دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و یکم، آذر و دی ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

طیف گراف‌های ابرستاره و گراف‌های یالی آن‌ها

فتانه کریمی[۱]، سید مرتضی میرافضل[۲*]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، لرستان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۱/۲۰   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۵/۰۲

چکیده

فرض کنید $n \geq 1$، عددی صحیح باشد. گراف ابرمکعب Q_n گرافی است با مجموعه رئوس $\{0,1\}^n$، که در آن دو n – تایی باهم مجاور هستند اگر و تنها اگر در یک درآیه باهم اختلاف داشته باشند. در گراف Q_n، لایه kاُم را با L_k نشان می‌دهیم که مجموعه رئوسی است با دقیقا k درآیه 1، به‌عبارت دیگر رئوسی با وزن k، که در آن $1 \leq k \leq n$ است. برای هر $k \in \{1,\ldots,n-1\}$، گراف ابرستاره $B(n,k)$ زیرگرافی از Q_n است که توسط دو لایه L_k و L_{k+1} القا می‌شود. در این مقاله، ما قصد داریم طیف گراف ابرستاره $B(n,k)$ و $L(B(n,k))$ را به‌طور کامل مشخص کنیم، که در آن $L(B(n,k))$ نشان دهنده گراف یالی $B(n,k)$ است. به‌ویژه نشان خواهیم داد که گراف $L(B(n,k))$ یک گراف صحیح است، یعنی گرافی است که تمام مقادیر ویژه آن اعداد صحیح هستند.

واژه‌های کلیدی: ابرمکعب، گراف ابرستاره، طیف، گراف یالی، گراف صحیح.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:morteza_mirafzal@yahoo.com, mirafzal.m@lu.ac.ir

۱- مقدمه و تعاریف اولیه

در این مقاله منظور از گراف $\Gamma(V,E)$، گرافی است ساده و بدون جهت، که در آن $V=V(\Gamma)$ نشان دهنده مجموعه‌ی رئوس و $E=E(\Gamma)$ نشان دهنده مجموعه‌ی یال‌های Γ است. برای تمامی اصطلاحات و تعاریفی که در این‌جا ذکر نشده است، خواننده علاقمند می‌تواند به منابع [۷،۳،۲] مراجعه نماید. فرض کنید $n \geq 1$، یک عدد صحیح است. ابرمکعب با بعد n را با Q_n نشان می‌دهیم که گرافی است با مجموعه رئوس $\{0,1\}^n$، مجموعه‌ی همه n-تایی‌هایی متشکل از 0 و 1، که در آن دو n- تایی مجاورهستند اگر و تنها اگر در یک درآیه با هم اختلاف داشته باشند. در گراف Q_n، لایه‌ی L_k مجموعه‌ی رئوسی است که دقیقا k درآیه 1 دارند. به‌عبارت دیگر، مجموعه‌ی رئوسی با وزن k، که در آن $1\leq k\leq n$. زیرگرافی از Q_n که توسط لایه‌های L_k و L_{k+1} القا می‌شود را با $Q_n(k)$ نشان می‌دهیم. اگر $n=2k-1$، آن‌گاه گراف $Q_n(k-1)$ را مکعب میانی یا گراف ابرستاره منظم می‌نامند و با $HS(2k,k)$ نیز نمایش می‌دهند [۱۰،۱۱]. گراف ابرستاره منظم $HS(2k,k)= Q_{2k-1}(k-1)$ توسط پژوهشگران گوناگونی ازجنبه‌های متفاوتی مورد مطالعه قرارگرفته است [۱۰،۱۱]. در شکل ۱، تصویری از گراف $Q_5(2)=HS(6,3)$ را مشاهده می‌نمایید. توجه شود که در این شکل مجموعه $\{i,j,k\}(\{i,j\})$ با نماد $ijk(ij)$ نشان داده شده است.

