

## حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم خطی و غیر خطی با استفاده از اسپلاین کششی

کریم فرجیان<sup>۱\*</sup>، نادر رفعتی ملکی<sup>۲</sup>

(<sup>۱</sup>) گروه ریاضی کاربردی، واحد بناب، دانشگاه آزاد اسلامی، بناب، ایران

(<sup>۲</sup>) گروه ریاضی کاربردی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۰۹

### چکیده

در این مقاله حل عددی دسته‌های خاصی از مسائل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوازدهم را با استفاده از اسپلاین کششی مورد بحث و بررسی قرار داده‌ایم. فرمول بندی اسپلاین ۱۵- کششی را ارائه می‌نماییم و رابطه سازگاری این گونه اسپلاین را بدست آورده‌ایم تا از این رابطه برای حل مسائل استفاده نمائیم. دسته‌هایی از روش‌های جدید با مراتب مختلف را ایجاد کردیم، همگرایی روش‌های حاصله را اثبات و کاربرد روش‌ها را روی مسائل مختلف آزمایش کرده و بدین طریق کاربرد مفید ای حاصله را در عمل نشان داده‌ایم. شرایط مرزی را برای روش‌ها فرمول بندی کرده و خطای برشی روش‌های موجود را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. با استفاده از رابطه مفیدی که از اسپلاین کششی بدست آوردیم مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم را حل کردیم، نتایج روش‌های مختلف را با روش‌های موجود محققین دیگر مقایسه کرده و رجحان و برتری روش‌های جدید را نشان داده‌ایم.

**واژه‌های کلیدی:** مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم، اسپلاین کششی، فرمول بندی، بررسی همگرایی.

۱- مقدمه

در این مقاله مساله مقدار مرزی مرتبه دوازدهم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u^{(12)}(x) = f(x, u), \quad a < x < b, \\ a, b, x \in \quad (1)$$

با شرایط مرزی

$$u^{(2m)}(a) = v_m, u^{(2m)}(b) = \bar{v}_m \quad (2)$$

که  $v_m$  و  $\bar{v}_m$  برای  $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  ضرایب حقیقی و  $u(x)$  و  $f(x, u)$  توابع پیوسته در بازه  $[a, b]$  هستند.

این نوع از مسائل مقدار مرزی مراتب بالاتر در مدل سازی از جریان ویسکوالاستیک و شاخه های دیگر از ریاضی، فیزیک و علوم مهندسی ناشی می شوند.

معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر در زمینه های زیادی به وجود می آیند برای مثال زمانی که یک لایه افقی نا محدود از سیال، از زیر حرارت داده می شود و یک میدان مغناطیسی یکنواخت نیز در سراسر سیال در همان مسیر بکار گرفته می شود در این حالت ناپایداری (بی ثباتی) شروع می شود، زمانی که بی ثباتی به عنوان همرفت عادی (معمولی) شروع شود توسط مسائل مقدار مرزی مرتبه دهم مدل سازی می شود. زمانی که بی ثباتی در حد بالاتر باشد، توسط مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم مدل سازی می شود [۱].

برخی از روش هایی که برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم توسط صدیقی و همکارانش در سالهای ۱۹۹۷ تا ۲۰۰۸، به کار برده شده، اسپلاین غیر چند جمله ای و اسپلاین های درجه دوازدهم و سیزدهم می باشد [۲-۴]. و همچنین روش هایی مانند روش تفاضلات متناهی، روش تکرار تغییرات، روش اصلاح شده آدومیان، [۵-۸] برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم به کار برده شده است. موسائی و همکارانش [۹] روش لاگرانژ بهبود یافته را برای حل مسائل مقدار مرزی

دو نقطه ای به کار گرفته اند. علیزاده [۱۰] خواص تابع مقدار ویژه را مورد مطالعه قرار داده است. در سالهای اخیر با افزایش تقاضا برای ابزار مالی و مساله قیمت گذاری قراردادهای، پژوهشگران متعددی، روشهای عددی و تحلیلی را برای حل این مسائل را مورد توجه قرار داده اند [۱۱-۱۴].

ما در این مقاله به دنبال ارائه روشی هستیم که مشکلات و موانع آن برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم کم شده و همچنین به جواب تحلیلی، همگرا باشد و الگوریتمی که تعداد عملیات لازم را بهینه نماید، می توان، از اسپلاین اسپلاین کششی استفاده کرد. و سعی داریم با استفاده از اسپلاین کششی، مسائل مقدار مرزی خطی و غیر خطی را حل کنیم و با ایجاد روش های مناسب برای تقریب شرایط مرزی همراه با مسائل مقدار مرزی، روش هایی با دقت بالا و با مراتب همگرایی بالاتر ارائه دهیم.

برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم، درصد تعریف و ایجاد روش هایی با مراتب مختلف مبتنی بر اسپلاین ۱۵- کششی خاصی هستیم که جواب  $u(x)$  این مسائل را در بازه  $[a, b]$ ، تقریب زند. لذا بازه  $[a, b]$ ، به  $n$  زیر بازه  $y$  مساوی، با استفاده از نقاط  $x_i = a + i$ ،  $i = 0, 1, \dots, n-1$  و با طول گام  $\frac{b-a}{n}$  افزایش می کنیم. برای دسترسی به این هدف تابع اسپلاین را در این مقاله به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\rho = \text{Span}\{1, x, x^2, \dots, x^{13}, \cosh(kx), \sinh(kx)\}$$

توجه شود که  $k = \frac{\theta}{h}$  می تواند حقیقی یا مختلط باشد.

در این مقاله در بخش ۲ رابطه مفید اسپلاین ۱۵- کششی را بدست می آوریم تا از این رابطه مفید برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم استفاده نماییم. در بخش ۳ فرمول بندی شرایط

بدست می آوریم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \alpha_1(u_{i-7} + u_{i+7}) + \alpha_2(u_{i-6} + u_{i+6}) + \\ & \alpha_3(u_{i-5} + u_{i+5}) + \alpha_4(u_{i-4} + u_{i+4}) + \\ & \alpha_5(u_{i-3} + u_{i+3}) + \alpha_6(u_{i-2} + u_{i+2}) + \\ & \alpha_7(u_{i-1} + u_{i+1}) + \alpha_8 u_i = \\ & \quad {}^{12}(\beta_1(v_{i-7} + v_{i+7}) + \beta_2(v_{i-6} + \\ & v_{i+6}) + \\ & \beta_3(v_{i-5} + v_{i+5}) + \beta_4(v_{i-4} + v_{i+4}) + \\ & \beta_5(v_{i-3} + v_{i+3}) + \beta_6(v_{i-2} + v_{i+2}) + \\ & \beta_7(v_{i-1} + v_{i+1}) + \beta_8 v_i), \\ & i = 6, 7, \dots, n \quad (5) \end{aligned}$$

بطوریکه

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{-1}{\gamma} (13! \theta^{12} (\theta \sinh(\theta))), \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\gamma} (2(13!) \theta^{12} (6\theta + \theta \cosh(\theta) \\ & 7 \sinh(\theta))), \\ \alpha_3 &= \frac{-1}{\gamma} (13! \theta^{12} (67\theta + 24\theta \cosh(\theta) \\ & 91 \sinh(\theta))), \\ \alpha_4 &= \\ & \frac{1}{\gamma} (4(13!) \theta^{12} (58\theta + 33\theta \cosh(\theta) \\ & 91 \sinh(\theta))), \\ \alpha_5 &= \frac{-1}{\gamma} (11(13!) \theta^{12} (51\theta + \\ & 40\theta \cosh(\theta) \quad 91 \sinh(\theta))), \\ \alpha_6 &= \frac{1}{\gamma} (22(13!) \theta^{12} (46\theta + \\ & 45\theta \cosh(\theta) \quad 91 \sinh(\theta))), \\ \alpha_7 &= \frac{-1}{\gamma} (33(13!) \theta^{12} (43\theta + \\ & 48\theta \cosh(\theta) \quad 91 \sinh(\theta))), \\ \alpha_8 &= \frac{1}{\gamma} (264(13!) \theta^{12} (6\theta + \\ & 7\theta \cosh(\theta) \quad 13 \sinh(\theta))), \\ \gamma &= (156\theta(11! + 165(8!) \theta^2 + \\ & 332640\theta^4 + \\ & 7920\theta^6 + 110\theta^8 + \theta^{10}) + (13! + \\ & \theta^{12}) \sinh(\theta)), \\ \beta_1 &= \frac{1}{\gamma} (13! \theta + 26(11!) \theta^3 + \\ & 143(9!) \theta^5 + \\ & 1716(6!) \theta^7 + 17160\theta^9 + 156\theta^{11} + \\ & \theta^{13} \quad 13! \sinh(\theta)), \\ \beta_2 &= \frac{1}{\gamma} (2(\theta(13! + 26(11!) \theta^2 + \\ & 143(9!) \theta^4 + 1235520\theta^6 + 17160\theta^8 + \\ & 156\theta^{10} + \theta^{12}) \cosh(\theta) \quad 3(2(13!) \theta \end{aligned}$$

مرزی و در بخش ۴ خطای برشی بدست می آید و در بخش ۵ آنالیز همگرایی و سرانجام در بخش ۶ نتایج عددی بحث و بررسی می گردد.

