دسترسی در سایت http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هفتم، آذر و دی ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

# کران‌های دقیق نرم مشتق شبه‌شوارتزین برخی توابع ستاره‌وار خاص

حسام محزون*

استادیار گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران غرب، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۲/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۹/۱۲

**چکیده**

فرض‌کنید $A$ رده توابع تحلیلی و نرمال‌شده در قرص‌یکه $\Delta$ باشد. همچنین زیررده $U$ از $A$ را رده توابع تک‌ارز و $LU$ را رده توابع موضعاً تک‌ارز درنظر می‌گیریم. برای هر تابع $f$ از رده $LU$ نرم آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\| := \sup_{z\in\Delta} (1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|$$

در این مقاله کران‌های دقیقی برای نرم تابع $f$ با انتخابهای مناسب برای $\varphi$ پیدا می‌کنیم که در رابطه تبعیت زیر صدق می‌کند:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z)$$

در رابطه بالا "$\prec$" نماد تبعیت است. همچنین $\varphi$ تابعی تحلیلی، $\mathrm{Re}\{\varphi(z)\}>0$، $\varphi(0)=1$ و $\varphi'(0)>0$ است.

**واژه‌های کلیدی:** قرص‌واحد، تابع تک‌ارز، تابع موضعاً تک‌ارز، ستاره‌واری، تبعیت.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: hesammahzoon1@gmail.com

## ۱- مقدمه

نظریه توابع هندسی یکی از شاخه‌های آنالیز مختلط است که خواص تحلیلی نگاشت‌های همدیس را با استفاده از ویژگی‌های هندسی تصاویر آنها بررسی می‌کند، زیرا در حالت کلی رسم نمودار یک تابع مختلط کاری بس دشوار است اما رسم برد آن به مراتب ساده‌تر است، مخصوصاً وقتی که دامنه آن قرص واحد باشد. پیدایش این نظریه در اوایل قرن ۲۰ بود و اکنون نیز یکی از فعال‌ترین زمینه‌های پژوهشی است. یکی از معروف‌ترین مسائل در این نظریه، حدس معروف بیبرباخ (در ادامه به این حدس اشاره می‌کنیم) بود که برای سال‌ها یک مسئله باز بود تا این‌که بعد از حدود ۶۳ سال توسط دوبرانژ در سال ۱۹۸۴ حل شد. البته حل این مساله نیز تاریخچه جالبی دارد که خواننده می‌تواند برای جزئیات بیشتر به مراجعه کند. همچنین این نظریه ارتباط عمیقی با دیگر شاخه‌های ریاضی ازجمله نظریه تصادفی، هندسه هذلولوی و سیستم‌های دینامیکی دارد. در ادامه به چند تعریف و نماد را که در این نظریه نقش اساسی دارند اشاره می‌کنیم:

در سراسر این مقاله از نماد $\Delta$ برای نشان‌دادن قرص واحد در صفحه مختلط استفاده می‌کنیم، یعنی

$\Delta=\{z \in \mathbb{C}: |z|<1\}$

خانواده همه توابع تحلیلی در قرص‌واحد را با $H$ نشان می‌دهیم و $A$ را زیرردهای از $H$ درنظر می‌گیریم که اعضای آن در شرایط نرمال‌شده $f(0)=f'(0)-1=0$ صدق‌می‌کنند، درواقع اگر تابع $f$ عضوی از رده $A$ باشد، آن‌گاه دارای شکل زیر است:

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots \qquad (۱)$$

تابع $f$ را تک‌ارز گوییم هرگاه از $z_1\neq z_2$ نتیجه شود $f(z_1)\neq f(z_2)$، در واقع $f$ یک‌به‌یک باشد. رده توابع تک‌ارز در قرص‌واحد را با $U$ نشان می‌دهیم. حدس بیبرباخ یا قضیهٔ دوبرانژ بیان می‌کند اگر تابع $f$ به شکل (۱) عضوی از رده $U$ باشد آن‌گاه $|a_n|\le n$ که نامساوی دقیق است. این بدین معنی است که نمی‌توان عدد $n$ را با یک عدد بزرگتر از خودش جایگزین کرد. حالت تساوی نیز برای تابع معروف کوبه

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\cdots+nz^n+\cdots$$

برقرار است. همچنین $f$ را موضعاً تک‌ارز گوییم هرگاه در یک همسایگی تک‌ارز باشد. رده توابع موضعاً تک‌ارز را با $LU$ نشان‌می‌دهیم.