گراف Q_n را می‌توان از جنبه دیگری نیز در نظر گرفت. مشبکه بولی BL_n برای $n\geq 1$، گرافی است با مجموعه رئوسی که شامل تمام زیرمجموعه‌های n عضوی مجموعه‌ی $[n]=\{1,\ldots,n\}$ است و در آن دو رأس x و y مجاورند اگر و تنها اگر تفاضل متقارن آن‌ها دقیقاً یک عضو داشته باشد. درگراف BL_n، لایه L_k مجموعه تمام زیرمجموعه‌های k-عضوی از مجموعه $[n]$ است. در ادامه، زیرگراف القایی از گراف BL_n توسط لایه‌های L_k و L_{k+1} را با نماد $BL_n(k,k+1)$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که اگر A زیرمجموعه‌ای از $[n]$ باشد، آن‌گاه تابع مشخصه A تابع $\chi_A:[n]\to\{0,1\}$ با ضابطه

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

است. حال می‌توان نشان داد که نگاشت

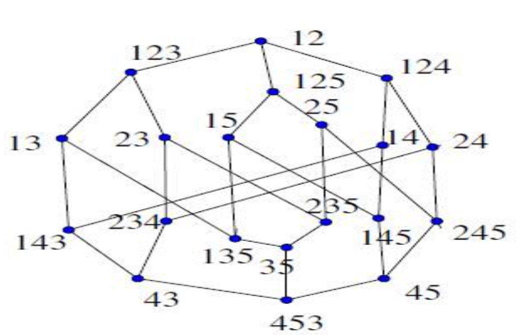
$$\chi: V(BL_n)\to V(Q_n)$$

با ضابطه‌ی $\chi(A)=\chi_A$، یک یک‌ریختی گراف‌ها است و نتیجه می‌گیریم که گراف Q_n با گراف BL_n یک‌ریخت است، که این یک‌ریختی یک یک‌ریختی بین $BL_n(k,k+1)$ و $Q_n(k)$ القا می‌کند. به این دلیل در ادامه، گراف $BL_n(k,k+1)$ را در نظر گرفته و روی آن مطالعه خواهیم کرد. همچنین به منظور خلاصه‌نویسی از نماد $B(n,k)$ برای $BL_n(k,k+1)$ استفاده خواهیم کرد.

می‌دانیم $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$، که از این‌جا می‌توان اثبات کرد:

$$B(n,n-k-1)\cong B(n,k)$$

و از این‌رو در ادامه فرض می‌کنیم $k<n/2$.



شکل ۱: گراف ابر ستاره HS(6,3)

فرض کنید Γ یک گراف ساده و متناهی باشد. ماتریس مجاورت گراف Γ را معمولاً با A نشان می‌دهیم که سطر و ستون‌های آن توسط مجموعه رئوس Γ اندیس‌گذاری می‌شود و درآیه‌های آن از مجموعه‌ی دو عضوی $\{0,1\}$ انتخاب می‌شوند. فرض کنید x و y دو رأس دلخواه Γ باشند، آن‌گاه A_{xy}، درآیه‌ی xyاُم ماتریس A، برابر 1 است هرگاه x با y مجاور باشد و در غیر این‌صورت $A_{xy}=0$. مقادیر ویژه و در نتیجه طیف گراف Γ، همان مقادیر ویژه و طیف ماتریس مجاورت A هستند. مطالعه بین ساختارهای گراف‌ها (ازجمله ساختارهای هندسی و توپولوژیکی) و مقادیر ویژه گراف‌ها، در قلب نظریه گراف جا دارد و به‌صورت کامل در منابع متفاوتی این مطالعات صورت گرفته است. محققینی که علاقمند به استفاده از نظریه طیف گراف‌ها هستند، باید با هر دو شاخه نظریه گراف و جبرخطی، ازجمله مقادیر ویژه، بردارهای ویژه، دترمینان‌ها و مواردی از این قبیل آشنا باشند. کتاب‌ها و منابع بسیاری برای مطالعه در این شاخه از نظریه گراف موجود است که به‌عنوان مثال می‌توان به منابع [۵،۴،۱] مراجعه نمود.