## ۲- اسپلاین ۱۵- کششی

تابع اسپلاین ۱۵- کششی،  $S_i(x)$ ، را برای درونمایی تابع  $u(x)$  در زیر بازه ی  $[x_i, x_{i+1}]$  و  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$S_i(x) = \sum_{j=0}^{13} a_{ij} (x - x_i)^j + b_i \cosh k(x - x_i) + c_i \sinh k(x - x_i), \quad (3)$$

که برای  $a_{ij}$ ،  $j = 0, 1, 2, \dots, 13$  و  $c_i, b_i$  ضرایب نامعین و حقیقی هستند و با نمایش روابط ذیل برای اسپلاین ۱۵- کششی، داریم:

$$\begin{aligned} S_i(x_l) &= u_l, S_i^{(2)}(x_l) = m_l, S_i^{(4)}(x_l) = \\ & M_l, \\ S_i^{(6)}(x_l) &= z_l, S_i^{(8)}(x_l) = \\ & V_l, S_i^{(10)}(x_l) = n_l, \\ S_i^{(12)}(x_l) &= v_l, S_i^{(14)}(x_l) = L_l, \\ l &= i, i+1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (4) \end{aligned}$$

چون می خواهیم رابطه ای بین مشتق مرتبه دوازدهم اسپلاین کششی  $v_i$  و تابع درونیاب  $u_i$  را بدست آوریم به همین دلیل از مشتقات مراتب دوم، چهارم، ششم، هشتم، دهم، دوازدهم و چهاردهم در شرایط (۴) استفاده می کنیم. با استفاده از شرایط (۴)، ضرایب (۳) را می توان بدست آورد و با استفاده از پیوستگی مشتق مرتبه اول، سوم، پنجم، هفتم، نهم، یازدهم و سیزدهم یعنی:

$$\begin{aligned} S_{i-1}^{(\lambda)}(x_i) &= S_i^{(\lambda)}(x_i) \\ \lambda &= 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \end{aligned}$$

رابطه نهایی بین مشتق مرتبه دوازدهم  $v_i$  و مقادیر تابع درونیابی شده  $u_i$  که  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} & 112467212\theta^6 + 299828171\theta^8))) \\ & 8\theta(66(13!) + \theta^2(1014(11!) + \\ & \theta^2(14443(9!) + 740076480\theta^2 \\ & 93024360\theta^4 + 20130396\theta^6 + \\ & 125468459\theta^8)))\cosh(\theta) \\ & 1001(13!\sinh(\theta))), \\ & \beta_8 = \frac{1}{\gamma}(24(\theta(66(13!) + \\ & \theta^2(1014(11!) + \theta^2(14443(9!) + \\ & 740076480\theta^2 + 93024360\theta^4 \\ & 20130396\theta^6 + 125468459\theta^8))) \\ & 7\theta(11(13!) + \theta^2(182(11!) + \\ & \theta^2(3003(9!) + 206331840\theta^2 + \\ & 53213160\theta^4 + 22234212\theta^6 + \\ & 27085381\theta^8)))\cosh(\theta) + \\ & 143(13!\sinh(\theta))). \end{aligned}$$

برای رابطه ی (۵)، اگر  $k \rightarrow 0$ ، از طرفی  $\theta = k$  بنابراین  $\theta \rightarrow 0$  آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8) \rightarrow \\ & (1, 8, 19, 32, 319, 968, 1749, 2112), \\ & (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8) \rightarrow \\ & \frac{1}{35(13!)}(1, 32752, 13824739, 848090912, \\ & 15041229521, 102776998928, \\ & 311387598411, 447538817472), \end{aligned}$$

با این مقادیر، ضرایب رابطه (۵) خواهد بود که از اسپلین چند جمله ای درجه پانزدهم بدست خواهد آمد. برای گسسته سازی معادله (۱) با رابطه اسپلین (۵)، بازه  $[a, b]$  را به تعداد  $n + 1$  نقطه،  $x_i = a + ih$  که  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  با طول گام  $h = \frac{b-a}{n}$  که به فاصله مساوی از هم قرار دارند افراز می کنیم، فرض می کنیم:

$$\begin{aligned} v_i &= u_i^{(12)} = f(x_i, u_i) = f_i \equiv \\ & f(x_i, u(x_i)) \end{aligned}$$

و با جایگذاری در رابطه (۵) از اسپلین ۱۵- کششی، (۱۳) معادله،  $(n + 1)$  مجهولی  $u_i$  که  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  به صورت زیر را بدست می آید:

$$\begin{aligned} & 26(11!)\theta^3 + 429(9!)\theta^5 + \\ & 23474880\theta^7 + \\ & 1424280\theta^9 + 52884\theta^{11} + 1363\theta^{13} + \\ & 364(11!\sinh(\theta))), \\ & \beta_3 = \frac{1}{\gamma}((\theta(67(13!) + 182(11!)\theta^2 \\ & 16159(9!)\theta^4 + 601698240\theta^6 + \\ & 216336120\theta^8 + 23176452\theta^{10} + \\ & 1479727\theta^{12}) + 12\theta(2(13!) \\ & 26(11!)\theta^2 + 429(9!)\theta^4 + \\ & 23474880\theta^6 + \\ & 1424280\theta^8 + 52884\theta^{10} + \\ & 1363\theta^{12})\cosh(\theta) + 91(13!\sinh(\theta))), \\ & \beta_4 = \frac{1}{\gamma}(4(\theta(58(13!) + 286(11!)\theta^2 + \\ & 6721(9!)\theta^4 + 875983680\theta^6 + \\ & 142891320\theta^8 + 74189076\theta^{10} + \\ & 11385407\theta^{12}) + 9\theta(572(11!) + \\ & 345945600\theta^2 + 328648320\theta^4 + \\ & 33359040\theta^6 + 12017720\theta^8 + \\ & 1287572\theta^{10} + 82207\theta^{12})\cosh(\theta) + \\ & 91(13!\sinh(\theta))), \\ & \beta_5 = \\ & \frac{1}{\gamma}((3\theta(187(13!) + \theta^2(1898(11!) + \\ & \theta^2(6721(9!) + 1095906240\theta^2 \\ & 563414280\theta^4 + 292881732\theta^6 + \\ & 141587087\theta^8))) \\ & 100\theta(27398891520 \\ & + \theta^2(26(11!) + \theta^2(176432256 \\ & 72895680\theta^2 + 11260392\theta^4 + \\ & 5928780\theta^6 + 910669\theta^8)))\cosh(\theta) \\ & 1001(13!\sinh(\theta))), \\ & \beta_6 = \\ & \frac{1}{\gamma}(2(\theta(506(13!) + \theta^2(6734(11!) + \\ & \theta^2(74503(9!) + 2618066880\theta^2 \\ & 276636360\theta^4 + 27437124\theta^6 + \\ & 775577479\theta^8))) + 15\theta(33(13!) + \\ & \theta^2(390(11!) + \theta^2(882161280 + \\ & 179150400\theta^2 + 127104120\theta^4 + \\ & 57031260\theta^6 + \\ & 28218769\theta^8)))\cosh(\theta) + \\ & 1001(13!\sinh(\theta))), \\ & \beta_7 = \frac{1}{\gamma}(3(3\theta(24596(11!) + \\ & \theta^2(93751257600 + \\ & \theta^2(288717(8!) \\ & 1627179840\theta^2 + 284815960\theta^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}, u_{i+1}) + \alpha_8 u_i + \\ \beta_8 {}^{12}f(x_i, u_i) = 0, \\ i = 7, 8, \dots, (n-7). \end{aligned} \quad (۶)$$