برای هر تابع $f$ از رده $LU$ نرم آن را به‌صورت زیر تعریف‌می‌کنیم:

$$\|f\|:=\sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \qquad (۲)$$

خارج قسمت $f''/f'$ را مشتق شبه‌شوارتزین $f$ می‌نامند که در نظریه تیچمولر به عنوان عضوی از فضای باناخ مختلط درنظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که $\|f\|<\infty$ اگر و فقط‌اگر $f$ بطور یکنواخت موضعاً تک ارز باشد. همچنین اگر $\|f\|\le 1$ آن‌گاه $f$ تک‌ارز است و اگر $f$ تک‌ارز باشد آن‌گاه $\|f\|\le 6$. هر دو کران بالا برای نرم $f$ دقیق هستند. از طرفی اگر $\|f\|<2$، آن‌گاه $f$ کراندار است. برای جزئیات بیشتر خواننده می‌تواند به منبع [2] مراجعه کند.

در ادامه بحث به تعریف تبعیت می‌پردازیم. مفهوم تبعیت میان دو تابع یک متغیره مختلط تعمیمی از ایده نامساوی بین دو تابع یک متغیره حقیقی است. جرقه‌های اولیه این تعریف ابتدا در سال ۱۹۰۹ توسط لیندلف روشن شد اما در ادامه لیتلوود در سال ۱۹۲۵ و روجوسینسکی در سال ۱۹۳۹ بودند که ویژگی‌های اساسی و مهم این تعریف را معرفی و بررسی کردند. تبعیت هم‌اکنون نقشی کلیدی در نظریه توابع هندسی بازی می‌کند. یکی از مهم‌ترین منابع برای تبعیت کتاب معروف میللر و موکانو است [3].

فرض کنید $f$ و $g$ دو تابع تحلیلی در قرص واحد باشند. می‌گوییم تابع $f$ از تابع $g$ تبعیت می‌کند و می‌نویسیم $f\prec g$ یا $f(z)\prec g(z)$، هرگاه تابعی شوارتز مانند $w$ در قرص واحد با ویژگی‌های $w(0)=0$ و $|w(z)|<1$ موجود باشد به‌طوری که برای همه $z$ های متعلق به قرص واحد داشته باشیم:

$$f(z)=g(w(z))$$

در حالت خاص، وقتی که تابع $g$ تک‌ارز باشد، آن‌گاه داریم:

$$f \prec g \Leftrightarrow (f(0)=g(0), f(\Delta)\subseteq g(\Delta))$$

حال به تعریف توابع ستاره‌وار می‌پردازیم.
تابع $f$ از رده $U$ را ستاره‌وار (نسبت به صفر) گوییم هرگاه $t\in[0,1]$ و $s\in f(\Delta)$ وقتی‌که $ts\in f(\Delta)$
مجموعه همه توابع ستاره‌وار در قرص واحد را با $S^*$ نشان می‌دهیم. از لحاظ هندسی، تابع $f$ ستاره‌وار است اگر و فقط اگر برای هر $z\in\Delta$ داشته باشیم:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0$$

با توجه با اینکه تابع

$$\frac{1+z}{1-z}$$

قرص واحد را به نیم‌صفحه راست می‌نگارد تعریف معادل زیر را برای توابع ستاره‌وار داریم:

$$f\in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}$$

لازم است به این نکته اشاره کنیم که تعمیم توابع ستاره‌وار با استفاده از تبعیت اولین بار توسط ویلیام ما و میندا مطرح شد (منبع [4] را ببینید). درواقع آنها رده $S^*(\varphi)$ را توابعی درنظر گرفتند که در رابطه تبعیت زیر صدق می‌کند:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z)$$