در این مقاله، در مورد برخی خواص جبری گراف و گراف یالی آن تحقیق خواهیم کرد. به‌ویژه طیف این گراف‌ها را به‌طور کامل مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فرض کنید $n,k\in\mathbb{N}$ و $k\le\frac{n}{2}$, $[n]=\{1,\ldots,n\}$. گراف جانسون $J(n,k)$ گرافی است با مجموعه رئوس

$$V=\{v \mid v\subset[n],|v|=k\},$$

که در آن دو رأس v و w مجاورند اگر و تنها اگر $|v\cap w|=k-1$.

به سادگی می‌توان مشاهده نمود که گراف $J(n,k)$ انتقالی - رأسی است [۷].

۲- برخی خواص گراف $B(n,k)$

گراف $B(n,k)$ دارای ویژگی‌های جبری جالبی است که بعضی از آن‌ها در ادامه آورده شده است.

گزاره ۲-۱: [۱۲،۱۱،۱۰] گراف $B(n,k)$ یک گراف دوبخشی و همبند است.

گزاره ۲-۲: [۱۲،۱۱،۱۰] فرض کنید قطر گراف $B(n,k)$ برابر D باشد، اگر $n\neq2k+1$، آن‌گاه $D=2(k+1)=2k+2$ و اگر $n=2k+1$، آن‌گاه $D=2k+1$.

گزاره ۲-۳: [۱۰،۱۱،۱۲] اگر $\Gamma=B(n,k)$، آن‌گاه Γ گرافی انتقالی-یالی است، به‌علاوه اگر $n=2k+1$، آنگاه Γ انتقالی-راسی هم هست.

از گزاره (۲-۳) نتیجه می‌گیریم که مکعب میانی $B(2k+1,k)$ یک گراف انتقالی-یالی و انتقالی-راسی است، اما در حقیقت مطالب بیشتری در مورد این گراف می‌توان بیان نمود. گراف Γ را متقارن (یا انتقالی-کمانی) گوییم، اگر برای تمام رئوس u,v,x,y در Γ، در حالتی که u با v و x با y مجاور باشد، خودریختی $\pi\in Aut(\Gamma)$ موجود باشد، به‌طوریکه $\pi(u)=x$ و $\pi(v)=y$.

قضیه ۲-۱: [۱۲،۱۱،۱۰] گراف ابرستاره منظم $B(2k+1,k)$ یک گراف متقارن است.

حال از وات کینس [۱۳]، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲-۲: همبندی گراف ابرستاره منظم $B(2k+1,k)$ ماکزیمم حالت ممکن، یعنی $k+1$، است. که در آن $k+1$ همان درجه نظم این گراف است. برای گروه خودریختی گراف $B(n,k)$ نیز قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲-۳: [۱۰،۱۱،۱۲] فرض کنید $n\geq4$، $1\leq k\leq n/2$ و $[n]=\{1,\ldots,n\}$. همچنین فرض کنید $\Gamma=B(n,k)$ گرافی با مجموعه رئوس

$$V=\{v\mid v\subset[n],\ |v|\in\{k,k+1\}\}$$

و مجموعه‌ی یال‌های

$$E=\{\{v,w\}\mid v,w\in V, v\subset w \text{ or } w\subset v\}$$

باشد. اگر Γ منظم نباشد (یعنی $n\neq2k+1$) آن‌گاه

$$\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong \mathrm{Sym}([n])$$

و اگر Γ منظم باشد (یعنی $n=2k+1$)، آن‌گاه
$$\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong \mathrm{Sym}([n])\times\mathbb{Z}_2\text{،}$$

که در آن $\mathbb{Z}_2$ گروه دوری از مرتبه 2 است.