### ۳- فرمول بندی مرزی

سیستم (۶) شامل (13) معادله و (n + 1) مجهول است، برای بدست آوردن جواب، برای این سیستم، نیاز به چهارده معادله دیگر داریم، بنابه شرایط مرزی (۲)، دو معادله  $u(a) = v_0$  و  $u(b) = \bar{v}_0$  هستند و دوازده معادله دیگر را با استفاده از (۲)، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} \alpha_1(u_{i-7} + u_{i+7}) + \\ \beta_1 {}^{12}f(x_{i-7}, u_{i-7}) + \\ f(x_{i+7}, u_{i+7}) + \alpha_2(u_{i-6} + u_{i+6}) + \\ \beta_2 {}^{12}f(x_{i-6}, u_{i-6}) + f(x_{i+6}, u_{i+6}) + \\ \alpha_3(u_{i-5} + u_{i+5}) + \\ \beta_3 {}^{12}f(x_{i-5}, u_{i-5}) + \\ f(x_{i+5}, u_{i+5}) + \alpha_4(u_{i-4} + u_{i+4}) + \\ \beta_4 {}^{12}f(x_{i-4}, u_{i-4}) + f(x_{i+4}, u_{i+4}) + \\ \alpha_5(u_{i-3} + u_{i+3}) + \\ \beta_5 {}^{12}f(x_{i-3}, u_{i-3}) + \\ f(x_{i+3}, u_{i+3}) + \alpha_6(u_{i-2} + u_{i+2}) + \\ \beta_6 {}^{12}f(x_{i-2}, u_{i-2}) + f(x_{i+2}, u_{i+2}) + \\ \alpha_7(u_{i-1} + u_{i+1}) + \\ \beta_7 {}^{12}f(x_{i-1}, u_{i-1}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (i) \sum_{i=0}^8 \gamma_{1,i} u_i + \sum_{i=1}^5 {}^{2i} \tilde{a}_{1,i} u_0^{(2i)} &= {}^{12} \sum_{i=0}^{17} \delta_{1,i} u_i^{(12)} + t_1, \\ (ii) \sum_{i=0}^9 \gamma_{2,i} u_i + \sum_{i=1}^5 {}^{2i} \tilde{a}_{2,i} u_0^{(2i)} &= {}^{12} \sum_{i=0}^{17} \delta_{2,i} u_i^{(12)} + t_2, \\ (iii) \sum_{i=0}^{10} \gamma_{3,i} u_i + \sum_{i=1}^5 {}^{2i} \tilde{a}_{3,i} u_0^{(2i)} &= {}^{12} \sum_{i=0}^{17} \delta_{3,i} u_i^{(12)} + t_3, \\ (iv) \sum_{i=0}^{11} \gamma_{4,i} u_i + \sum_{i=1}^5 {}^{2i} \tilde{a}_{4,i} u_0^{(2i)} &= {}^{12} \sum_{i=0}^{17} \delta_{4,i} u_i^{(12)} + t_4, \\ (v) \sum_{i=0}^{12} \gamma_{5,i} u_i + \sum_{i=1}^5 {}^{2i} \tilde{a}_{5,i} u_0^{(2i)} &= {}^{12} \sum_{i=0}^{17} \delta_{5,i} u_i^{(12)} + t_5, \\ (vi) \sum_{i=0}^{13} \gamma_{6,i} u_i + \sum_{i=1}^5 {}^{2i} \tilde{a}_{6,i} u_0^{(2i)} &= {}^{12} \sum_{i=0}^{17} \delta_{6,i} u_i^{(12)} + t_6, \\ (vii) \sum_{i=0}^{13} \gamma_{6,i} u_{n-i} + \sum_{i=1}^5 {}^{2i} \tilde{a}_{6,i} u_n^{(2i)} &= {}^{12} \sum_{i=0}^{17} \delta_{6,i} u_{n-i}^{(12)} + t_{n-6}, \\ (viii) \sum_{i=0}^{12} \gamma_{5,i} u_{n-i} + \sum_{i=1}^5 {}^{2i} \tilde{a}_{5,i} u_n^{(2i)} &= {}^{12} \sum_{i=0}^{17} \delta_{5,i} u_{n-i}^{(12)} + t_{n-5}, \\ (ix) \sum_{i=0}^{11} \gamma_{4,i} u_{n-i} + \sum_{i=1}^5 {}^{2i} \tilde{a}_{4,i} u_n^{(2i)} &= {}^{12} \sum_{i=0}^{17} \delta_{4,i} u_{n-i}^{(12)} + t_{n-4}, \\ (x) \sum_{i=0}^{10} \gamma_{3,i} u_{n-i} + \sum_{i=1}^5 {}^{2i} \tilde{a}_{3,i} u_n^{(2i)} &= {}^{12} \sum_{i=0}^{17} \delta_{3,i} u_{n-i}^{(12)} + t_{n-3}, \\ (xi) \sum_{i=0}^9 \gamma_{2,i} u_{n-i} + \sum_{i=1}^5 {}^{2i} \tilde{a}_{2,i} u_n^{(2i)} &= {}^{12} \sum_{i=0}^{17} \delta_{2,i} u_{n-i}^{(12)} + t_{n-2}, \\ (xii) \sum_{i=0}^8 \gamma_{1,i} u_{n-i} + \sum_{i=1}^5 {}^{2i} \tilde{a}_{1,i} u_n^{(2i)} &= {}^{12} \sum_{i=0}^{17} \delta_{1,i} u_{n-i}^{(12)} + t_{n-1}, \end{aligned} \quad (۷)$$

(د) اگر در سیستم (۸) به جای  $k = 6, j = 13$  و  
 $\gamma_{6,11} = 19, \gamma_{6,12} = 8, \gamma_{6,13} =$   
 $\gamma_{6,7} = 1749, \gamma_{6,8} = 1, \gamma_{6,10} = 32$   
 $\gamma_{6,9} = 319$  قرار دهیم، ضرایب مجهول  
 در معادله های (vi), (vii) در (۷) بدست می آید.

#### ۴ - خطای برشی

برای بدست آوردن کلاسی از روش ها، خطای برشی  
 رابطه (۵) را با استفاده از سری تیلور حول  $x_i$  بسط  
 می دهیم که بعداز بسط دادن و ساده کردن خواهیم  
 داشت:

$$T_i = \sigma_0 u_i + \sigma_1^2 u_i^{(2)} + \frac{1}{12} \sigma_2^4 u_i^{(4)} + \frac{2}{6!} \sigma_3^6 u_i^{(6)} + \frac{2}{8!} \sigma_4^8 u_i^{(8)} + \frac{2}{10!} \sigma_5^{10} u_i^{(10)} + \left(\frac{2}{12!} \sigma_6 + \rho_0\right) u_i^{(12)} + \left(\frac{2}{14!} \sigma_7 + \rho_1\right) u_i^{(14)} + \left(\frac{2}{16!} \sigma_8 + \frac{1}{12} \rho_2\right) u_i^{(16)} + \left(\frac{2}{18!} \sigma_9 + \frac{2}{6!} \rho_3\right) u_i^{(18)} + \left(\frac{2}{20!} \sigma_{10} + \frac{2}{8!} \rho_4\right) u_i^{(20)} + \left(\frac{2}{22!} \sigma_{11} + \frac{2}{10!} \rho_5\right) u_i^{(22)} + \left(\frac{2}{24!} \sigma_{12} + \frac{2}{12!} \rho_6\right) u_i^{(24)} + \left(\frac{2}{26!} \sigma_{13} + \frac{2}{14!} \rho_7\right) u_i^{(26)} + \left(\frac{2}{28!} \sigma_{14} + \frac{2}{16!} \rho_8\right) u_i^{(28)} + \left(\frac{2}{30!} \sigma_{15} + \frac{2}{18!} \rho_9\right) u_i^{(30)} + \dots$$

$$i = 7, 8, \dots, n \quad (9)$$

که

$$\sigma_0 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) + \alpha_8,$$

$$\sigma_i = 7^{2i} \alpha_1 + 6^{2i} \alpha_2 + 5^{2i} \alpha_3 + 4^{2i} \alpha_4 + 3^{2i} \alpha_5 + 2^{2i} \alpha_6 + \alpha_7, \quad i = 1, 2, \dots, 15,$$

$$\rho_0 = 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7) + \beta_8,$$

اگر با سری تیلور معادله های (۷) را بسط دهیم، به کمک الگوریتم زیر و نرم افزار مسمتیکا می توان ضرایب مجهول در رابطه (۷) را به بدست آورد. بنابراین:

$$\sum_{i=0}^j \gamma_{k,i} = 0,$$

$$\frac{1}{(2m-1)!} \left( \sum_{i=1}^j i^{2m-1} \gamma_{k,i} \right) = 0,$$

$$\frac{1}{(2n)!} \left( \sum_{i=1}^j i^{2n} \gamma_{k,i} \right) + \tilde{a}_{k,n} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{12!} \left( \sum_{i=1}^j i^{12} \gamma_{k,i} \right) = \sum_{i=0}^{17} \delta_{k,i},$$

$$\frac{1}{l!} \left( \sum_{i=1}^j i^l \gamma_{k,i} \right) = \frac{1}{r!} \left( \sum_{i=0}^{17} i^r \delta_{k,i} \right).$$

که  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  ،  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$   
 $r = 1, 2, \dots, 17, l = 12 + r$

(الف) اگر در سیستم (۸) به جای  $k = 1, j = 8$  و  
 $\gamma_{1,7} = 8, \gamma_{1,8} = 1$  قرار دهیم، ضرایب مجهول  
 در معادله های (i), (xii) در (۷) بدست می آید.

