

بعد متری مجاورتی گراف وابسته به ایده‌آل‌های دوجاذب

سیده بتول پژمان^۱، شیرویه پیروی^۲، علی بهتویی^{۳*}

^(۱) دانشجوی دکتری، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

^(۲) دانشیار، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

^(۳) استادیار، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۳/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۲/۰۲

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار و $\Gamma_E(R)$ گراف شمارنده صفر روی رده‌های هم‌ارزی حلقه R باشد که رأس‌های آن رده‌های هم‌ارزی شمارنده صفر ناصفر R است. دو رأس مجزای $[x]$ و $[y]$ در این گراف مجاورند اگر و تنها اگر $[x][y] = [0]$. در این مقاله ابتدا ثابت می‌کنیم که بعد متری مجاورتی $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p n)$ برابر با $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ است و بعد از آن نشان می‌دهیم $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p 2n) \cong \Gamma_E\left(\frac{R}{I}\right)$ که در آن p عددی اول، n عددی طبیعی و I ایده‌آل دوجاذب از R است که تجزیه اولیه و مینیمال آن به صورت اشتراک n ایده‌آل اولیه است. سرانجام نتیجه می‌شود که بعد متری مجاورتی $\Gamma_E\left(\frac{R}{I}\right)$ برابر با $n - 1$ است.

واژه‌های کلیدی: مجموعه کاشف، بعد متری مجاورتی، گراف رده‌های هم‌ارزی، ایده‌آل دوجاذب، شمارنده صفر.

۱- مقدمه

در این مقاله گراف‌ها متناهی، ساده و غیرجهت‌دار می‌باشند. فرض کنید $\Gamma = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E باشد. فاصله بین دو رأس $u, v \in V$ طول کوتاهترین مسیر بین آن‌ها است که آن را با $d_\Gamma(u, v)$ یا $d(u, v)$ نشان می‌دهیم. اگر Γ ناهمبند باشد و u و v در دو مولفه متمایز باشند، آن‌گاه $d(u, v) = \infty$. رأس‌های مجاور با رأس u را با

$$N(u) = \{v \in V(\Gamma) \mid d(u, v) = 1\}$$

نشان می‌دهیم و

$$\text{diam}(\Gamma) = \max\{d(u, v) : u, v \in V\}$$

قطر گراف Γ است. یال $\{u, v\}$ را با $u - v$ نمایش می‌دهیم و گوییم u با v مجاور است. دو رأس u و v را دوقلو می‌گوییم هرگاه $N(u) \setminus \{v\} = N(v) \setminus \{u\}$. فرض کنید $G = (V_1, E_1)$ و $H = (V_2, E_2)$ دو گراف باشند، الحاق دو گراف G و H را با $G \vee H$ نشان می‌دهیم که مجموعه رأس‌ها و یال‌های آن عبارتند از

$$\begin{aligned} V(G \vee H) &= V(H) \cup V(G), \\ E(G \vee H) &= E(H) \cup E(G) \\ \cup \{a - b \mid a \in V(H), b \in V(G)\}. \end{aligned}$$

همچنین اجتماع دو گراف G و H را با $G \cup H$ نشان می‌دهیم که مجموعه رأس‌های آن $V(H) \cup V(G)$ و مجموعه یال‌های آن $E(H) \cup E(G)$ است.

فرض کنید $S \subseteq V(\Gamma)$ ، زیرگراف القا شده توسط S از Γ را که رأس‌های آن مجموعه S است، با نماد $\Gamma[S]$ نشان می‌دهیم. همچنین مکمل گراف Γ را با $\bar{\Gamma}$ نمایش می‌دهیم. در این مقاله توابع $[x]$ و $\lfloor x \rfloor$ به ترتیب بزرگترین عدد نایب‌تر از x و کوچکترین عدد ناکمتر از x را مشخص می‌کنند (اصطلاحات و نمادهای این متن از [1] گرفته شده‌اند).

مفهوم بعد متری در [5] و [11] معرفی شده، که در آن مقدار این پارامتر برای درخت‌ها، دورها و گراف‌های کامل محاسبه شده است. در [4] رده‌بندی گراف‌های n رأسی با بعد متری 1، 2، $n-1$ و $n-2$ مورد مطالعه

قرار گرفته است. به عنوان مثال، نشان داده شده که بعد متری یک گراف n رأسی برابر با یک است اگر و تنها اگر گراف مورد نظر با مسیر P_n یکرخیخت باشد. همچنین، بعد متری $n-1$ است اگر و تنها اگر گراف مورد نظر با گراف کامل K_n یکرخیخت باشد. بعد متری هر گراف t -بخشی با n رأس برابر با $n-t$ است. همچنین تمام گراف‌های n رأسی با بعد متری $n-2$ نیز رده‌بندی شده است. در [8] نیز گراف‌های n رأسی با بعد متری $n-3$ مورد مطالعه قرار گرفته و یک رده‌بندی کامل از این گراف‌ها ارائه شده است (برای اطلاعات بیشتر رک [2] و [3]).

فرض کنید $W = \{w_1, \dots, w_k\}$ زیرمجموعه مرتب از رأس‌های گراف همبند Γ باشد. برای $v \in V(\Gamma)$ بردار k -تایی $r(v \mid W) = (d(v, w_1), \dots, d(v, w_k))$ نمایش متری رأس v نسبت به W است. مجموعه W را یک مجموعه کاشف^۱ برای Γ می‌گوییم هرگاه رأس‌های متمایز Γ نمایش متری متمایز نسبت به W داشته باشند به طور معادل برای هر دو رأس متمایز u و v رأس $w \in W$ موجود باشد به طوری که $d(u, w) \neq d(v, w)$ یعنی w دو رأس u و v را از هم کشف کند. اندازه کوچکترین مجموعه کاشف در Γ را بعد متری^۲ گراف Γ نامیده و آن را با $\dim_M(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه کاشفی که اندازه آن برابر با $\dim_M(\Gamma)$ باشد را یک پایه متری برای Γ می‌نامیم. پارامتر جدیدی با عنوان بعد متری مجاورتی یک گراف در [7] به صورت زیر ارائه شده است.

