه آفین سادکی با مجموعه مولد مینیمال $\{a_1, \dots, a_{r+m}\}$ باشد، به طوری که $a_1, \dots, a_r$ بردار‌ی های مستقل خطی روی اعداد گویای نامنفی هستند و

$$\mathbb{Q}_+S = \{\textstyle\sum_{i=1}^{r} l_i a_i :\ \ l_i \in \mathbb{Q}_+\}.$$

به ازای هر i، $1 \le i \le m$، فرض کنیم l_i کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که

$$l_i a_{r+i} \in \textstyle\sum_{j=1}^{r} \mathbb{N}a_j.$$

پس

$$\cap_{i=1}^{r} Ap(S,a_i) \subseteq \{\textstyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{r+i} : 0 \le \lambda_i < l_i, \lambda_i \in \mathbb{N}\}$$

یک مجموعه متناهی است.
فرض کنیم $R = K[[S]]$ حلقه نیم گروه‌های آفین متناظر با S باشد و لذا R حلقه‌ای موضعی با ایده‌آل ماکسیمال

$$\mathfrak{m} = (x^{a_1}, \dots, x^{a_{r+m}})$$

است. ابتدا نتیجه زیر را یادآوری می‌کنیم.

گزاره ۲-۱ ([6، 6.2] یا [5،11]). گزاره‌های زیر معادل هستند.

- حلقه $R = K[[S]]$، کوهن-مکالی است.
- برای هر $a \in \mathbb{N}^r$ و $1 \le i \ne j \le r$، اگر $a - a_i, a - a_j \in S$

آنگاه $a_i - a_j \in S$. □
برای R-مدول M، قرار می‌دهیم

$$Soc(M) = (0:\mathfrak{m})_M \cong Hom_R\left(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M\right).$$

اگر M یک مدول با تولید متناهی با عمق d باشد، نوع M به صورت

$$r(M) = \dim_{\frac{R}{\mathfrak{m}}} Ext_R^d\left(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M\right)$$

تعریف می‌شود. اگر $x^{s_1}, \dots, x^{s_d}$ یک رشته M-منظم ماکسیمال باشد، بنا بر [4،1.2.91]، داریم

$$r(M) = \dim_{R/\mathfrak{m}} Soc\left(\frac{M}{(x^{s_1},\dots,x^{s_d})M}\right).$$

دو گزاره زیر یادآوری می‌شود.

گزاره ۲-۲ [4, 3.2.10]. حلقه کوهن-مکالی R گرنشتاین است اگر و تنها اگر $r(R) = 1$.
مدول کانونی یک حلقه کوهن-مکالی با تقریب یکریختی یکتاست [4،3.3.4]. تعداد مولدهای مدول کانونی حلقه نیم گروه آفین، در نتایج بخش بعد نقش مهمی دارد.

گزاره ۲-۳ [4, 3.3.11]. فرض کنیم R کوهن- مکالی و ω_R مدول کانونی R باشد. آنگاه تعداد اعضای یک مجموعه مولد ω_R، برابر است با $r(R)$.

۳-نتایج اصلی

این بخش را با محاسبه عدد نوع یک نیم گروه آفین سادکی شروع می‌کنیم.
گزاره۳-۱. اگر حلقه $R = K[[S]]$ کوهن-مکالی باشد، آنگاه نوع R برابر است با تعداد اعضای مجموعه

$$\max_{\preccurlyeq_S} \cap_{i=1}^{r} AP(S,a_i).$$

اثبات. دنباله $x^{a_1},\dots,x^{a_r}$ از تک جمله‌ای ها یک دستگاه پارامتری برای R تشکیل می‌دهد. پس کوهن-مکالی بودن R نتیجه می‌دهد که $x^{a_1},\dots,x^{a_r}$ یک دنباله R-منظم ماکسیمال است. اکنون نشان می‌دهیم مدول