(ب) اگر در سیستم (۸) به جای  $k = 2, j = 9$  و  
 $\gamma_{2,7} = 19, \gamma_{2,8} = 8, \gamma_{2,9} = 1$  قرار دهیم،  
 ضرایب مجهول در معادله های (ii), (xi) در (۷)  
 بدست می آید.

(ج) اگر در سیستم (۸) به جای  $k = 3, j = 10$  و  
 $\gamma_{3,8} = 19, \gamma_{3,9} = 8, \gamma_{3,10} = 1$   
 $\gamma_{3,7} = 32$  قرار دهیم، ضرایب مجهول در معادله  
 های (iii), (x) در (۷) بدست می آید.

(ح) اگر در سیستم (۸) به جای  $k = 4, j = 11$  و  
 $\gamma_{4,9} = 19, \gamma_{4,10} = 8, \gamma_{4,11} = 1$   
 $\gamma_{4,7} = 319, \gamma_{4,8} = 32$  قرار دهیم، ضرایب  
 مجهول در معادله های (iv), (ix) در (۷) بدست  
 می آید.

(خ) اگر در سیستم (۸) به جای  $k = 5, j = 12$  و  
 $\gamma_{5,10} = 19, \gamma_{5,11} = 8, \gamma_{5,12} = 1$   
 $\gamma_{5,7} = 968, \gamma_{5,8} = 319, \gamma_{5,9} = 32$  قرار  
 دهیم، ضرایب مجهول در معادله های (v), (viii)  
 در (۷) بدست می آید.

خطای برشی  $T_i = \frac{1}{120} 16u_i^{(16)} + O(18)$  خواهیم داشت.

$$q_j = 7^{2j}\beta_1 + 6^{2j}\beta_2 + 5^{2j}\beta_3 + 4^{2j}\beta_4 + 3^{2j}\beta_5 + 2^{2j}\beta_6 + \beta_7, \quad j = 1, 2, \dots, 9,$$

کلاسی از روشها:

۳-۴ روش مرتبه ششم  $(\chi_3)$ :

۱-۴ روش مرتبه دوم  $(\chi_1)$ :

اگر

اگر

$$\alpha_1 = \frac{1}{41}, \alpha_2 = \frac{386}{779}, \alpha_3 = \frac{3169}{779},$$

$$\alpha_4 = \frac{14836}{779}, \alpha_5 = \frac{45419}{779}, \alpha_6 = \frac{97438}{779},$$

$$\alpha_7 = \frac{152097}{779}, \alpha_8 = \frac{176088}{779}, \beta_1 = 0,$$

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0, \beta_7 = \frac{1}{19}, \beta_8 = \frac{2}{41}$$

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1}{12}, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = \frac{11}{2},$$

$$\alpha_5 = \frac{55}{3}, \alpha_6 = \frac{165}{4}, \alpha_7 = 66, \alpha_8 = 77,$$

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_4 = 0, \beta_5 = 0,$$

$$\beta_6 = 0, \beta_7 = 0, \beta_8 = \frac{1}{12}$$

در نظر بگیریم، ضرایب  $2, 4, \dots, 12$  حذف می شوند و لذا خطای برشی روش  $T_i = O(14)$  می شود و از طرفی چون مساله مقدار مرزی از مرتبه دوازدهم است (در سیستم (۶)، مشتق مرتبه دوازدهم یعنی  $u_i^{(12)}$  را تقریب می زنیم) بنابراین نتیجه می گیریم که دقت روش  $O(2)$  می شود و روشی از مرتبه دوم، با خطای برشی  $T_i = \frac{1}{24} 14u_i^{(14)} + O(16)$  خواهیم داشت.

در نظر بگیریم، ضرایب  $2, 4, \dots, 16$  حذف می شوند و لذا خطای برشی روش  $T_i = O(18)$  می شود، بنابراین نتیجه می گیریم که دقت روش  $O(6)$  می شود و روشی از مرتبه ششم، با خطای برشی  $T_i = \frac{5021h^{18}u_i^{(18)}}{3926160} + O(20)$  خواهیم داشت.

۴-۴ روش مرتبه هشتم  $(\chi_4)$ :

۲-۴ روش مرتبه چهارم  $(\chi_2)$ :

اگر

اگر

$$\alpha_1 = \frac{1}{5021}, \alpha_2 = \frac{2093}{321344}, \alpha_3 = \frac{5047}{80336},$$

$$\alpha_4 = \frac{51149}{160672}, \alpha_5 = \frac{81851}{80336}, \alpha_6 = \frac{720643}{321344},$$

$$\alpha_7 = \frac{142527}{40168}, \alpha_8 = \frac{331419}{80336}, \beta_1 = 0,$$

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0, \beta_6 = \frac{1}{5120},$$

$$\beta_7 = \frac{5669}{6426880}, \beta_8 = \frac{20183}{12853760}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{6}, \alpha_2 = \frac{8}{3}, \alpha_3 = \frac{115}{6}, \alpha_4 = \frac{248}{3},$$

$$\alpha_5 = \frac{1441}{6}, \alpha_6 = \frac{1496}{3}, \alpha_7 = \frac{1529}{2},$$

$$\alpha_8 = 880, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0,$$

$$\beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = 0, \beta_8 = \frac{1}{3}$$

در نظر بگیریم، ضرایب  $2, 4, \dots, 18$  حذف می شوند و لذا خطای برشی روش  $T_i = O(20)$  می شود و دقت روش  $O(8)$  می شود و روشی از مرتبه هشتم، با خطای برشی

در نظر بگیریم، ضرایب  $2, 4, \dots, 14$  حذف می شوند و لذا خطای برشی روش  $T_i = O(16)$  می شود و از طرفی چون مساله مقدار مرزی از مرتبه دوازدهم است بنابراین نتیجه می گیریم که دقت روش  $O(4)$  می شود و روشی از مرتبه چهارم، با

در نظر بگیریم، ضرایب  $2, 4, \dots, 22$  حذف می شوند و لذا خطای برشی روش  $T_i = O(2^4)$  می شود و دقت روش  $O(12)$  می شود و روشی از مرتبه دوازدهم، با خطای برشی خواهیم داشت.

$$T_i = \frac{241091h^{24}u_i^{(24)}}{6632742340224000} + O(2^6)$$

۴-۷ روش مرتبه چهاردهم  $(\chi_7)$ :

اگر

$$\alpha_1 = \frac{-1}{17381}, \alpha_2 = \frac{-23086}{166593881}, \alpha_3 = \frac{-1910636}{166593881}, \alpha_4 = \frac{6515509}{166593881}, \alpha_5 = \frac{23870847}{166593881}, \alpha_6 = \frac{-27898728}{166593881}, \alpha_7 = \frac{940627}{166593881}, \alpha_8 = \frac{1}{4597084800}, \beta_1 = \beta_2 = 0, \beta_3 = \frac{1}{210453763}, \beta_4 = \frac{940627}{36943859050560}, \beta_5 = \frac{221663154303360}{16661231}, \beta_6 = \frac{158788499}{2083300322400}, \beta_7 = \frac{39843503}{833320128960}, \beta_8 = \frac{158788499}{2083300322400}$$

در نظر بگیریم، ضرایب  $2, 4, \dots, 24$  حذف می شوند و لذا خطای برشی روش  $T_i = O(2^6)$  می شود و دقت روش  $O(14)$  می شود و روشی از مرتبه چهاردهم، با خطای برشی  $T_i = \frac{44239919h^{26}u_i^{(26)}}{217850548049342208000} + O(2^8)$  خواهیم داشت.

۴-۸ روش مرتبه شانزدهم  $(\chi_8)$ :

اگر

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 8, \alpha_3 = 19, \alpha_4 = 32, \alpha_5 = 319, \alpha_6 = 968, \alpha_7 = 1749, \alpha_8 = 2112, \beta_1 = \frac{-7499}{1307674368000}, \beta_2 = \frac{19093}{326918592000}, \beta_3 = \frac{-6142051}{118879488000}, \beta_4 = \frac{-658026881}{163459296000}$$

خواهیم داشت.

$$T_i = \frac{126733h^{20}u_i^{(20)}}{194348851200} + O(2^2)$$

۴-۵ روش مرتبه دهم  $(\chi_5)$ :

اگر

$$\alpha_1 = \frac{1}{126733}, \alpha_2 = \frac{2994}{3928723}, \alpha_3 = \frac{33541}{3928723}, \alpha_4 = \frac{180244}{3928723}, \alpha_5 = \frac{594231}{3928723}, \alpha_6 = \frac{1329262}{3928723}, \alpha_7 = \frac{2120613}{3928723}, \alpha_8 = \frac{2471832}{3928723}, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0, \beta_5 = \frac{1}{468720}, \beta_6 = \frac{344927}{9900381960}, \beta_7 = \frac{631069}{3960152784}, \beta_8 = \frac{769127}{2970114588}$$

در نظر بگیریم، ضرایب  $2, 4, \dots, 20$  حذف می شوند و لذا خطای برشی روش  $T_i = O(2^2)$  می شود و دقت روش  $O(10)$  می شود و روشی از مرتبه دهم، با خطای برشی  $T_i = \frac{30433h^{22}u_i^{(22)}}{78411025123200} + O(2^4)$  خواهیم داشت.