۳- نتایج اصلی

تعریف ۳-۱: فرض کنید $n\geq 3$ یک عدد صحیح، $[n]=\{1,\ldots,n\}$ و همچنین k یک عدد صحیح باشد، بطوریکه $1\leq k\leq n/2$. گراف $B(n,k)$ گرافی است با مجموعه رئوس

$$V=\{v \mid v\subset[n],\ |v|\in\{k,k+1\}\}$$

و مجموعه یال‌های

$$E=\{\{v,w\}\mid v,w\in V, v\subset w \text{ or } w\subset v\}$$

به سادگی می‌توان مشاهده نمود که $B(3,1)$ همان دور از مرتبه 6، یعنی C_6، است. در شکل ۲ تصویری از $B(5,1)$ درصفحه را داریم. توجه داشته باشید که در شکل ۲، $i=\{i\}$ و $ij=\{i,j\}$ است.

از تعریف (۳-۱) به‌آسانی نتیجه می‌شود که اگر v رأسی در $B(n,k)$ با اندازه k (به‌عنوان یک مجموعه) باشد، آن‌گاه $\deg(v)=n-k$ و اگر v رأسی با اندازه $k+1$ باشد، آن‌گاه $\deg(v)=k+1$.

حال واضح است که گراف $B(n,k)$ یک گراف منظم است اگر وتنها اگر $n=2k+1$. همچنین گراف $\Gamma=B(n,k)$ یک گراف دوبخشی است و داریم

$$V(\Gamma)=V_1\cup V_2$$

که در آن

$$*\ \begin{cases} V_1=\{v \mid v\subset[n], |v|=k+1\} \\ V_2=\{v \mid v\subset[n], |v|=k\} \end{cases}$$

در ادامه، طیف گراف $B(n,k)$ را مشخص خواهیم کرد.

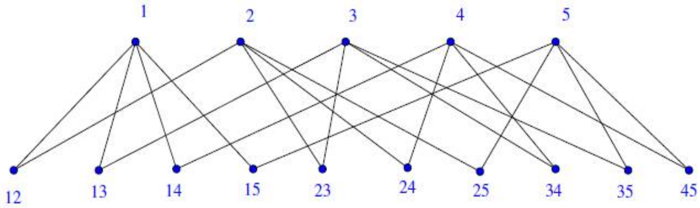
قضیه ۳-۱: فرض کنید $n>3$ و $1\leq k<\frac{n}{2}$. آن‌گاه $\Gamma=B(n,k)$ دارای مقادیر ویژه مجزای λ_i برای $0\leq i\leq k+1$ است، که در آن

$$\lambda_i=\pm\sqrt{(n-k-i)(k-i+1)}\quad (**)$$

به‌علاوه هر λ_i دارای چندگانگی

$$\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$$

است (که به طورقراردادی داریم $\binom{n}{-1}=0$).



شکل ۲: B(5,1)

برهان: فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف Γ باشد. درگام اول، طیف ماتریس A^2 را مشخص می‌کنیم. فرض کنید $(A^2)_{vw}$ درآیه واقع در سطر vاُم و ستون wاُم ماتریس A^2 باشد. توجه کنید که $(A^2)_{vw}$ برابر تعداد گشت‌های به طول دو بین دو رأس v و w است. فرض کنید V_1 و V_2 مجموعه‌هایی باشند که در (*) دیدیم.

حال دو حالت زیر را داریم:

۱) اگر v=w، آن‌گاه $(A^2)_{vw}$ تعداد همسایه‌های v است و بنابراین داریم:

$$\left(A^2\right)_{vv}=\begin{cases}k+1 & v\in V_1\\ n-k & v\in V_2\end{cases}$$

۲) فرض کنید v≠w، و p:vuw یک مسیر به‌طول دو در گراف Γ باشد. چون $u\in N_\Gamma(v)$، پس $(u\in V_1)u\in V_2$ و بنابراین $(w\in V_2)w\in V_1$. به‌عبارت دیگر، هیچ مسیری به طول دو بین یک جفت از رئوس در دو بلوک مجزا از مجموعه‌ی رئوس گراف Γ وجود ندارد. بنابراین اگر $(v\in V_2)v\in V_1$ و $(w\in V_1)w\in V_2$ آن‌گاه داریم $(A^2)_{vw}=0$.