$$Soc\left(\frac{R}{(x^{a_1},\dots,x^{a_r})R}\right)$$

به عنوان یک فضای برداری روی میدان $\frac{R}{m}$، توسط مجموعه

$$\{x^c : c \in \max_{\preccurlyeq_S} \cap_{i=1}^{r} AP(S,a_i)\}$$

تولید می‌شود. برای هر $f \in R$، فرض کنیم

$$f^* = f + (x^{a_1},\dots,x^{a_r})R$$

نشان دهنده عضو متناظر f در

$$Soc\left(\frac{R}{(x^{a_1},\dots,x^{a_r})R}\right)$$

باشد. فرض کنیم

$$f = \sum_{i=1}^{r+m} r_i x^{c_i}$$

عضوی از R باشد $f^* \neq 0$. پس

$$f x^{a_i} \in (x^{a_1},\dots,x^{a_r})R,$$

به طوری‌که $i = r+1,\dots,r+m$. بنابراین

$$x^{c_l + a_j} \in (x^{a_1},\dots,x^{a_r})R$$

برای $1 \le l \le r+m$ و $r+1 \le j \le r+m$. پس، برای هر $j = 1,\dots,r+m$، عدد t_j، با شرط $1 \le t_j \le r$ و $b_j \in S$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$c_l + a_j = a_{t_j} + b_j.$$

در نتیجه

$$c_l + a_j \notin \cap_{i=1}^{r} AP(S,a_i)\,, 1 \le j \le r+m.$$

پس، برای هر $c \in \cap_{i=1}^{r} AP(S,a_i)$، داریم $c_l \not\preccurlyeq_S c$. لذا ،

برای هر l، که $1 \le l \le r+m$،

$$c_l \in \max_{\preccurlyeq_S} \cap_{i=1}^{r} AP(S,a_i).$$

حال برعکس، فرض کنیم

$$w \in \max_{\preccurlyeq_S} \cap_{i=1}^{r} AP(S,a_i).$$

به ازای $1 \le j \le r+m$، از آنجا که $w \preccurlyeq w + a_j$، عضوی از S مانند b_j، و اندیس $1 \le i_j \le r$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$w + a_j = a_{i_j} + b_j.$$

به ویژه $x^{w+a_j} \in (x^{a_1},\dots,x^{a_r})R$ □

فرض کنیم G زیر گروه تولید شده توسط S در $\mathbb{Z}^r$ باشد. به ازای هر i ، $1 \le i \le r$، قرار می دهیم

$$F_i \coloneqq \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{r} \mathbb{Q}_+ a_j\right) \cap S,$$
$$G_i \coloneqq \{b \in G : \exists\, a \in F_i\,, b + a \in S\},$$
$$C_i \coloneqq -G \setminus G_i\,, C_S \coloneqq -(\cap_{i=1}^{r} C_i).$$

گزاره زیر در اثبات قضیه اصلی این بخش استفاده خواهد شد.

گزاره۳-۲. اگر حلقه $K[[S]]$ کوهن-مکالی باشد، $K[[C_S]]$ مدول کانونی R است.

اثبات. حلقه $K[[S]]$، کمال حلقه $K[S]$ نسبت به تنها ایده‌آل تک جمله‌ای ماکسیمال آن است. بنا بر [6,3.8]، $K[C_S]$ مدول کانونی حلقه $K[S]$ است. پس با توجه به [7,4.2]، $K[[C_S]]$ مدول کانونی R است. □

قضیه ۳-۳. فرض کنیم

$$\max_{\preccurlyeq_S} \cap_{i=1}^{r} AP(S,a_i) = \{m_1,\dots,m_t\}$$

و به ازای هر i، $1 \le i \le t$، $f_i = m_i - \sum_{i=1}^{r} a_i$. اگر $R = K[[S]]$ کوهن-مکالی باشد، آنگاه R-مدول تولید شده توسط $\{x^{-f_1},\dots,x^{-f_t}\}$ یک مدول کانونی R است.