۴-۶ روش مرتبه دوازدهم  $(\chi_6)$ :

اگر

$$\alpha_1 = \frac{1}{30433}, \alpha_2 = \frac{2060}{30433}, \alpha_3 = \frac{24643}{30433}, \alpha_4 = \frac{135400}{30433}, \alpha_5 = \frac{451121}{30433}, \alpha_6 = \frac{1014772}{30433}, \alpha_7 = \frac{1623435}{30433}, \alpha_8 = \frac{1893936}{30433}, \beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 0, \beta_4 = \frac{1}{302400}, \beta_5 = \frac{587869}{2300734800}, \beta_6 = \frac{8528131}{2300734800}, \beta_7 = \frac{37738123}{2300734800}, \beta_8 = \frac{4876331}{184058784}$$



۵ - آنالیز همگرایی

در این بخش همگرایی روش مرتبه شانزدهم را بررسی می کنیم. سیستم (۶) همراه با شرایط مرزی (۷) می توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$A_0 U + {}^{12}Bf(U) = R \quad (۱۰)$$

که  $f(u) = (f_1, \dots, f_{n-1})^t$  و ماتریس های  $A_0, B$ ، از مرتبه  $(n-1) \times (n-1)$  و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A_0 = (P_{n-1}(1,2,1))^4 (P_{n-1}(1,4,1))^3 + 2(P_{n-1}(1,2,1))^3 (P_{n-1}(1,4,1))^3 + 10(P_{n-1}(1,2,1))^6 + 72(P_{n-1}(1,2,1))^5 + 432(P_{n-1}(1,2,1))^3,$$

که

$$P_{n-1}(x,z,y) = \begin{pmatrix} z & -y & & & & \\ -x & z & -y & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -x & z & -y \\ & & & & -x & z \end{pmatrix}$$

$$\beta_5 = \frac{-92262937339}{1307674368000}, \beta_6 = \frac{153187251253}{326918592000}, \beta_7 = \frac{621140297683}{435891456000}, \beta_8 = \frac{56219106661}{27243216000}$$

در نظر بگیریم، ضرایب  $2, 4, \dots, 26$  حذف می شوند و لذا خطای برشی روش  $O(28)$  می شود و دقت روش  $O(16)$  می شود و روشی از مرتبه شانزدهم، با خطای برشی  $O(30) + \frac{-89h^{28}u_i^{(28)}}{39481344000}$  خواهیم داشت.

۴-۹ روش مرتبه هجدهم ( $\chi_9$ ):

اگر

$$\alpha_1 = \frac{-1}{8169173}, \alpha_2 = \frac{51998}{35102936381}, \alpha_3 = \frac{-293107}{35102936381}, \alpha_4 = \frac{1025548}{35102936381}, \alpha_5 = \frac{-2506097}{35102936381}, \alpha_6 = \frac{4563394}{35102936381}, \alpha_7 = \frac{6441171}{35102936381}, \alpha_8 = \frac{7207464}{35102936381}, \beta_1 = \frac{1}{4297(15!)}, \beta_2 = \frac{287403989543}{3685808320005(13!)}, \beta_3 = \frac{5363628818797}{35102936381(15!)}, \beta_4 = \frac{287493048960390(11!)'}{5363628818797}, \beta_5 = \frac{308310245314573}{35102936381(15!)}, \beta_6 = \frac{680485131631127}{3685808320005(13!)}, \beta_7 = \frac{795085475988733}{175514681905(14!)}, \beta_8 = \frac{104919378058361}{47915508160065(11!)}$$

در نظر بگیریم، ضرایب  $2, 4, \dots, 28$  حذف می شوند و لذا خطای برشی روش  $O(30)$  می شود و دقت روش  $O(18)$  می شود و روشی از مرتبه هجدهم، با خطای برشی  $O(32) + \frac{93785155529h^{30}u_i^{(30)}}{35102936381(19!)}$  خواهیم داشت.

$$B = \begin{pmatrix}
 -\delta_{1,1} & -\delta_{1,2} & -\delta_{1,3} & -\delta_{1,4} & \cdots & -\delta_{1,17} \\
 -\delta_{2,1} & -\delta_{2,2} & -\delta_{2,3} & -\delta_{2,4} & \cdots & -\delta_{2,17} \\
 -\delta_{3,1} & -\delta_{3,2} & -\delta_{3,3} & -\delta_{3,4} & \cdots & -\delta_{3,17} \\
 -\delta_{4,1} & -\delta_{4,2} & -\delta_{4,3} & -\delta_{4,4} & \cdots & -\delta_{4,17} \\
 -\delta_{5,1} & -\delta_{5,2} & -\delta_{5,3} & -\delta_{5,4} & \cdots & -\delta_{5,17} \\
 -\delta_{6,1} & -\delta_{6,2} & -\delta_{6,3} & -\delta_{6,4} & \cdots & -\delta_{6,17} \\
 \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_7 & \beta_6 & \cdots & \beta_1 \\
 \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_7 & \beta_6 & \cdots & \beta_1 \\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\
 & & \beta_1 & \cdots & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_7 & \beta_6 & \beta_5 & \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \\
 & & & \beta_1 & \cdots & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_7 & \beta_6 & \beta_5 & \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 \\
 & & & & & -\delta_{6,17} & \cdots & -\delta_{6,4} & -\delta_{6,3} & -\delta_{6,2} & -\delta_{6,1} \\
 & & & & & -\delta_{5,17} & \cdots & -\delta_{5,4} & -\delta_{5,3} & -\delta_{5,2} & -\delta_{5,1} \\
 & & & & & -\delta_{4,17} & \cdots & -\delta_{4,4} & -\delta_{4,3} & -\delta_{4,2} & -\delta_{4,1} \\
 & & & & & -\delta_{3,17} & \cdots & -\delta_{3,4} & -\delta_{3,3} & -\delta_{3,2} & -\delta_{3,1} \\
 & & & & & -\delta_{2,17} & \cdots & -\delta_{2,4} & -\delta_{2,3} & -\delta_{2,2} & -\delta_{2,1} \\
 & & & & & -\delta_{1,17} & \cdots & -\delta_{1,4} & -\delta_{1,3} & -\delta_{1,2} & -\delta_{1,1}
 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$R = \begin{pmatrix}
 -\gamma_{1,0}u_0 - \sum_{i=1}^5 h^{2i} \tilde{a}_{1,i} u_0^{(2i)} + h^{12} \delta_{1,0} u_0^{(12)} \\
 -\gamma_{2,0}u_0 - \sum_{i=1}^5 h^{2i} \tilde{a}_{2,i} u_0^{(2i)} + h^{12} \delta_{2,0} u_0^{(12)} \\
 -\gamma_{3,0}u_0 - \sum_{i=1}^5 h^{2i} \tilde{a}_{3,i} u_0^{(2i)} + h^{12} \delta_{3,0} u_0^{(12)} \\
 -\gamma_{4,0}u_0 - \sum_{i=1}^5 h^{2i} \tilde{a}_{4,i} u_0^{(2i)} + h^{12} \delta_{4,0} u_0^{(12)} \\
 -\gamma_{5,0}u_0 - \sum_{i=1}^5 h^{2i} \tilde{a}_{5,i} u_0^{(2i)} + h^{12} \delta_{5,0} u_0^{(12)} \\
 -\gamma_{6,0}u_0 - \sum_{i=1}^5 h^{2i} \tilde{a}_{6,i} u_0^{(2i)} + h^{12} \delta_{6,0} u_0^{(12)} \\
 -\alpha_1 u_0 - h^{12} \beta_1 u_0^{(12)} \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 -\alpha_1 u_n - h^{12} \beta_1 u_n^{(12)} \\
 -\gamma_{6,0}u_n - \sum_{i=1}^5 h^{2i} \tilde{a}_{6,i} u_n^{(2i)} + h^{12} \delta_{6,0} u_n^{(12)} \\
 -\gamma_{5,0}u_n - \sum_{i=1}^5 h^{2i} \tilde{a}_{5,i} u_n^{(2i)} + h^{12} \delta_{5,0} u_n^{(12)} \\
 -\gamma_{4,0}u_n - \sum_{i=1}^5 h^{2i} \tilde{a}_{4,i} u_n^{(2i)} + h^{12} \delta_{4,0} u_n^{(12)} \\
 -\gamma_{3,0}u_n - \sum_{i=1}^5 h^{2i} \tilde{a}_{3,i} u_n^{(2i)} + h^{12} \delta_{3,0} u_n^{(12)} \\
 -\gamma_{2,0}u_n - \sum_{i=1}^5 h^{2i} \tilde{a}_{2,i} u_n^{(2i)} + h^{12} \delta_{2,0} u_n^{(12)} \\
 -\gamma_{1,0}u_n - \sum_{i=1}^5 h^{2i} \tilde{a}_{1,i} u_n^{(2i)} + h^{12} \delta_{1,0} u_n^{(12)}
 \end{pmatrix} \quad (12)$$

اثبات: [۱۷]

و  $f(U) = \text{diag}(f(x_i, u_i))$  که  $i = 1, 2, \dots, n$  یک ماتریس از مرتبه  $n \times n$  است.