فرض کنید $W_a = \{w_1, \dots, w_k\}$ زیرمجموعه‌ای مرتب از رأس‌های گراف Γ باشد. برای هر رأس $v \in V(\Gamma)$ بردار k -تایی $r_2(v \mid W_a) = (a_\Gamma(v, w_1), \dots, a_\Gamma(v, w_k))$

نمایش مجاورتی v نسبت به W_a است که در آن

$$a_\Gamma(v, w_i) = \begin{cases} 0, & v = w_i \\ 1, & v - w_i \in E(\Gamma) \\ 2, & v - w_i \notin E(\Gamma). \end{cases}$$

1. Metric representation
2. Resolving set
3. Metric dimension

آن با هم مجاورند اگر و تنها اگر $[x][y] = [0]$. در [9] گراف شمارنده صفر رده‌های هم‌ارزی حلقه $\frac{R}{I}$ مطالعه شده است که در آن R حلقه‌ای جابجایی و I یک ایده‌آل دوجاذب دارای تجزیه اولیه از R است.

در این مقاله بعد متری مجاورتی گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)$ را مشخص می‌کنیم و با استفاده از آن بعد متری مجاورتی گراف $\Gamma_E(\frac{R}{I})$ را که در آن I یک ایده‌آل دوجاذب است، به دست می‌آوریم.

قضیه ۱-۱: ([7]) اگر Γ یک گراف همبند باشد، آن‌گاه $\dim_M(\Gamma) \leq \dim_a(\Gamma)$.

قضیه ۱-۲: ([7]) اگر $\bar{\Gamma}$ مکمل گراف Γ باشد، آن‌گاه $\dim_a(\Gamma) = \dim_a(\bar{\Gamma})$.

قضیه ۱-۳: ([7]) اگر Γ یک گراف همبند باشد، آن‌گاه
الف) $\dim_M(\Gamma \vee K_1) \leq \dim_a(\Gamma) + 1$
ب) $\dim_a(\Gamma) \leq \dim_M(\Gamma \vee K_1)$

هم‌چنین $\dim_a(\Gamma) = \dim_M(\Gamma \vee K_1)$ اگر و تنها اگر Γ پایه مجاورتی داشته باشد که در آن هیچ رأسی نمایش مجاورتی $(1, 1, \dots, 1)$ ، نسبت به آن پایه نداشته باشد.

۲- نتایج اصلی

فرض کنید p یک عدد اول و n یک عدد طبیعی باشد. مجموعه شمارنده‌های صفر \mathbb{Z}_p^n برابر با $p\mathbb{Z}_p^n$ است. با توجه به لم ۲-۶ از مرجع [13] مشاهده می‌شود که اگر a و p نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه $\text{Ann}_{\mathbb{Z}_p^n}(p^i) = \text{Ann}_{\mathbb{Z}_p^n}(ap^i)$ بنابراین،
 $V(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)) = \{[p], [p^2], \dots, [p^{n-1}]\}$

و در $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)$ دو رأس $[p^i]$ و $[p^j]$ با هم مجاور هستند اگر و تنها اگر $i + j \geq n$. به‌خصوص، رأس $[p]$ فقط با رأس $[p^{n-1}]$ مجاور است. از آنجا که رأس $[p^{n-1}]$ با همه رأس‌های دیگر مجاور است، بنابراین، قطر $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)$ برابر با ۲ است. پس بعد متری $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)$ با بعد متری مجاورتی آن برابر است. یعنی

مجموعه W_a را یک مجموعه کاشف مجاورتی^۱ برای Γ می‌گوییم، هرگاه رأس‌های متمایز Γ نمایش مجاورتی متمایزی نسبت به W_a داشته باشند. اندازه کوچکترین مجموعه کاشف مجاورتی در Γ را بعد متری مجاورتی گراف می‌گوییم و با $\dim_a(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. هر مجموعه کاشف مجاورتی که اندازه آن برابر با $\dim_a(\Gamma)$ باشد را یک پایه مجاورتی می‌نامیم. به آسانی می‌توان دید که اگر قطر گراف Γ برابر با ۲ باشد، آن‌گاه $\dim_M(\Gamma) = \dim_a(\Gamma)$.

ایده‌آل سره I از حلقه جابجایی R را دوجاذب^۲ می‌گوییم هرگاه برای هر $a, b, c \in R$ از $abc \in I$ نتیجه شود $ab \in I$ یا $bc \in I$ یا $ac \in I$ رادیکال I نیز به صورت $r(I) = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}, r^n \in I\}$ تعریف می‌شود. مجموعه شمارنده‌های صفر R با $Z(R)$ نشان داده می‌شود و

$$Z(R) = \{r \in R \mid \exists r' \in R \setminus \{0\}, rr' = 0\}.$$

برای هر $r \in R$ ، پوچساز r در R به صورت $\text{Ann}_R(r) = \{r' \in R \mid rr' = 0\}$

تعریف می‌شود.

هم‌چنین ایده‌آل اول p از حلقه R را ایده‌آل اول وابسته به R می‌گوییم هرگاه $x \in R$ موجود باشد به طوری که $p = \text{Ann}_R(x)$ و مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به R را با $\text{Ass}(R)$ نشان می‌دهیم (برای اطلاعات بیشتر ر.ک. [10]).