که در آن $\varphi$ تابعی تحلیلی است و $\operatorname{Re}\{\varphi(z)\}>0$ و $\varphi(0)=1$ و $\varphi'(0)>0$.
اگر انتخاب‌های مناسبی را برای تابع $\varphi$ درنظر بگیریم، رده‌های جالبی از توابع ستاره‌وار بدست می‌آیند که توسط پژوهشگران بسیاری مطالعه‌شده‌اند. به‌عنوان مثال در زیر به چند نمونه از مهمترین‌ها اشاره می‌کنیم.
الف) فرض کنید $-1\le B<A\le 1$. اگر

$$\varphi(z)=\frac{1+Az}{1+Bz}$$

آن‌گاه رده معروف توابع ستاره‌وار یانوفسکی بدست می‌آید. این رده را با $S^*[A,B]$ نمایش می‌دهیم. توجه‌کنید که $S^*[1-2\alpha,-1]$ توابع‌ستاره‌وار از مرتبه $\alpha$ است که $0\le\alpha<1$. تابع $f$ را ستاره‌وار از مرتبه $\alpha$ گویند و با $S^*(\alpha)$ نشان داده می‌شود اگر و فقط اگر برای هر $z\in\Delta$ داشته باشیم:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha$$

قرار می‌دهیم: $S^*(0)\equiv S^*$. توجه‌کنید که $S^*(\alpha)\subset U$ و اگر $f$ ستاره‌وار از مرتبه $\alpha$ آن‌گاه $\|f\|\le 6-\alpha$.
ب) اگر

$$\varphi(z)=1+\frac{2}{\pi^2}\left(\log\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^2$$

آن‌گاه توابع ستاره‌وار سهموی بدست می‌آید که اولین بار توسط رانینگ معرفی شد. این رده را با $S_p^*$ نمایش می‌دهند [5].
اگر $\varphi(z)=\sqrt{1+z}$، آنگاه رده $S_L^*$ بدست می‌آید. این رده توسط سوکول معرفی شد [6].
د) با انتخاب $\varphi(z)=e^z$ رده $S_e^*$ بدست می‌آید که توسط مندیراتا و همکاران معرفی شد [7].
ذ) اگر $\varphi(z)=1+\sin z$، آن‌گاه رده $S_s^*$ حاصل می‌شود که توسط چو و همکاران تعریف شد [8].
ر) فرض کنید $0\le\alpha\le 1$. اگر تابع

$$\varphi(z)=1+\frac{z}{1-\alpha z^2}$$

را در تعریف قرار دهیم، توابع ستاره وار مرتبط با منحنی بوث بدست می آیند که اخیراً توسط کارگر و همکاران تعریف شده است. لازم به ذکر است که منحنی بوث یک حالت خاص از منحنی فارسی است. برای مطالعه بیشتر منبع [9] را ببینید.

ز) اگر $\varphi(z)=z+\sqrt{1+z^2}$ آن‌گاه توابع ستاره‌وار $S_q^*$ بدست می‌آید که توسط راینا و سوکول معرفی شد [10].

هدف اصلی ما در این مقاله برآورد دقیق نرم توابعی است که عضوی از رده‌های تعریف شده بالا باشند. البته ما فقط سه رده را در نظر می‌گیریم. زیرا بعضی از آنها قبلاً توسط نویسندگان دیگر بدست آمده‌اند.

اخیراً اروجی و آقالاری برای توابع ستاره وار هذلولوی نشان داده اند

$$\|f\|\le \max_{y\in R}\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{1+y^2}{y^4+6y^2+1}}+K$$
$$\le \frac{8}{\pi}+K$$

که $K=0.94774...$. منبع [11] را ببینید.

## ۲- نتایج اصلی

اولین نتیجه به‌شرح زیر است.

**قضیه ۲-۱:** فرض کنید تابع $f$ متعلق به رده $S_L^*$ باشد. آن‌گاه $\|f\|\le 1$ و برآورد دقیق است.

**برهان:** اگر $f$ متعلق به رده $S_L^*$ باشد آن‌گاه با استفاده از تعریف داریم:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\sqrt{1+z}$$

حال با استفاده از مفهوم تبعیت، تابعی شوارتز مانند $w$ موجود است به‌طوری‌که

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\sqrt{1+w(z)}$$

با گرفتن لگاریتم از رابطه (۳) و سپس مشتق‌گیری داریم:

$$\frac{1}{z}+\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{w'(z)}{2(1+w(z))}\qquad(۳)$$

دوباره از رابطه (۳) داریم:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\left(\sqrt{1+w(z)}-1\right)\qquad(۴)$$

باجایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۴) داریم:

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}$$
$$=\frac{1}{z}\left(\sqrt{1+w(z)}-1\right)-\frac{w'(z)}{2(1+w(z))}$$