لم ۵-۲. ماتریس  $[A_0 + {}^{12}\text{BF}(U)]$  در (۱۴)

نامنفرد است هرگاه  $Y < \frac{1}{\omega \lambda h^{12}}$  که  $\|B\| \leq Y$  و

$$Y = \max_l \left| \frac{\partial f_l}{\partial u_l} \right|, l = 1, 2, \dots, n$$

و  $\lambda = \frac{45985250367528463101591438313}{83576848851895246848000000}$  (نرم  $L_\infty$  است).

فرض می کنیم:

$$A_0 \bar{U} + {}^{12}\text{Bf}(\bar{U}) = R + T \quad (۱۳)$$

که بردار  $\bar{U} = u(x_l)$  و  $l = 1, 2, \dots, n$  جواب دقیق و  $T = [t_1, t_2, \dots, t_{n-1}]$  خطای برشی هستند. از (۱۰) و (۱۳) داریم:

$$[A]E = [A_0 + {}^{12}\text{BF}(U)]E = T, \quad (۱۴)$$

اثبات: می دانیم

$$[A_0 + {}^{12}\text{BF}(U)] = A_0[I + {}^{12}A_0^{-1}\text{BF}(U)]$$

که  $U = [e_1, e_1, \dots, e_{n-1}]^t$  و  $F(U) = f(\bar{U})$  و  $f(U) = F(U)E$  برای  $i = 1, 2, \dots, n$   $\text{diag}\left\{\frac{\partial f_i}{\partial u_i}\right\}$  اثبات معکوس پذیری  $A_0$  که  $A = A_0 + {}^{12}\text{BF}(U)$  داریم،

بنابراین بنابه لم ۵-۱،  $[I + {}^{12}A_0^{-1}\text{BF}(U)]$

معکوس پذیر است و همچنین بنابه لم ۵-۱ داریم:

$$\|A_0^{-1}\| \|B\| \|F(U)\| < 1, \quad (۱۷)$$

با استفاده از (۱۱)،

$$\|B\| \leq \frac{45985250367528463101591438313}{83576848851895246848000000} = \lambda$$

$$A_0 = (P_{n-1}(1,2,1))^4 (P_{n-1}(1,4,1))^3 + 2(P_{n-1}(1,2,1))^3 (P_{n-1}(1,4,1))^3 + 10(P_{n-1}(1,2,1))^6 + 72(P_{n-1}(1,2,1))^5 + 432(P_{n-1}(1,2,1))^3,$$

خواهد بود و همچنین  $\|F(U)\| \leq Y$

و بنابه [۱۵] داریم:

که  $\max_l \left| \frac{\partial f_l}{\partial u_l} \right|$  در این

$$\|P^{-1}(1,2,1)\| \leq \frac{(b-a)^2}{8h^2}, \quad (۱۵)$$

صورت با استفاده از (۱۷) بدست می آوریم:

$$Y < \frac{1}{\omega \lambda h^{12}}.$$

و همچنین با استفاده از [۱۶] داریم:

$$\|P^{-1}(1,4,1)\| \leq \frac{1}{2}, \quad (۱۶)$$

قضیه ۵-۱. فرض کنیم  $u(x_l)$  جواب دقیق مساله

در نتیجه به وضوح ماتریس  $A_0$  نامنفرد و همچنین

مقدار مرزی (۱) با شرایط مرزی (۲) و  $u_l$  برای

$\|A_0^{-1}\| < \omega$  و  $\omega$  یک عدد مثبت است ( $\|\cdot\|$ )

$l = 1, 2, \dots, n$  جواب تقریبی بدست آمده از

نرم  $L_\infty$  است).

حل سیستم غیر خطی (۶) و (۷) باشد در این

صورت داریم:

$$\|E\| \equiv O(16)$$

لم ۵-۱. اگر  $M$  یک ماتریس مربع از مرتبه  $N$  و

$\|M\| < 1$  باشد  $(I + M)^{-1}$  وجود دارد و

$$\|(I + M)^{-1}\| \leq \frac{1}{(1 - \|M\|)}$$

روشی که در این مقاله معرفی کردیم، حل کرده و به کمک جواب دقیق  $u(x_i)$  و تقریبی  $u_i$  ماکزیمم خطا، یعنی  $|u(x_i) - u_i|$  را به ازای های مختلف در نقاط گره ای محاسبه می کنیم. ماکزیمم خطای بدست آمده برای روشهای مرتبه های دوم، ششم، دهم، چهاردهم و هجدهم در جدولهای ا تا ۷ لیست کرده ایم. ماکزیمم خطای بدست آمده در مثالهای ا تا ۴ را با روشهای دیگر مقایسه کردیم [۳]، [۵]. همچنین برای مثالهای ا تا ۴ شکلی از جواب دقیق و تقریبی را با طول گام های مختلف رسم کردیم.

**مثال ۱.** مساله مقدار مرزی خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$u^{(12)}(x) = xu(x) \quad (120 + 23x + x^3)e^x, \\ 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) = u^{(2)}(0) = 0, u(1) = 0, \\ u^{(4)}(0) = \frac{1}{3}u^{(6)}(0) = \frac{1}{6}u^{(8)}(0) = \\ \frac{1}{10}u^{(10)}(0) = 8, \\ u^{(2)}(1) = \frac{1}{4}u^{(4)}(1) = \frac{1}{9}u^{(6)}(1) = \\ \frac{1}{16}u^{(8)}(1) = \frac{1}{25}u^{(10)}(1) = 4e,$$

جواب دقیق این مساله  $u(x) = x(1-x)e^x$  است.

این مثال را با طول گام های  $\frac{1}{22}, \frac{1}{44}, \frac{1}{88}, \frac{1}{176}, \frac{1}{352}$  به روش مرتبه های دوم، ششم، دهم، چهاردهم و هجدهم حل کرده و ماکزیمم خطای مطلق را محاسبه و با روش مرجع [۳] مقایسه کردیم، نتایج در جدول های ۱ و ۲ درج شده است.

**مثال ۲.** مساله مقدار مرزی خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$u^{(12)}(x) = u(x) \quad 12(2x\cos(x) + 11\sin(x)),$$

**اثبات:** معادله (۱۴) را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$E = (A_0 + {}^{12}BF(U))^{-1}T \\ = (I + {}^{12}A_0^{-1}BF(U))^{-1}A_0^{-1}T, \\ \|E\| \\ \leq \|(I + {}^{12}A_0^{-1}BF(U))^{-1}\| \|A_0^{-1}\| \|T\|,$$

بنابراین اگر  ${}^{12}\|A_0^{-1}\| \|B\| \|F(U)\| < 1$  آنگاه داریم:

$$\|E\| \leq \frac{\|A_0^{-1}\| \|T\|}{1 - h^{12}\|A_0^{-1}\| \|B\| \|F(U)\|}, \quad (۱۸)$$

همچنین داریم:

$$\|T\| \leq \frac{490658463326023344154119719}{10687950(23!)} {}^{28}M_{28}, \quad (۱۹)$$

که  $M_{28} = \max|u^{(28)}(\xi)|$ ,  $a \leq \xi \leq b$  و از طرفی

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 8, \alpha_3 = 19, \alpha_4 = 32, \\ \alpha_5 = 319, \alpha_6 = 968, \alpha_7 = 1749, \\ \alpha_8 = 2112, \beta_1 = \frac{7499}{15!}, \beta_2 = \frac{19093}{8190(11!)}, \\ \beta_3 = \frac{6142051}{32760(10!)}, \beta_4 = \frac{658026881}{4095(11!)}, \\ \beta_5 = \frac{92262937339}{15!}, \beta_6 = \frac{153187251253}{8190(11!)}, \\ \beta_7 = \frac{621140297683}{5(14!)}, \beta_8 = \frac{56219106661}{75075(9!)},$$