فرض کنید $Z^*(R) = Z(R) \setminus \{0\}$ می‌گوییم $x \sim y$ اگر و تنها اگر $\text{Ann}_R(x) = \text{Ann}_R(y)$. به آسانی مشاهده می‌شود که \sim یک رابطه هم‌ارزی است. رده هم‌ارزی x را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم و ضرب دو رده هم‌ارزی $[x]$ و $[y]$ به صورت $[xy] = [x][y]$ تعریف می‌شود. گراف شمارنده صفر رده‌های هم‌ارزی حلقه R در [12] معرفی و با نماد $\Gamma_E(R)$ نمایش داده شده است که رأس‌های آن مجموعه رده‌های هم‌ارزی اعضای $Z^*(R)$ است و دو رأس متمایز $[x]$ و $[y]$ در

1. Adjacency resolving set
2. 2-absorbing

$$N\left(\left[p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1}\right]\right) = N\left(\left[p^{\frac{n}{2}}\right]\right) = \{[p^{\frac{n}{2}+1}], [p^{\frac{n}{2}+2}], \dots, [p^{n-2}], [p^{n-1}]\}$$

در این حالت این دو رأس دوقلو هستند ولی مجاور نیستند. □

لم ۲-۲: اگر $n \geq 3$ یک عدد صحیح باشد، آن گاه $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^n})} \cong K_1 \cup \Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})$.

اثبات: برای هر $1 \leq i \leq n-1$ و هر $1 \leq j \leq n-2$ قرار دهید $x_i = [p^i]$ و $y_j = [p^j]$ که در آن x_i یکی از رأس‌های گراف $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^n})}$ و y_j یکی از رأس‌های گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})$ است و x رأس K_1 است. تابع $F: \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \rightarrow \{y_1, \dots, y_{n-2}, x\}$ را با ضابطه

$$F(x_i) = \begin{cases} y_{n-i-1}, & 1 \leq i \leq n-2 \\ x, & i = n-1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که F دوسوئی است. ثابت می‌کنیم که F مجاورت و عدم مجاورت رأس‌ها را حفظ می‌کند. اگر دو رأس x_i و x_j در $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^n})}$ مجاور باشند، آن گاه $i + j < n$ پس

$$\begin{aligned} n - i - 1 + n - j - 1 &= 2n - 2 - (i + j) \\ &< 2n - 2 - n \\ &= n - 2 \end{aligned}$$

از این رو

$$n - i - 1 + n - j - 1 \geq n - 1$$

و در این صورت دو رأس y_{n-i-1} و y_{n-j-1} در $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})$ مجاورند.

اگر دو رأس x_i و x_j در $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^n})}$ مجاور نباشند، آن گاه $i + j \geq n$ پس

$$\begin{aligned} n - i - 1 + n - j - 1 &= 2n - 2 - (i + j) \\ &\leq 2n - 2 - n = n - 2 \end{aligned}$$

و $\dim_M(\Gamma) = \dim_a(\Gamma)$ (برای اطلاعات بیشتر ر.ک. [13]).

$$= \{[p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1}], \dots, [p^{n-2}], [p^{n-1}]\}, \\ Y = \{[p], [p^2], \dots, [p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - 2}], [p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - 1}]\}.$$

با بررسی ساده‌ای می‌توان دید که زیرگراف القایی تولید شده توسط X یک گراف کامل و زیرگراف القایی تولید شده توسط Y یک گراف تهی (فاقد یال) است. همچنین اگر n زوج باشد، رأس $[p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}]$ را می‌توان به مجموعه Y اضافه کرد و اگر n فرد باشد رأس $[p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}]$ را می‌توان به مجموعه X اضافه کرد. (برای مثال شکل ۲ که در حالت $n = 10$ رسم شده است را ملاحظه نمایید.)

همچنین برای $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - 1$ داریم $N([p^{i+1}]) \setminus N([p^i]) = \{[p^{n-(i+1)}]\}$.

بنابراین، رأس‌های $[p^i]$ و $[p^{i+1}]$ تنها توسط رأس $[p^{n-(i+1)}]$ از هم کشف می‌شوند. علاوه بر آن رأس‌های $[p^i]$ و $[p^{n-(i+1)}]$ تنها با رأس $[p^i]$ از هم کشف می‌شوند.

لم ۲-۱: در گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^n})$ دو رأس $[p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}]$ و $[p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1}]$ دوقلو هستند.

اثبات: اگر n فرد باشد همسایه‌های این دو رأس عبارتند از

$$N([p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}]) = N([p^{\frac{n-1}{2}}]) \\ = [p^{\frac{n+1}{2}}, [p^{\frac{n+3}{2}}, \dots, [p^{n-2}], [p^{n-1}]]$$

و

$$N([p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1}]) = N([p^{\frac{n+1}{2}}]) \\ = \{[p^{\frac{n-1}{2}}, [p^{\frac{n+3}{2}}, \dots, [p^{n-2}], [p^{n-1}]]$$

در این حالت این دو رأس دوقلو و مجاور هستند. اگر n زوج باشد، آن گاه

$$N([p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}]) = N([p^{\frac{n}{2}-1}]) = \{[p^{\frac{n}{2}+1}], [p^{\frac{n}{2}+2}], \dots, [p^{n-2}], [p^{n-1}]\}$$

از این رو

$$n - i - 1 + n - j - 1 < n - 1.$$

بنابراین، دو رأس y_{n-j-1} و y_{n-i-1} در $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})$ مجاور نیستند. پس F یک یکرختی بین دو گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)$ و $K_1 \cup \Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})$ است. \square