۳) فرض کنید $v=\{x_1,x_2,\dots,x_{k+1}\}\in V_1$ و P:vuw مسیری به‌طول دو درگراف Γ باشد. بدون ازدست دادن کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد که

$u=\{x_1, x_2,\dots, x_k\}$

چون u با w مجاور است و $v\neq w$، پس $y\in[n]-v$ موجود است به‌طوری که

$w=\{x_1, x_2,\dots, x_k,y\}$

بنابراین $|v\cap w|=k$. همچنین، اگر$|v\cap w|=k$، آن‌گاه به‌وضوح یک مسیر به طول دو بین v و w موجود است. بنابراین می‌توان گفت:

یک مسیر به طول دو بین دو رأس موجوداست، اگر و تنها اگر داشته باشیم $|v\cap w|=k$.

حال $v,w\in V_1$ را به عنوان رئوس گراف جانسون $J(n,k+1)$ با مجموعه‌ی رئوس V_1 در نظر می‌گیریم. بنابراین یک مسیر به‌طول دو بین رئوس v و w، به‌عنوان رئوس Γ، موجود است، اگر و تنها اگر v و w به‌عنوان رئوس گراف جانسون $J(n,k+1)$ مجاور باشند.

فرض کنید J_1 ماتریس مجاورت گراف $J(n,k+1)$ باشد، آن‌گاه $(J_1)_{vw}=1$ اگر و تنها اگر $(A^2)_{vw}=1$، که در آن $v,w\in V_1$ و v≠w.

۴) حال $v,w\in V_2$ را به‌عنوان رئوس گراف جانسون $J(n,k)$ با مجموعه‌ی رئوس V_2 در نظر می‌گیریم. با توجه به آنچه که در (۳) مشاهده کردیم، حقیقت زیر را داریم؛

یک مسیر به‌طول دو درگراف Γ بین دو رأس v,w موجود است اگر و تنها اگر $|v\cap w|=k-1$. بنابراین، مسیر به‌طول دو بین v و w درΓ موجود است اگر و تنها اگر v و w به‌عنوان رئوس $J(n,k)$ مجاور باشند. فرض کنید J_2 ماتریس مجاورت گراف جانسون $J(n,k)$ باشد. آن‌گاه $(J_2)_{vw}=1$ اگر و تنها اگر $(A^2)_{vw}=1$، که در آن $v,w\in V_2$ و w≠v.

با توجه به موارد بالا نتیجه می‌گیریم،

$$A^2=\begin{bmatrix}(k+1)I_a+J_1 & 0\\ 0 & (n-k)I_b+J_2\end{bmatrix}،$$

که در آن $a=\binom{n}{k+1}$ و $b=\binom{n}{k}$. حال می‌توان ملاحظه کرد که چندجمله‌ای مشخصه A^2، یعنی $\chi(A^2)$، به صورت زیر است؛

$$\begin{aligned}\chi\left(A^2\right)&=\det\left(\lambda I-A^2\right)\\&=\det\left(\lambda I_a-(k+1)I_a-J_1\right)\times\\&\det\left(\lambda I_b-(n-k)I_b-J_2\right)\end{aligned}$$

از طرف دیگر، فرض کنید $s\leq n/2$ یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه از [۴،۵] می‌دانیم که $(s-i)(n-s-i)$ برای $i=0,\dots,s$، مقادیر ویژه مجزای گراف جانسون $J(n,s)$ با چندگانگی‌های $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$ هستند. اکنون برای هر مقدار ویژه λ از ماتریس A^2 داریم؛

$$\begin{aligned}\lambda&=(k+1)+(k+1-i)(n-k-1-i)-i\\&=(k+1)(n-k-i-1+1)-i(n-k-i-1+1)\\&=(k+1-i)(n-k-i),\quad i=0,\dots,k+1\end{aligned}\qquad(۳-۱)$$