لم شوارتز-پیک بیان می‌کند برای هر $z\in\Delta$ رابطه زیر برقرار است [1]:

$$|w'(z)|\le\frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2}\qquad(۵)$$

حال با استفاده از این حقیقت، نامساوی مثلثی و اندکی محاسبه رابطه زیر بدست‌می‌آید:

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|$$
$$\le\frac{1}{|z|}\left(\sqrt{1+w(z)}+1\right)+\frac{1}{2(1-|w(z)|)}|w'(z)|$$
$$\le\frac{1}{|z|}\left(\sqrt{1+w(z)}+1\right)+\frac{1+|w(z)|}{2\left(1-|z|^2\right)}$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $1-|z|^2>0$ داریم:

$$\|f\|\le\frac{1-|z|^2}{|z|}\left(\sqrt{1+w(z)}+1\right)+\frac{1+|w(z)|}{2}$$

می‌دانیم برای هر $z$ از قرص واحد داریم ([2] را ببینید): $|w(z)|\le|z|$. بنابراین

$$\|f\|\le\frac{1-|z|^2}{|z|}\left(\sqrt{1+|z|}+1\right)+\frac{1+|z|}{2}$$

اگر در رابطه اخیر $|z|$ را به‌سمت $1^-$ میل‌دهیم حکم بدست می‌آید.

برای دقیق بودن تابع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$f_0(z)=\frac{4z\exp\left(2\sqrt{1+z}-2\right)}{\left(1+\sqrt{1+z}\right)^2}$$

که در آن $z\in\Delta$. این تابع برای خیلی از مسائل مربوط

به رده $S_L^*$ یک تابع اکسترمال است. زیرا

$$\frac{zf_0'(z)}{f_0(z)}=\sqrt{1+z}$$

از طرفی داریم:

$$f_0'(z)=\frac{4\sqrt{1+z}\exp\left(2\sqrt{1+z}-2\right)}{\left(1+\sqrt{1+z}\right)^2}$$

با گرفتن مشتق لگاریتمی از رابطه اخیر داریم:

$$\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}=\frac{1}{\sqrt{1+z}}+\frac{1}{2(1+z)}-\frac{1}{1+z+\sqrt{1+z}}$$

و بنابراین

$$\left|\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}\right|\le\frac{1}{\sqrt{1+z}}+\frac{1}{2(1-|z|)}+\frac{1}{1-|z|-\sqrt{1+z}}$$

با ضرب طرفین نامساوی بالا در $1-|z|^2>0$ و میل دادن $|z|$ به‌سمت $1^-$ داریم: $\|f_0\|\le 1$ و در این‌جا برهان تمام می‌شود.

**نتیجه ۲-۱:** باتوجه با این‌که برای هر تابع $f$ متعلق به رده $S_L^*$ رابطه $\|f\|\le 1$ برقرار است لذا اعضای $S_L^*$ تک‌ارز هستند. این بدین معنی است که $S_L^*\subset U$.

**قضیه ۲-۲:** اگر تابع $f$ متعلق به رده $S_s^*$ باشد، آن‌گاه برای هر $z$ که $|z|=r<0.881374$ داریم:

$$\|f\|\le 728$$

نتیجه دقیق است.

**برهان:** فرض کنید تابع $f$ متعلق به رده $S_s^*$ باشد. با استفاده از تعریف داریم:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec 1+\sin z$$

از رابطه تبعیت اخیر نتیجه می‌شود تابع شوارتزی مانند $w$ موجود است به‌طوری‌که برای‌هر $z\in\Delta$ داریم:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+\sin(w(\mathrm{z})) \qquad (۶)$$

با گرفتن مشتق لگاریتمی از رابطه (۷) و تساوی‌زیر

$$\frac{f'(z)}{f(\mathrm{z})}-\frac{1}{z}=\frac{\sin(w(z))}{z}$$

داریم:

$$\frac{f''(z)}{f'(\mathrm{z})}=\frac{\sin(w(z))}{z}+\frac{\cos(w(z))}{1+\sin(w(z))}w'(z)$$

لذا با استفاده از نامساوی (۶) و نامساوی مثلثی

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(\mathrm{z})}\right|=\left|\frac{\sin(w(z))}{z}+\frac{\cos(w(z))}{1+\sin(w(z))}w'(z)\right| \qquad (۲)$$
$$\le\frac{|\sin(w(z))|}{|z|}+\frac{|\cos(w(z))|}{1-|\sin(w(z))|}|w'(z)|$$