لم ۲-۳: فرض کنید $n \geq 6$ یک عدد صحیح باشد و $S = V(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})) \setminus \{[p], [p^{n-2}], [p^{n-3}]\}$ زیرمجموعه‌ای از رأس‌های گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})$ باشد. در این صورت $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})[S] \cong \Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-4})$.
اثبات: برای هر $2 \leq i \leq n-4$ و هر $1 \leq j \leq 5$ قرار دهید $x_i = [p^i]$ و $y_j = [p^j]$ که در آن x_i یکی از رأس‌های گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})[S]$ و y_j یکی از رأس‌های گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-4})$ است. تابع $F: \{x_1, \dots, x_{n-5}\} \rightarrow \{y_1, \dots, y_{n-5}\}$

را با ضابطه $F(x_i) = y_{n-i-3}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که F دوسوئی است. ثابت می‌کنیم که F مجاورت و عدم مجاورت رأس‌ها را حفظ می‌کند. اگر دو رأس x_i و x_j در گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})[S]$ مجاور باشند، آن‌گاه $i + j < n - 1$

$$\begin{aligned} n - i - 3 + n - j - 3 & < n - 1 \\ &= 2n - 6 - (i + j) \\ &> 2n - 6 - n + 1 \\ &= n - 5 \end{aligned}$$

از این رو

$$n - i - 3 + n - j - 3 \geq n - 4$$

بنابراین، دو رأس y_{n-j-3} و y_{n-i-3} در $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-4})$ مجاورند.

اگر دو رأس x_i و x_j در $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})[S]$ مجاور نباشند، آن‌گاه $i + j \geq n - 1$ و از این رو

$$\begin{aligned} n - i - 3 + n - j - 3 & > n - 1 \\ &= 2n - 6 - (i + j) \\ &\leq 2n - 6 - n + 1 \\ &= n - 5 \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود.

$$n - i - 3 + n - j - 3 < n - 4.$$

بنابراین، دو رأس y_{n-j-3} و y_{n-i-3} در $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-4})$ مجاور نیستند. پس با استفاده از F یکرختی $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})[S] \cong \Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-4})$ به دست می‌آید. \square

قضیه ۲-۴: فرض کنید $n \geq 3$ یک عدد صحیح باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \dim_M(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)) &= \dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)) \\ &= \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

اثبات: از آن جایی که قطر $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)$ برابر ۲ است پس بعد متری و بعد متری مجاورتی آن برابرند.

ابتدا نشان می‌دهیم که مجموعه $W_0 = \{[p], [p^2], \dots, [p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}]\}$ یک مجموعه کاشف برای $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)$ است. طبق لم ۲-۱ رأس‌های $[p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}]$ و $[p^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1}]$ دوقلو هستند، بنابراین، با توجه به نتیجه ۲-۴ از [6]، حداقل یکی از این رأس‌ها باید در مجموعه W_0 باشند تا این دو رأس از هم کشف شوند.

نمایش مجاورتی سایر رأس‌های $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)$ نسبت به W_0 به صورت زیر است. برای $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ داریم

$$r_2([p^{n-i}] | W_0) = \underbrace{(2, 2, \dots, 2, 1, 1, \dots, 1)}_{\vdash i-1}$$

بنابراین، هر رأس نمایش مجاورتی منحصر به فرد و متمایزی نسبت به W_0 دارد و W_0 یک مجموعه کاشف مجاورتی برای گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)$ است. پس

$$\dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)) \leq |W_0| = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor. \quad (۱)$$

اکنون نشان می‌دهیم

$$\dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)) \geq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor.$$

با توجه به شکل‌های ۲و۱ و با بررسی هر یک از گراف‌ها به آسانی می‌توان دید که در حالت $6 \leq n \leq 10$ نیز حکم برقرار است.

فرض می‌کنیم $n \geq 11$ و حکم به ازای مقادیر کمتر از n درست باشد. طبق فرض استقرا

$$\dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})) = \left\lfloor \frac{n-1-2}{2} \right\rfloor$$

$$= \begin{cases} \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor & \text{زوج } n \\ \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - 1 & \text{فرد } n \end{cases}$$

و طبق رابطه (۳)

$$\dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})) \leq \dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n))$$

بنابراین، اگر n زوج باشد آن‌گاه

$$\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \leq \dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n))$$

و در این صورت

$$\dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor.$$

برای n فرد داریم

$$\dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)) \geq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - 1.$$

بنابراین، کافی است نشان دهیم در رابطه (۳) تساوی

$$\dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})) = \dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1}) \vee K_1)$$

رخ نمی‌دهد. برای این منظور طبق قضیه ۳-۱ باید ثابت کنیم که هر پایه مجاورتی از $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})$ رأسی با نمایش مجاورتی $(1, 1, \dots, 1)$ دارد. فرض کنید W_1 یک پایه مجاورتی دلخواه برای $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})$ باشد. اگر $[p^{n-2}] \in W_1$ ، آن‌گاه در نمایش مجاورتی رأس‌های $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1}) \setminus \{[p^{n-2}]\}$ نسبت به W_1 مولفه متناظر با رأس $[p^{n-2}]$ برابر با ۲ است لذا حذف رأس $[p^{n-2}]$ تشابه یا عدم تشابه نمایش مجاورتی رأس‌ها را

طبق لم ۲-۲ یکریختی زیر برقرار است

$$\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)} \cong K_1 \cup \Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})$$

به عبارت دیگر

$$\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n) \cong K_1 \vee \overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})}. \quad (۲)$$

طبق قضیه ۳-۱ (الف) داریم

$$\dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1}) \vee K_1) \leq \dim_a(\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})}) + 1,$$

بنابراین، طبق رابطه (۲) داریم

$$\dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)) \leq \dim_a(\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})}) + 1,$$

از قضیه ۲-۱ نتیجه می‌شود که

$$\dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)) \leq \dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})) + 1.$$

از طرفی طبق قضیه ۲-۱ و قضیه ۳-۱ (ب) داریم

$$\begin{aligned} \dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})) &= \dim_a(\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})}) \\ &\leq \dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1}) \vee K_1) \\ &= \dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)). \end{aligned} \quad (۳)$$

بنابراین، در هر مرحله بعد متری مجاورتی حداکثر یک واحد افزایش می‌یابد. به استقرا ثابت می‌کنیم که

$$\dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor.$$

برای $n = 3$ داریم $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^3) \cong K_2$ که بعد متری مجاورتی آن برابر با $1 = \left\lfloor \frac{3-2}{2} \right\rfloor$ است. از این رو حکم برای حالت $n = 3$ برقرار است.