اثبات. فرض کنیم $m \in \max_{\preccurlyeq_S} \cap_{i=1}^{r} AP(S,a_i)\}$ ابتدا نشان می‌دهیم برای هر اندیس $1 \le i \le r$،

$$m - \sum_{j=1}^{r} a_j \notin G_i.$$

بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد $i = 1$. اگر $m - \sum_{j=1}^{r} a_j \in G_1$ ، آنگاه برای عضوی از S مانند
$a = \sum_{i=2}^{r} \lambda_i a_i$

به طوری که برای $i = 2, \dots, r$ ، $\lambda_i \in \mathbb{Q}_+$ داریم
$m - \sum_{i=1}^{r} a_i + a \in S.$

فرض کنیم l عدد صحیح مثبتی باشد که، به ازای هر i، $2 \le i \le r$، $l\lambda_i \in \mathbb{N}$. از آنجا که $(l-1)a \in S$، داریم
$m - \sum_{i=1}^{r} a_i + la =$
$m - a_1 + \sum_{i=2}^{r} (l\lambda_i - 1) a_i$

متعلق به S است. قرار می‌دهیم
$s = m + \sum_{i=2}^{r} (l\lambda_i - 1) a_i = a_1 + h$

که $h \in S$. از آنجاکه $m \in AP(S, a)$، اندیس $2 \le j \le r$ وجود دارد به طوری که
$l\lambda_i \neq 1.$

از آنجا $m - a_1 \in G$، اگر $l\lambda_i - 1$ و $l\lambda_j - 1$ هر دو مثبت باشند، برای برخی $i \neq j$، آنگاه گزاره ۲-۱ نتیجه می‌دهد $m - a_1 \in S$، که تناقض است. پس
$\sum_{i=2}^{r} (l\lambda_i - 1) a_i = (l\lambda_j - 1)\, a_j.$

فرض کنیم $\alpha = l\lambda_j - 1$. پس
$s = m + \alpha a_j = a_1 + h,$

و دوباره گزاره ۲-۱ نتیجه می‌دهد که
$s - a_j - a_1 =$
$m - a_1 + (\alpha - 1) a_j \in S.$

با $\alpha - 1$ بار به کارگیری گزاره ۲-۱، خواهیم داشت $m - a_1 \in S$ که تناقض است. بنابراین
$m_i - \sum_{j=1}^{r} a_j \in \bigcap_{i=1}^{r} C_i$

و لذا بنابر گزاره ۳-۲، x^{-f_i} متعلق به مدول کانونی R است.

با توجه به این که $r(R) = t$ برابر با تعداد اعضای یک مجموعه مولد مینیمال مدول کانونی R است (گزاره ۲-۳)، کافی است نشان دهیم برای هر $j = 1, \dots, t$ ، تک جمله‌ای x^{-f_i} نمی‌تواند توسط سایر اعضای $K[-\bigcap_{i=1}^{r} C_i]$ تولید شود. به فرض خلف، اگر $x^{-f_j} = x^{-c} x^{s}$، که $c \in \bigcap_{i=1}^{r} C_i$ آنگاه
$c = f_j + s.$

به دلیل ماکسیمال بودن m_j، اندیس $1 \le k \le d$ وجود دارد که $m_j + s - a_k \in S$. بنابراین
$c + \sum_{i=1, i\neq k}^{r} a_i = f_j + s + \sum_{i=1, i\neq k}^{r} a_i =$
$m_j + s - a_k \in S.$

پس $c \in G_i = G \setminus C_i$، که تناقض است. □

فهرست منابع

[1] J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, Finitely generated commutative monoids. Nova Science Publishers, Inc., Commack, NY, 1999.

[2] P. A. García-Sánchez and J. C. Rosales, Numerical Semigroups, Developments in Mathematics, 20. Springer, New York, 2009.

[3] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer, 1995.

[4] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[5] J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez, On Cohen-Macaulay and Gorenstein simplicial affine semigroups, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2) 41 (1998), no. 3, 517537.

[6] S. Goto, N. Suzuki and K. Watanabe, On affine semigroup rings, Japanese Journal of Mathematics (1976), no. 1, 1-12.

[7] Y. Aoyama, Some basic results on canonical modules, Kyoto Journal of Mathematics, 23 (1983), no.1, 85-49.