و یا

$$\begin{aligned}\lambda &= (n-k)+(k-i)(n-k-i)-i\\ &= (n-k)(k-i+1)-i(k-i+1)\\ &= (k-i+1)(n-k-i)\,,\quad i=0,\dots,k\end{aligned} \qquad (۳-۲)$$

که در هر دو حالت، برای هر i، چندگانگی مقدار ویژه λ برابر $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$ است. بنابراین، برای

$$\lambda_i = (n-k-i)(k-i+1) \qquad ،i=0, \dots , k$$

و $\lambda_{k+1}=0$ مقادیر ویژه مجزای A^2 با چندگانگی‌های به‌ترتیب، $2\left(\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}\right)$ و $\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k}$ هستند. چون مقادیر ویژه مجزای A^2، توان‌های دوم مقادیر ویژه A هستند و $B(n,k)$، یک گراف دوبخشی است، پس برای مقادیر ویژه $\Gamma=B(n,k)$ داریم:

$$\lambda_i = \pm\sqrt{(n-k-i)(k-i+1)},\ i=0,\dots,k+1$$

که برای هر i، λ_i دارای چندگانگی $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$ است. (که به صورت قراردادی داریم $\binom{n}{-1}=0$).
اگر $n=2k+1$، آن‌گاه قضیه (۳-۱) برای گراف مکعب میانی $\Gamma=B(n,k)$ به صورت زیر خواهد بود.

نتیجه ۳-۱: فرض کنید $n=2k+1$. آن‌گاه مقادیر ویژه مکعب میانی $B(n,k)=B(2k+1,\ k)$ برابر $\pm(k+1-i)$ است، که چندگانگی آن‌ها نیز برای هر $i=0,\dots,k+1$ برابر

$$\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$$

است. بنابراین تمامی مقادیر ویژه $B(n,k)$، صحیح خواهند بود.
فرض کنید Γ یک گراف باشد، گراف یالی Γ را با $L(\Gamma)$ نشان می‌دهیم که گرافی است با مجموعه رئوس برابر با مجموعه یال‌های Γ، که در آن دو رأس در $L(\Gamma)$ با هم مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر در Γ دارای یک رأس مشترک باشند. گراف یالی $L(B(n,k))$ دارای خواص جالبی است. به‌عنوان مثال، فرض کنید n,k اعدادی فرد باشند، آن‌گاه $L(B(n,k))$ یک گراف همیلتنی است. درحقیقت اگر v رأسی درگراف $B(n,k)$ باشد، آن‌گاه $\deg(v)\in\{k+1\ ,\ n-k\}$، بنابراین اگر n و k هر دو فرد باشند آن‌گاه درجه هر رأس در گراف $B(n,k)$ زوج است و از این‌رو $B(n,k)$ اویلری است[۳]. در نتیجه، در این حالت گراف $L(B(n,k))$ یک گراف همیلتنی است. بنابراین، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۳-۲: اگر $n\ ,\ k$ اعداد صحیح فرد باشند، آن‌گاه گراف $L(B(n,k))$ یک گراف همیلتنی است.
ازگزاره (۳-۲) می‌دانیم که گراف $L(B(n,k))$ یک گراف انتقالی-رأسی است. در این حالت، حدس معروفی در نظریه گراف موجود است که بیان می‌کند، تقریبا تمام گراف‌های همبند انتقالی-رأسی، همیلتنی هستند[۹]. حال با استفاده از این حدس و نتیجه (۳-۲) به نظر می‌رسد که حدس زیر درست باشد.