اکنون حالت $n = 4$ را در نظر بگیرید. در این حالت $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^4) \cong P_3$ که بعد متری مجاورتی مسیر P_3 برابر است با $1 = \left\lfloor \frac{4-2}{2} \right\rfloor$ و در این صورت حکم برای $n = 4$ نیز برقرار است.

در حالت $n = 5$ با توجه به شکل ۳ و با بررسی سراسر می‌توان مشاهده کرد که بعد متری مجاورتی $\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^5)$ برابر با $2 = \left\lfloor \frac{5-2}{2} \right\rfloor$ است پس حکم برای حالت $n = 5$ نیز برقرار است.

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n-6}{2} \right\rfloor &= \dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-4}})) \\ &= \dim_a(\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})}[S]) \\ &\leq |W_2| = |W_1| - 2 \\ &= \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor - 2 = \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

و این یک تناقض است. بنابراین، همان‌طور که ادعا شده بود $\{[p], [p^{n-3}]\} \not\subseteq W_1$

اکنون ثابت می‌کنیم رأس‌های $[p^2]$ و $[p^{n-4}]$ نیز نمی‌توانند همزمان در W_1 باشند. فرض کنیم چنین نباشد یعنی $\{[p^2], [p^{n-4}]\} \subseteq W_1$. از آنجا که $N([p^{n-2}]) = N([p^{n-3}]) \setminus [p]$ و $[p^{n-2}] \notin W_1$ پس حداقل یکی از رأس‌های $[p]$ یا $[p^{n-3}]$ باید در مجموعه W_1 باشند. اگر $[p^{n-3}] \in W_1$ ، آن‌گاه طبق مطالب قبل $[p] \notin W_1$. با بررسی سراسر می‌توان

دید که در $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})}$ هر یک از رأس‌های $\{[p^3], \dots, [p^{n-5}]\}$ با رأس $[p^2]$ مجاورند ولی با رأس‌های $[p^{n-4}]$ و $[p^{n-3}]$ مجاور نیستند. بنابراین، این رأس‌ها هیچکدام از رأس‌های $\{[p^3], \dots, [p^{n-5}]\}$ را از هم کشف نمی‌کنند. لذا رأس‌های موجود در $\{[p^3], \dots, [p^{n-5}]\}$ باید توسط $W_3 = W_1 \setminus \{[p^2], [p^{n-3}], [p^{n-4}]\}$ از هم کشف شوند، پس W_3 یک مجموعه کاشف مجاورتی برای $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})}[S']$ است، که در آن

$$S' = V(\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})}) \setminus \{[p], [p^2], [p^{n-2}], [p^{n-3}], [p^{n-4}]\}$$

$$\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})}[S'] \cong \Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-6}}).$$

طبق فرض استقرا

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor &= \dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-6}})) \\ &= \dim_a(\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})}[S']) \\ &\leq |W_3| = |W_1| - 3 = \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor - 3 \\ &= \left\lfloor \frac{n-9}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

بر هم نمی‌زند. بنابراین، $W_1 \setminus \{[p^{n-2}]\}$ یک مجموعه کاشف مجاورتی برای $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})} \setminus \{[p^{n-2}]\}$ با اندازه $\frac{n-5}{2}$ است که یک تناقض است زیرا طبق فرض استقرا

$$\dim_a(\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})}) = \frac{n-3}{2}.$$

از طرفی

$$\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})} \cong K_1 \cup \Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-2}})$$

و طبق فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned} \dim_a(\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-2}})) &= \frac{n-3}{2} \\ &= \dim_a(\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})}). \end{aligned}$$

ولی با حذف $[p^{n-2}]$ بعد متری مجاورتی $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})} \setminus \{[p^{n-2}]\}$ یک واحد کاهش می‌یابد و به تناقض می‌رسیم. بنابراین، $[p^{n-2}] \notin W_1$. حال نشان می‌دهیم $\{[p], [p^{n-3}]\} \not\subseteq W_1$. فرض کنید چنین نباشد یعنی $\{[p], [p^{n-3}]\} \subseteq W_1$. با بررسی سراسر می‌توان مشاهده کرد که در $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})}$ هر یک از رأس‌های $\{[p^2], \dots, [p^{n-4}]\}$ با رأس $[p]$ مجاور هستند ولی با رأس $[p^{n-3}]$ مجاور نیستند. بنابراین، رأس‌های $[p]$ و $[p^{n-3}]$ هیچکدام از رأس‌های $\{[p^2], \dots, [p^{n-4}]\}$ را از هم کشف نمی‌کنند. لذا رأس‌های موجود در $\{[p^2], [p^3], \dots, [p^{n-4}]\}$ باید توسط $W_2 = W_1 \setminus \{[p], [p^{n-3}]\}$ از هم کشف شوند، پس W_2 یک مجموعه کاشف مجاورتی برای $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})}[S]$ است، که در آن

$$S = V(\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})}) \setminus \{[p], [p^{n-2}], [p^{n-3}]\}.$$

طبق لم ۲-۳ داریم

$$\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-1}})}[S] \cong \Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{n-4}}).$$