از نابرابری های (۱۸)، (۱۹) و  $\|A_0^{-1}\| < \omega$ ،  $\|F(U)\| \leq Y$  و  $\|B\| \leq \lambda$  داریم:

$$\|E\| \\ \leq \frac{490658463326023344154119719 \omega h^{28} M_{28}}{10687950(23!)(1 - \omega \lambda h^{12} Y)} \\ \equiv O(h^{16})$$

### ۶- نتایج عددی

در این بخش روش (۶)، برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم، به کار می بریم و با انتخاب  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$  و  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_8$  های مختلف از رابطه (۹) روشهایی از مرتبه های  $O(h^{2n})$  برای  $n = 1, 2, \dots, 9$  خواهیم داشت. مثالهای ۱-۴ را با

مثال ۴. مساله مقدار مرزی غیر خطی زیر را در

نظر می گیریم:

$$u^{(12)}(x) = (11!)e^{-12u(x)} \\ 2(11!)(1+x)^{-12}, \\ 0 \leq x \leq e^{\frac{1}{3}} - 1,$$

با شرایط مرزی

$$u(0) = 0, u^{(2i)}(0) = (2i - 1)!, \\ u\left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right) = \frac{1}{3}, u^{(2i)}\left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right) = \\ e^{-\frac{2i}{3}} u^{(2i)}(0), \\ i = 1, \dots, 5.$$

جواب دقیق این مساله  $u(x) = \ln(1+x)$  است.

این مثال را با طول گام های  $\frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{512}$  به روش مرتبه های دوم، ششم، دهم، چهاردهم و هجدهم حل کرده و ماکزیمم خطای مطلق را محاسبه و با روش مرجع [۵] مقایسه کردیم، نتایج در جدول های ۶ و ۷ درج شده است.

#### نتیجه گیری

با توجه به مطالب ارائه شده در این مقاله، جواب های تقریبی برای مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم، دو نقطه ای را به ترتیب با استفاده از اسپلاین پانزده کششی بدست آوردیم. همگرایی روش را نیز بحث و بررسی کرده و روشی با همگرایی مراتب بالاتر ایجاد کرده ایم. همچنین نشان دادیم که روند اسپلاین کششی با اعمال شرایط مرزی مناسب، با کاهش چشم گیر خطا از کارایی بالاتری نسبت به روش های موجود دیگر آن برخوردار است. و همچنین نشان دادیم که نتایج محاسبه شده با استفاده از این روش دارای دقت کافی و کارایی مطلوب می باشند.

$$1 \leq x \leq 1$$

با شرایط مرزی

$$u(1) = 0, \\ u^{(2)}(1) = 4\cos(1) - 2\sin(1), \\ u^{(4)}(1) = 8\cos(1) - 12\sin(1), \\ u^{(6)}(1) = 12\cos(1) + 30\sin(1), \\ u^{(8)}(1) = 16\cos(1) - 56\sin(1), \\ u^{(10)}(1) = 20\cos(1) + 90\sin(1), \\ u(1) = 0, u^{(2)}(1) = 4\cos(1) + 2\sin(1), \\ u^{(4)}(1) = 8\cos(1) - 12\sin(1), \\ u^{(6)}(1) = 12\cos(1) + 30\sin(1), \\ u^{(8)}(1) = 16\cos(1) - 56\sin(1), \\ u^{(10)}(1) = 20\cos(1) + 90\sin(1),$$

جواب دقیق این مساله  $u(x) = (x^2 - 1)\sin(x)$  است.

این مثال را با طول گام های  $\frac{1}{22}, \dots, \frac{1}{704}$  به روش مرتبه های دوم، ششم، دهم، چهاردهم و هجدهم حل کرده و ماکزیمم خطای مطلق را محاسبه و با روش مرجع [۳] مقایسه کردیم، نتایج در جدول های ۳ و ۴ درج شده است.

مثال ۳. مساله مقدار مرزی غیر خطی زیر را در

نظر می گیریم [۶، ۸]:

$$u^{(12)}(x) = \frac{1}{2}e^{-x}u^2(x), 0 \leq x \leq 1,$$

با شرایط مرزی

$$u(0) = u^{(2)}(0) = u^{(4)}(0) = u^{(6)}(0) = \\ u^{(8)}(0) = u^{(10)}(0) = 2, \\ u(1) = u^{(2)}(1) = u^{(4)}(1) = u^{(6)}(1) = \\ u^{(8)}(1) = u^{(10)}(1) = 2e,$$

جواب دقیق این مساله  $u(x) = 2e^x$  است.

این مثال را با طول گام های  $\frac{1}{22}, \frac{1}{44}, \frac{1}{88}, \frac{1}{176}$  به روش مرتبه های دوم، ششم، دهم، چهاردهم و هجدهم حل کرده و ماکزیمم خطای مطلق را محاسبه و نتایج در جدول ۵ درج شده است.

## فهرست منابع

- [9] Moosaei, H., Ketabchi, S., Fooladi, M.T., 2019, *Augmented Lagrangian method for solving absolute value boundary value problems*, Journal of New Research in Mathematics, 5(20), 5-14.
- [10] Alizadeh Nazarkandi, H., 2016, *Properties of eigenvalue function*, Journal of New Research in Mathematics, 2(7), 97-105.
- [11] Hossein Aminikhah, h., Alavi, S.J., 2019, *A new approach to using the cubic B-spline functions to solve the Black-Scholes equation*, Journal of New Research in Mathematics, 5(18), 71-80.
- [12] Peykani, P., Mohammadi, E., Emrouznejad, A., Pishvae, M.S., Rostamy-Malkhalifeh, M., 2019, *Fuzzy data envelopment analysis: an adjustable approach*, Expert Systems with Applications, 136, 439-452.
- [13] Peykani, P., Mohammadi, E., Pishvae, M.S., Rostamy-Malkhalifeh, M., and Jabbarzadeh, A., 2018, *A novel fuzzy data envelopment analysis based on robust possibilistic programming: possibility, necessity and credibility-based approaches*, RAIRO-Operations Research, 52(4), 1445-1463.
- [14] Peykani, P., Mohammadi, E., Rostamy-Malkhalifeh, M., and Hosseinzadeh Lotfi, F., 2019, *Fuzzy data envelopment analysis approach for ranking of stocks with an application to Tehran stock exchange*, Advances in Mathematical Finance and Applications, 4(1), 31-43.
- [15] Henrici, P., 1961, *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, Wiley, New York.
- [1] Chandrasekhar, S., 1961, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon press, New York, 1981. Oxford.
- [2] Siddiqi, S.S., Akram, G., 2008, *Solutions of 12th order boundary value problems using non polynomial spline technique*, Appl. Math. Comput., 199(2), 559-571.
- [3] Siddiqi, S.S., Twizell, E.H., 1997, *Spline solutions of linear twelfth-order boundary value problems*, J. Comput. Appl. Math., 78, 371-390.
- [4] Siddiqi, S.S., Akram, G., 2006, *Solutions of twelfth order boundary value problems using thirteen degree spline*, Appl. Math. Comput., 182, 1443-1453.
- [5] Boutayeb, A., and Twizell, E.H., 1991, *Finite-difference methods for twelfth-order boundary-value problems*, J. Comput. Appl. Math., 35, 133-138.
- [6] Noor, M.A., and Mohyud-Din, S.T., 2010, *Variational iteration method for solving twelfth-order boundary-value problems using Hes polynomials*, Computational Mathematics and Modeling, 21(2), 239-251.
- [7] Ravi Kanth, A.S.V., Aruna, K., 2009, *Variational iteration method for twelfth-order boundaryvalue problems*, Computers and Mathematics with Applications, 58, 2360-2364.
- [8] Wazwaz, A.M., 2000, *Approximate solutions to boundary value problems of higher order by the modified decomposition method*, Comput. Math. Appl., 40, 679-691.

---

[16] Usmani, R.A., and Warsi, S.A., 1980, *Quintic spline solutions of boundary value problems*, Comput. Math. Appl., 6, 197-203.

[17] Usmani, R.A., 1987, *Applied linear algebra*, Marcel Dekker, New York.