حدس: گراف یالی $B(n,k)$، یعنی گراف $L(B(n,k))$، یک گراف همیلتنی است.
در ادامه طیف گراف $L(B(n,k))$ را مشخص خواهیم کرد. برای این کار به لم زیر نیاز داریم که می‌توان برهان آن‌را در [۵،۱] مشاهده نمود.

لم۳-۱: اگر Γ یک گراف نیم‌منظم دوبخشی با پارامترهای $(n_1,\ n_2,\ r_1,\ r_2)$ باشد، به‌طوریکه $n_1 \ge n_2$ و $\lambda_1\ge\dots\ge\lambda_{n_2}$، n_2 مقادیر ویژه بزرگتر Γ باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\chi_{L(\Gamma)}(x) &= (x-r_1-r_2+2)\\ &(x-r_1+2)^{n_1-n_2}(x+2)^{n_1r_1-n_1-n_2+1}\\ &\prod_{i=2}^{n_2}((x-r_1+2)(x-r_2+2)-\lambda_i^{\,2})\end{aligned} \qquad (۳-۳)$$

که در آن $\chi_{L(\Gamma)}(x)$ چند جمله‌ای مشخصه گراف $L(\Gamma)$ است.

قضیه ۳-۲: فرض کنید $n\geq 4$ و $k<n/2$ و همچنین $L(B(n,k))$ گراف یالی، گراف ابرستاره $B(n,k)$ است. آن‌گاه $n-1$، $n-i-1$، $k-1$، $i-2$ و -2 مقادیر ویژه گراف $L(B(n,k))$ با چندگانگی‌های به‌ترتیب برابر 1، $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$، $\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k}$، $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$ و $k\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k}+1$، برای $1\leq i\leq k$ هستند.

برهان: توجه داشته باشید که $B(n,k)$ یک گراف دو بخشی نیم‌منظم با پارامترهای $r_2=n-k$، $r_1=k+1$، $n_2=\binom{n}{k}$ و $n_1=\binom{n}{k+1}$ است. همچنین می‌دانیم که اگر $a_i=\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \binom{n}{k} = n_2$$

بنابراین در قضیه (۳-۱) رابطه‌ی (**)، هنگامی که اندیس i بین 0 تا k تغییر می کند، n_2 مقدار ویژه بزرگتر $B(n,k)$ را خواهیم داشت. حال از لم (۳-۱) نتایج زیر را داریم:

۱) $x-(n-k)-(k+1)+2=0$، بنابراین $x=n-1$. از این‌رو، $n-1$ یک مقدار ویژه $L(B(n,k))$ با چندگانگی 1 است.

۲) $(x+2)^{n_1r_1-n_1-n_2+1}=0$، بنابراین $x=-2$. از این‌رو -2 یک مقدار ویژه $L(B(n,k))$ با چندگانگی $k\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k}+1$ است.

۳) $\left(x-(k+1)+2\right)^{n_1-n_2}=0$، بنابراین $x=k-1$، از این‌رو $k-1$ یک مقدار ویژه $L(B(n,k))$ با چندگانگی $n_1-n_2=\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k}$ است.

۴) در نهایت با استفاده از لم (۳-۱)، مقادیر ویژه دیگر $L(B(n,k))$، ریشه‌های معادله‌های درجه دوم زیر هستند:

$$\left(x-(n-k-2)\right)\times \left(x-(k-1)\right)-\lambda_i^2=0; \quad i=1,\ldots,k \qquad (۳-۴)$$

(توجه داشته باشید که $\lambda_0^2=(n-k)(k+1)$) که در آن $\lambda_i^2=(n-k-i)(k-i+1)$.