حال برای بدست آوردن کوچکترین کران دقیق بالای عبارت سمت راست رابطه اخیر، فرض می‌کنیم $w(z)=Re^{i\theta}$ که $-\pi\le\theta\le\pi$. از این‌که $|w(z)|\le|z|$ بنابراین $R\le r$ که در آن $|z|=r$ و $0<r<1$. فرض‌کنید $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$ به‌طوری‌که $x,y\in[-1,1]$. داریم:

$$\sin\left(w(z)\right)=\sin\left(Re^{i\theta}\right)=\sin\left(Rx+iRy\right)$$
$$=\sin\left(Rx\right)\cosh\left(Ry\right)+i\cos\left(Rx\right)\sinh\left(Ry\right)$$

در نتیجه

$$|\sin(w(z))|^2$$
$$=\sin^2\left(R\cos\theta\right)\cosh^2\left(R\sin\theta\right)$$
$$+\cos^2\left(R\cos\theta\right)\sinh^2\left(R\sin\theta\right)$$
$$=:\mathrm{g}(\theta)$$

داریم: $g(0)=\sin^2 R=g(\pi)$ و $g\left(\pi/2\right)=\sinh^2 R$ با اندکی محاسبه:

$$g'(\theta)$$
$$=2R\sin(\theta)\cos(\mathrm{R}\cos(\theta))\sinh^2(\mathrm{R}\sin\theta)\sin(\mathrm{R}\cos(\theta))$$

$$-2R\sin(\theta)\cos(R\cos(\theta))\sin(R\cos(\theta))\cosh^2(R\sin(\theta))$$
$$+2R\cos(\theta)\cos^2(R\cos(\theta))\sinh(R\sin(\theta))\cosh(R\sin(\theta))$$
$$R\cos(\theta)\sinh(R\sin(\theta))\sin^2(R\cos(\theta))\cosh(R\sin(\theta))$$

لذا تابع $g'(\theta)$ دارای پنج ریشه $0$، $\pm\pi/2$ و $\pm\pi$ در بازه $[-\pi,\pi]$ است. ازطرفی چون تابع $g(\theta)$ فرد است لذا کافی‌است ریشه‌هایی را درنظر بگیریم که در بازه $[0,\pi]$ هستند. بنابراین

$$\max\{g(0),g(\pi/2),g(\pi)\}=g(\pi/2)=\sinh^2 R$$

از طرفی

$$|\sin(w(z))|^2\le\sinh^2 R\Rightarrow|\sin(w(z))|\le\sinh R$$

از اینکه $R\le r$ و $\sinh$ تابعی صعودی است درنتیجه:

$$|\sin(w(z))|\le\sinh r \tag{۸}$$

که $0<r<1$. با برهانی مشابه بالا داریم:

$$|\cos(w(z))|\le\cosh R\le\cosh r \tag{۹}$$

حال از روابط (۶) و (۸)–(۱۰) داریم:

$$\|f\|\le(1-r^2)\frac{\sinh r}{r}+\frac{\cosh r}{1-\sinh r}.(1-R^2)$$
$$\le(1-r^2)\frac{\sinh r}{r}+\frac{\cosh r}{1-\sinh r}$$

از طرفی

$$(1-r^2)\frac{\sinh r}{r}+\frac{\cosh r}{1-\sinh r}>0$$

هرگاه $0<r<0.881374$. حال اگر فرض‌کنیم $r\to 0.881374^-$

آن‌گاه حکم بدست می‌آید. برای دقیق بودن حکم، تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(z)=z\exp\left(\int_0^z\frac{\sin t}{t}dt\right)$$

واضح است که

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}=1+\sin z\prec 1+\sin z$$

بنابراین $F$ عضوی از رده $S_s^*$ است. همانند برهانی که در بالا آمد می‌بینیم که $\|F\|\le 728$ هرگاه $0<r<0.881374$.

در این‌جا برهان تمام می‌شود. ■

**قضیه ۲–۳:** فرض‌کنید $f\in BS^*(\alpha)$ باشد و $1/2<\alpha\le 1$. آن‌گاه

$$\|f\|\le\frac{4\alpha^2-1}{1-\alpha}$$

نامساوی دقیق است.