طبق فرض استقرا

$$< \dim_a (\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)).$$

پس $\dim_a (\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)) \geq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ و لذا طبق رابطه (۱) برای هر عدد فرد n داریم

$$\dim_a (\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^n)) = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$$

و حکم ثابت می‌شود. \square

فرض کنید I ایده‌آلی دو جاذب از حلقه R ، $r(I) = P$ و همچنین $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ تجزیه اولیه و مینیمال آن باشد که برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $r(Q_i) = P_i$ در [9] گراف شمارنده صفر رده‌های هم‌ارزی حلقه $\frac{R}{I}$ مطالعه شده است و نشان داده شده که اعضای a_1, \dots, a_{n-1} و x_1, \dots, x_n در حلقه R موجودند که برای هر $1 \leq i \leq n-1$ $\bigcap_{j=1}^i Q_j = \text{Ann}_R(a_i + I)$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $P_i = \text{Ann}_R(x_i + I)$ فرض کنید $a + I$ و $b + I$ دو عضو حلقه $\frac{R}{I}$ باشند. می‌گوییم $\text{Ann}_R(a + I) = \text{Ann}_R(b + I)$ اگر و تنها اگر $a + I \sim b + I$ که در آن \sim یک رابطه هم‌ارزی است و

$$V = \{[a_{n-1} + I], \dots, [a_1 + I], [x_1 + I], \dots, [x_n + I]\}$$

همه رده‌های هم‌ارزی آن است. بنابراین، $\Gamma_E(\frac{R}{I})$ گرافی با مجموعه رأس‌های V است و دو رأس $[a + I]$ و $[b + I]$ از V مجاورند هرگاه

$$[a + I][b + I] = [0 + I].$$

قضیه ۸-۲: فرض کنید $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ تجزیه اولیه و مینیمال از ایده‌آل دو جاذب I است. در این صورت

$$\dim_a \left(\Gamma_E \left(\frac{R}{I} \right) \right) = n - 1.$$

اثبات: طبق قضیه‌های ۲-۴، ۳-۵ و نتیجه ۳-۴ از [9] برای هر $1 \leq i \leq n-1$ $a_i \in \bigcap_{j=i+1}^n Q_j \setminus P_i$ و برای هر $1 \leq t \leq n$ $x_t \in \bigcap_{j=1}^n Q_j \setminus Q_t$ $j \neq t$

و این یک تناقض است. در حالتی که $[p] \in W_1$ نیز به‌طور مشابه به تناقض می‌رسیم. بنابراین، رأس‌های $[p^2]$ و $[p^{n-4}]$ نیز نمی‌توانند همزمان در یک پایه مجاورتی $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})}$ باشند. با ادامه این روند نتیجه می‌شود که برای هر $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1-2}{2} \rfloor$ رأس‌های $[p^i]$ و $[p^{n-i-2}]$ نمی‌توانند همزمان در یک پایه مجاورتی از $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})}$ باشند.

اگر $[p] \notin W_1$ ، آن‌گاه نمایش مجاورتی رأس $[p]$ نسبت به پایه W_1 برابر با $(1, 1, \dots, 1)$ است. زیرا $[p]$ در $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})}$ با همه رأس‌های موجود در W_1 مجاور است. پس فرض می‌کنیم که $[p] \in W_1$. در این صورت طبق ادعای قبل $[p^{n-3}] \notin W_1$. از آنجا که در $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})}$ رأس $[p^2]$ فقط با رأس‌های $[p^{n-1-2}]$ و $[p^{n-2}]$ مجاور است، بنابراین، رأس $[p^2]$ در $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})}$ فقط با دو رأس $[p^{n-3}]$ و $[p^{n-2}]$ مجاور نیست. لذا نمایش مجاورتی این رأس نسبت به پایه W_1 برابر با $(1, 1, \dots, 1)$ است. پس فرض می‌کنیم $[p^2] \in W_1$ پس $[p^{n-4}] \notin W_1$ که در این صورت نمایش مجاورتی رأس $[p^3]$ نسبت به پایه W_1 برابر با $(1, 1, \dots, 1)$ است. با ادامه این روند مشاهده می‌شود که $[p^{\lfloor \frac{n-1-2}{2} \rfloor}] = [p^{\frac{n-3}{2}}] \in W_1$ و از این رو طبق ادعای قبل $[p^{\frac{n-1}{2}}] \notin W_1$. از طرفی به موجب آن که در $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})}$ رأس $[p^{\frac{n-1}{2}}]$ با رأس‌های $\{[p^{n-2}], [p^{n-3}], [p^{n-4}], \dots, [p^{\frac{n+1}{2}}]\}$

مجاور است، بنابراین، در گراف $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})}$ این رأس فقط با رأس‌های $\{[p^{n-2}], [p^{n-3}], [p^{n-4}], \dots, [p^{\frac{n+1}{2}}]\}$ مجاور نیست که هیچ یک عضو W_1 نیستند. بنابراین، نمایش مجاورتی این رأس نسبت به W_1 برابر با $(1, 1, \dots, 1)$ است.

پس در $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})}$ نمایش مجاورتی حداقل یک رأس نسبت به W_1 برابر با $(1, 1, \dots, 1)$ است. بنابراین، طبق قضیه ۱-۳ داریم

$$\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - 1 = \dim_a (\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_p^{n-1})})$$

موجودند به طوری که

$$\cap_{j=1}^i Q_j = \text{Ann}_R(a_i + I)$$

و

$$P_i = \text{Ann}_R(x_i + I).$$

همه رأس‌های $[x_1 + I], [x_2 + I], \dots, [x_n + I]$ طبق لم ۲-۱ از [10] با هم مجاورند و طبق قضیه ۵-۳ از [9] هیچکدام از رأس‌های

$$[a_1 + I], [a_2 + I], \dots, [a_n + I]$$

مجاور نیستند. هم‌چنین مشاهده می‌شود برای هر $i > j$ که در آن $i \in \{1, \dots, n\}$ و $j \in \{1, \dots, n-1\}$ داریم $x_i a_j \in I$ بنا براین، دو رأس $[x_i + I]$ و $[a_i + I]$ در حالتی که $i > j$ مجاورند.