همچنین از قضیه (۳-۱) می‌دانیم که چندگانگی ریشه‌های هر معادله در رابطه (۳-۴) برابر $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$ است. حال می‌توانیم هر یک از معادلات در (۳- ۴) را با استفاده از نرم افزارهای مناسب مانند wolfarm mathematica [۱۴] حل کنیم. با استفاده از نرم افزار یاد شده داریم:

```
In[1]: Solve [(x-(n-k-2))(x-(k-1))-(n-k-i)(k-i+1)=0 , x]
Out[1]={{x →-2+i} ,{x →-1-i+n}}
```

بنابراین برای هر $1\leq i\leq k$، اعداد صحیح $x=i-2$ و $x=n-i-1$، ریشه‌های معادله‌ی (۳-۴) هستند. از این‌رو، این اعداد صحیح مقادیر ویژه باقی‌مانده گراف $L(B(n,k))$ با چندگانگی‌های $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$ هستند.

گراف Γ را یک گراف صحیح می‌نامیم هرگاه تمام مقادیر ویژه آن اعداد صحیح باشند. مفهوم گراف صحیح ابتدا توسط هرری و شوانک در سال ۱۹۷۴ در منبع [۸] معرفی گردید. در حالت کلی، مسئله مشخص کردن گراف‌های صحیح یک مسئله دشوار و پیچیده به‌نظر می-رسد. در این مورد، پژوهش‌های زیادی صورت گرفته است که به‌عنوان مثال می‌توان به منبع [۶] مراجعه نمود. حال ازقضیه (۳-۲) نتیجه می‌گیریم که گراف یالی گراف ابرستاره $B(n,k)$، یعنی $L(B(n,k))$، یک گراف صحیح است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، طیف گراف $B(n,k)$ و همچنین گراف یالی آن، یعنی $L(B(n,k))$ را مشخص نمودیم. در نتیجه (۳-۱) مشاهده کردیم که گراف $B(2k+1,k)$ یک گراف صحیح است. همچنین بااستفاده از قضیه (۳-۲) طیف گراف $L(B(n,k))$ را برای $n\geq 4$ مشخص کرده و نتیجه گرفتیم که این گراف‌ها نیز گراف‌هایی صحیح هستند.

فهرست منابع

[1] R. B. Bapat. Graphs and Matrices. Springer–verlag, London (2010).

[2] N. L. Biggs. Algebraic Graph Theory (Second edition). Cambridge Mathematical Library (Cambridge University Press, Cambridge) (1993).

[3] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph Theory. Springer Verlage (2008).

[4] A. E. Brouwer, W. H. Haemers. Spectra of Graphs. Springer Verlage (2012).

[5] D. Cvetkovic, P. Rowlinson, S. Simic. An introduction to the theory of graph spectra. Cambridge University Press (2010).

[6] D. Cvetkovic, Z. Rodosavljevic, S. K. Simic. A survey on integral graphs. Univ. Beograde, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 15 (2004).

[7] C. Godsil, G. Royle. Algebraic Graph Theory. Springer Verlage (2001).

[8] F. Harary, A. J. Schwenk. Which graphs have integral spectra? In Graphs and Combinatorics, (eds. R. Bari and F. Harary), (Proc. Capital Conf., George Washington Univ., Washington, D.C., 1973) Lecture Notes in Mathematics 406, Springer-Verlag, Berlin 45-51, (1974).

[9] L. Lovasz. Problem 11 in: Combinatorial structures and their applications. (Proc. Calgary Internat. Conf, Calgary, Alberta, 1969), Gordon and Breach, New York 243-246 (1970).

[10] S. M. Mirafzal. On the automorphism groups of regular hyperstars and folded hyperstars. Ars Comb. 123, 75-86 (2015).

[11] S. M. Mirafzal. The automorphism group of the bipartite Kneser graph. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 129 no. 3, Art. 34, 8 pp (2019).

[12] S. M. Mirafzal. Cayley properties of the line graphs induced by consecutive layers of the hypercube. Arxive: 1711. 02701v3, submitted.

[13] M. Watkins. Connectivity of transitive graphs. J. Combin. Theory 8: 23-29 (1970).

[14] S. Wolfram, Wolfram Mathematica 8.