**برهان:** اگر $f$ متعلق به رده $BS^*(\alpha)$ باشد آن‌گاه برای هر $z\in\Delta$ رابطه تبعیت زیر برقرار است:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec 1+\frac{z}{1-\alpha z^2}$$

بنابراین با استفاده از تعریف تبعیت، تابعی شوارتز مانند $w$ موجود است به‌طوری‌که

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+\frac{w(z)}{1-\alpha w^2(z)} \tag{۱۰}$$

پس‌از اندکی محاسبه رابطه (۱۱) نتیجه‌می‌دهد:

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{w(z)}{z(1-\alpha w^2(z))}$$
$$+\left(\frac{1-2\alpha z}{1-\alpha w^2(z)+w(z)}-\frac{2\alpha w(z)}{1-\alpha w^2(z)}\right)w'(z)$$

حال با استفاده از رابطه (۶)، $|w(z)|\le|z|$، تعریف نرم $f$ و نامساوی مثلثی داریم:

$$\|f\|\le\frac{1}{\left(1-\alpha|z|^2\right)}$$
$$+\frac{1+2\alpha|z|}{1-\alpha|z|^2-|z|}+\frac{2\alpha|z|}{1-\alpha|z|^2}$$

با میل‌دادن $|z|$ به‌سمت $1^-$، داریم:

$$\|f\| \le \frac{1+2\alpha}{1-\alpha} - \frac{1+2\alpha}{\alpha} = \frac{4\alpha^2-1}{\alpha(1-\alpha)}$$

لازم‌به‌ذکر است اشاره کنیم کران بالا نامنفی است اگر و تنها اگر $1/2 < \alpha \le 1$ و دراین‌جا حکم ثابت می‌شود.
برای دقیق بودن نامساوی تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$h(z) = z\exp\left(\int_0^z \frac{1}{1-\alpha t^2}\,dt\right)$$
$$= \begin{cases} z\exp\left(\dfrac{\tanh^{-1}\left(\sqrt{\alpha}z\right)}{\sqrt{\alpha}}\right), (0<\alpha<1) \\ z\exp(z), (\alpha=0) \end{cases}$$

یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که

$$\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1 = \frac{z}{1-\alpha z^2} \qquad (۱۱)$$

حال باگرفتن مشتق لگاریتمی از طرفین رابطه (۱۲)، همانند آنچه که در برهان این قضیه آمد حکم ثابت می‌شود. در اینجا برهان تمام است.

## فهرست منابع

[1] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York (1983).

[2] J. Becker and Ch. Pommerenke. Schlichtheitskriterien und Jordangebiete. Journal für die reine und angewandte Mathematik 354:74-94 (1984).

[3] S.S. Miller and P.T. Mocanu. Differential Subordinations, Theory and Applications, Series of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 225, Marcel Dekker Inc., New York / Basel (2000).

[4] W.C. Ma, D. Minda, A unified treatment of some special classes of univalent function, in: Proceedings of the Conference on Complex Analysis (Tianjin, 1992), 157-169, Conf. Proc. Lecture Notes Anal., I, Int. Press, Cambridge, MA.

[5] F. Ronning. Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions. Proceedings of the American Mathematical Society 118:189-196 (1993).

[6] J. Sokol and J. Stankiewicz. Radius of convexity of some subclasses of strongly starlike functions, Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat. 19:101-105 (1996).

[7] R. Mendiratta, S. Nagpal and V. Ravichandran. On a subclass of strongly starlike functions associated with exponential function. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 38:365-386(2015).

[8] N.E. Cho, V. Kumar, S.S. Kumar and V. Ravichandran. Radius problems for starlike functions associated with the sine function, Bulletin of the Iranian Mathematical Society 45: 213-232 (1993).

[9] R. Kargar, A. Ebadian and J. Sokol. On Booth lemniscate and starlike functions. Analysis and Mathematical Physics 9 (2019), 143-154.

[10] R.K. Raina and J. Sokol. On coefficient estimates for a certain class of starlike functions. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 44:1427-1433 (2015).

[11] Z. Orouji and R. Aghalary. The norm estimates of pre-Schwarzian derivatives of spirallike functions and uniformly convex -spirallike functions. Sahand Communications in Mathematical Analysis 12:89-96 (2018).