اینک ثابت می‌کنیم که $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{2n}}) \cong \Gamma_E\left(\frac{R}{I}\right)$ تابع $F: \{t_1, \dots, t_{2n-1}\} \rightarrow \{y_1, \dots, y_{2n-1}\}$ را با ضابطه $F(t_i) = y_i$ تعریف می‌کنیم که در آن برای هر $t_i = [p^i]$ ، $1 \leq i \leq 2n-1$

$$y_i = \begin{cases} [a_{n-i} + I], & 1 \leq i \leq n-1 \\ [x_{i-n+1} + I], & n \leq i \leq 2n-1 \end{cases}$$

توجه کنید که t_i یکی از رأس‌های گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{2n}})$ و y_i یکی از رأس‌ها گراف $\Gamma_E\left(\frac{R}{I}\right)$ است.

واضح است که F دوسوئی است. اکنون ثابت می‌کنیم که F مجاورت و عدم مجاورت رأس‌ها را حفظ می‌کند.

فرض کنید دو رأس t_i و t_j در $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{2n}})$ مجاور باشند در این صورت $i + j \geq 2n$. اگر $n \leq i, j$

$2n-1$ آن‌گاه $F(t_i) = [x_{i-n+1} + I]$ و $F(t_j) = [x_{j-n+1} + I]$ که در این صورت طبق لم

۲-۱ از [12] این دو رأس مجاورند. اگر $1 \leq i \leq n-1$ و $n \leq j \leq 2n-1$ آن‌گاه $F(t_i) = [a_{n-i} + I]$ و $F(t_j) = [x_{j-n+1} + I]$ و از

$i + j \geq 2n$ نتیجه می‌شود که $j - n + 1 > n - i$.

پس رأس‌های $y_i = [a_{n-i} + I]$ و $y_j = [x_{j-n+1} + I]$ در $\Gamma_E\left(\frac{R}{I}\right)$ مجاورند.

اکنون فرض کنید دو رأس t_i و t_j در $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{2n}})$

مجاور نباشند. در این صورت $i + j < 2n$.

اگر $1 \leq i, j \leq n-1$ ، آن‌گاه $F(t_i) = [a_{n-i} + I]$ و $F(t_j) = [a_{n-j} + I]$ که در این صورت طبق

قضیه ۵-۳ از [9] این دو رأس با هم مجاور نیستند.

اگر $1 \leq i \leq n-1$ و $n \leq j \leq 2n-1$ آن‌گاه

$F(t_i) = [a_{n-i} + I]$ و $F(t_j) = [x_{j-n+1} + I]$

از آنجا که $i + j < 2n$ پس $i + j - n \leq n - i$ و از

این رو $n - i \leq j - n + 1$. بنابراین، $y_i =$

$[a_{n-i} + I]$ و $y_j = [x_{j-n+1} + I]$ در $\Gamma_E\left(\frac{R}{I}\right)$

مجاور نیستند. لذا F یکرختی است و

$$\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{2n}}) \cong \Gamma_E\left(\frac{R}{I}\right).$$

از این رو طبق قضیه ۲-۴،

$$\dim_a \left(\Gamma_E\left(\frac{R}{I}\right) \right) = \left\lfloor \frac{2n-2}{2} \right\rfloor = n-1.$$

مثال ۲-۹: در شکل ۲ گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{10}})$ رسم شده

است و $\{[p], [p^2], \dots, [p^9]\}$ مجموعه رأس‌های آن است. با یک بررسی ساده می‌توان مشاهده کرد که بعد

متری و بعد متری مجاورتی آن ۴ و $W' =$

$\{[p], [p^2], [p^3], [p^4]\}$ یک پایه متری برای آن

است. نمایش متری رأس‌های $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{10}})$ که در W'

نیستند، نسبت به W' در جدول ۱ نمایش داده شده است.

توجه کنید که هر رأس از W' در نمایش متری خود

مولفه‌ای صفر در مکان متناظر با محل همین رأس در

W' دارد و سایر رأس‌های خارج از W' مولفه صفر در

نمایش متری خود ندارند. بنابراین، برای کاشف بودن

W' کافی است رأس‌های خارج W' نمایش‌های متری

متمایزی داشته باشند.

مثال ۲-۱۰: در شکل ۳ گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{12}})$ رسم شده

است و $\{[p], [p^2], \dots, [p^{11}]\}$ مجموعه رأس‌های آن است. به آسانی می‌توان دید که بعد متری و بعد متری

مجاورتی آن ۵ است و

$$W'' = \{[p^6], [p^7], [p^8], [p^9], [p^{10}]\}$$

یک پایه متری برای گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{12}})$ است. جدول ۲

نمایش متری رأس‌های خارج W'' در این گراف نسبت به W'' را نشان می‌دهد.

۳- جداول و شکل‌ها

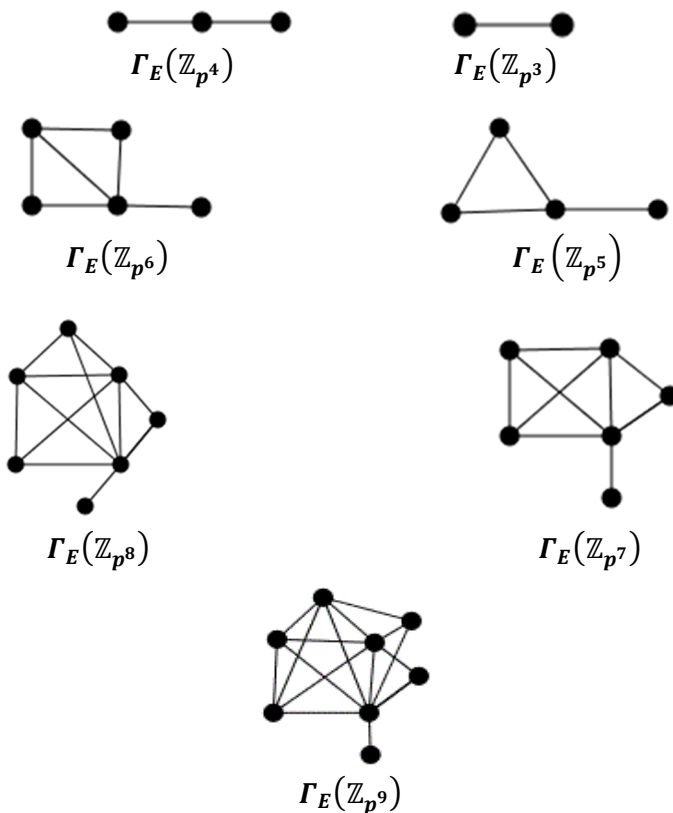
جدول ۱: نمایش مجاورتی رأس‌های گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{10}})$

$r([p^5] W')$	(2,2,2,2)
$r([p^6] W')$	(2,2,2,1)
$r([p^7] W')$	(2,2,1,1)
$r([p^8] W')$	(2,1,1,1)
$r([p^9] W')$	(1,1,1,1)

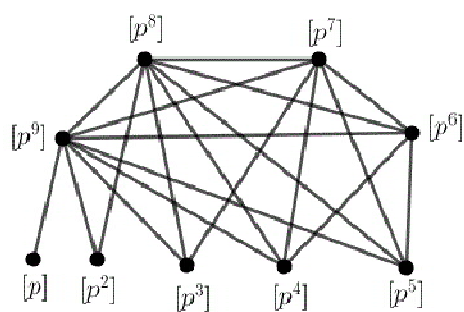
جدول ۲: نمایش مجاورتی رأس‌های گراف $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{12}})}$

$r([p] W'')$	(1,1,1,1,1)
$r([p^2] W'')$	(1,1,1,1,2)
$r([p^3] W'')$	(1,1,1,2,2)
$r([p^4] W'')$	(1,1,2,2,2)
$r([p^5] W'')$	(1,2,2,2,2)
$r([p^{11}] W'')$	(2,2,2,2,2)

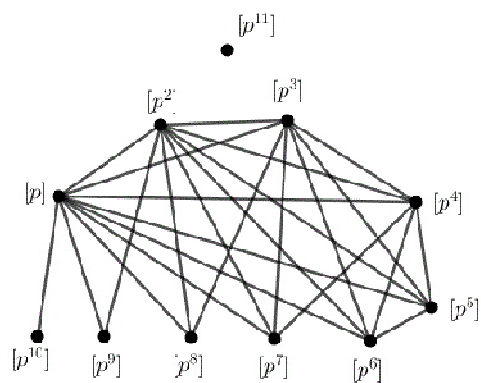
شکل ۱: گراف‌های $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^n})$ برای $n \leq 9$



شکل ۲: گراف $\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{10}})$



شکل ۳: گراف $\overline{\Gamma_E(\mathbb{Z}_{p^{12}})}$



[10] R.Y. Sharp, Steps in Commutative Algebra, second edition, London Mathematical Society Student Texts 51, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[11] P.J. Slater, Leaves of trees, Congressus Numerantium 14(1975) pp. 549-559.

[12] S. Spiroff, C. Wickham, A zero divisor graph determined by equivalence classes of zero divisors, Comm. Algebra, 39(2011), pp. 2338-2348.

[13] F. Levidiotis, S. Spiroff, Five-point zero-divisor graphs determined by equivalence classes, Involve, 4 (2011), pp. 53-64.

فهرست منابع

[1] N. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, 1974.

[2] Caceres, C. Hernando, M. Mora, I.M. Pelayo, M.L. Puertas, C. Seara and D.R. Wood, On the metric dimension of some families of graphs, Electron. Notes Discrete Math., 22(2005), pp. 129-133.

[3] Caceres, C. Hernando, M. Mora, I.M. Pelayo, M.L. Puertas, C. Seara and D.R. Wood, On the metric dimension of cartesian product of graphs, SIAM, J. Disc. Math., 2 (2007), pp. 423-441.

[4] Chartrand, L. Eroh, M.A. Johnson, and O.R. Oellermann, Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, Discrete Appl. Math., 105 (2000), pp. 99-113.

[5] F. Harary, R.A. Melter, On the Metric Dimension of a graph, Ars Combin., 2(1976), pp. 191-195.

[6] C. Hernando, M. Mora, I.M. Pelayo, C. Seara, D. R. Wood, Extremal Graph Theory for Metric Dimension and Diameter, Electron. J. Combin., 17(2010), pp. 1-28.

[7] M. Jannesari, B. Omoomi, The metric dimension of the lexicographic product of graphs, Discrete Math., 312(2012), pp. 3349-3356.

[8] Jannesari, B. Omoomi, Characterization of n -vertex graphs with metric dimension $n-3$, Math. Bohem., 139(2014), pp. 1-23.

[9] Sh. Payrovi, S. Babaei, On the 2-absorbing ideals and zero divisor graph of equivalence classes of zero divisors, Journal of Hyperstructures, 3 (2014), pp. 1-9.