جدول‌ها:

جدول ۱: ماکزیمم خطای مطلق مثال ۱

$n$	$\chi_1$	$\chi_3$	$\chi_5$	$\chi_7$	$\chi_9$
22	$2.50 \times 10^{-7}$	$2.89 \times 10^{-14}$	$1.37 \times 10^{-23}$	$1.21 \times 10^{-31}$	$2.30 \times 10^{-32}$
44	$9.70 \times 10^{-8}$	$7.17 \times 10^{-16}$	$2.08 \times 10^{-26}$	$1.35 \times 10^{-35}$	$2.29 \times 10^{-38}$
88	$2.66 \times 10^{-8}$	$1.23 \times 10^{-17}$	$2.23 \times 10^{-29}$	$9.09 \times 10^{-40}$	$2.27 \times 10^{-44}$
176	$6.81 \times 10^{-9}$	$1.98 \times 10^{-19}$	$2.23 \times 10^{-32}$	$5.68 \times 10^{-44}$	$2.21 \times 10^{-50}$
352	$1.71 \times 10^{-9}$	$3.11 \times 10^{-21}$	$2.19 \times 10^{-35}$	$3.48 \times 10^{-48}$	$1.98 \times 10^{-56}$

جدول ۲: ماکزیمم خطای مطلق مثال ۱ (n=۲۲)

Method in [3] for $x \in [x_6, x_{n-6}]$	$5.582 \times 10^{-3}$
---	------------------------

جدول ۳: ماکزیمم خطای مطلق مثال ۲

$n$	$\chi_1$	$\chi_3$	$\chi_5$	$\chi_7$	$\chi_9$
22	$1.01 \times 10^{-7}$	$1.70 \times 10^{-13}$	$1.34 \times 10^{-21}$	$1.78 \times 10^{-27}$	$2.00 \times 10^{-27}$
44	$9.47 \times 10^{-8}$	$1.07 \times 10^{-14}$	$4.95 \times 10^{-24}$	$4.68 \times 10^{-32}$	$4.32 \times 10^{-33}$
88	$3.13 \times 10^{-8}$	$2.25 \times 10^{-16}$	$6.43 \times 10^{-27}$	$4.13 \times 10^{-36}$	$5.05 \times 10^{-39}$
176	$8.41 \times 10^{-9}$	$3.79 \times 10^{-18}$	$6.74 \times 10^{-30}$	$2.70 \times 10^{-40}$	$5.19 \times 10^{-45}$
352	$2.14 \times 10^{-9}$	$6.04 \times 10^{-20}$	$6.70 \times 10^{-33}$	$1.68 \times 10^{-44}$	$5.11 \times 10^{-51}$
704	$5.37 \times 10^{-10}$	$6.04 \times 10^{-20}$	$6.57 \times 10^{-36}$	$1.03 \times 10^{-48}$	$7.09 \times 10^{-54}$

جدول ۴: ماکزیمم خطای مطلق مثال ۲ (n=۲۲)

Method in [3] for $x \in [x_6, x_{n-6}]$	$1.366 \times 10^{-4}$
---	------------------------

جدول ۵: ماکزیمم خطای مطلق مثال ۳

$n$	$\chi_1$	$\chi_3$	$\chi_5$	$\chi_7$	$\chi_9$
22	$2.57 \times 10^{-9}$	$1.89 \times 10^{-16}$	$5.95 \times 10^{-26}$	$1.09 \times 10^{-33}$	$5.29 \times 10^{-35}$
44	$9.10 \times 10^{-10}$	$4.67 \times 10^{-18}$	$9.00 \times 10^{-29}$	$4.16 \times 10^{-38}$	$5.24 \times 10^{-41}$
88	$2.91 \times 10^{-10}$	$7.04 \times 10^{-20}$	$9.64 \times 10^{-32}$	$2.79 \times 10^{-42}$	$5.73 \times 10^{-46}$
176	$7.45 \times 10^{-11}$	$1.82 \times 10^{-21}$	$1.08 \times 10^{-34}$	$1.74 \times 10^{-46}$	$5.01 \times 10^{-53}$

جدول ۶: ماکزیمم خطای مطلق مثال ۴

$n$	$\chi_1$	$\chi_3$	$\chi_5$	$\chi_7$	$\chi_9$
32	$8.12 \times 10^{-7}$	$1.01 \times 10^{-11}$	$1.49 \times 10^{-18}$	$2.03 \times 10^{-21}$	$2.04 \times 10^{-21}$
64	$2.84 \times 10^{-7}$	$2.46 \times 10^{-13}$	$2.45 \times 10^{-21}$	$6.04 \times 10^{-27}$	$7.34 \times 10^{-27}$

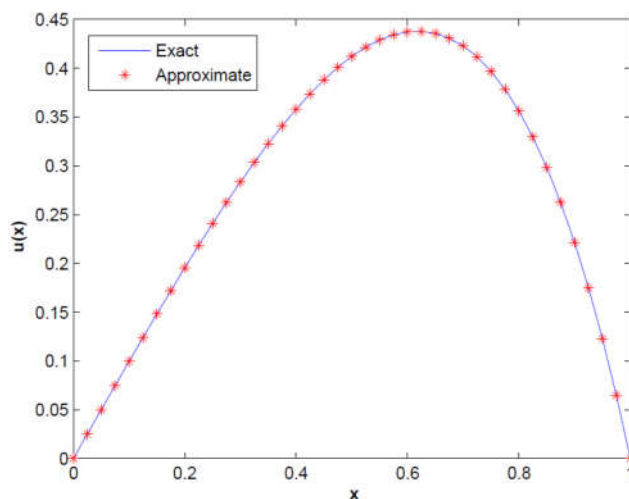


128	$7.87 \times 10^{-8}$	$4.44 \times 10^{-15}$	$2.88 \times 10^{-24}$	$8.49 \times 10^{-32}$	$1.41 \times 10^{-32}$
256	$2.03 \times 10^{-8}$	$7.26 \times 10^{-17}$	$2.98 \times 10^{-27}$	$6.50 \times 10^{-36}$	$1.93 \times 10^{-38}$
512	$5.11 \times 10^{-9}$	$1.14 \times 10^{-18}$	$2.96 \times 10^{-30}$	$4.06 \times 10^{-40}$	$3.31 \times 10^{-42}$

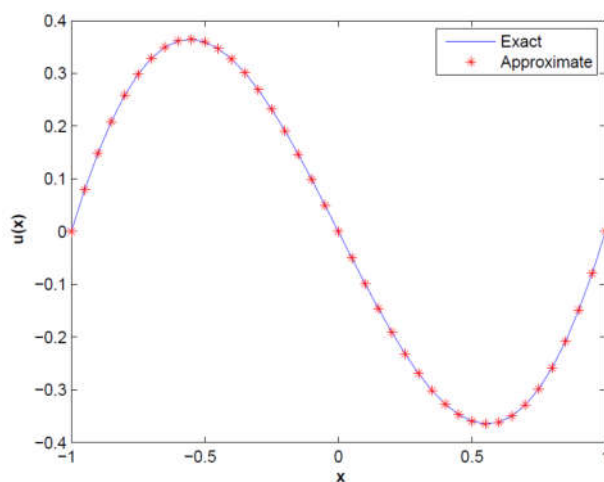
جدول ۷: ماکزیمم خطای مطلق مثال ۴

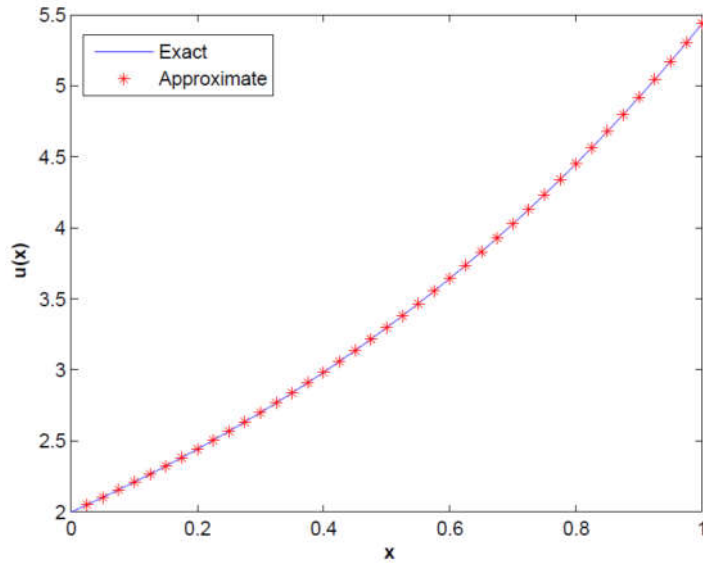
$n$	$\chi_2$ Presented method	Second-order method in [5]	Fourth-order method in [5]
32	$5.65 \times 10^{-11}$	$4.92 \times 10^{-7}$	$1.41 \times 10^{-10}$
64	$5.04 \times 10^{-12}$	$1.23 \times 10^{-7}$	$8.81 \times 10^{-12}$

شکل ۱: مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی برای  $h = \frac{1}{40}$ ، مثال ۱



شکل ۲: مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی برای  $h = \frac{1}{40}$ ، مثال ۲



شکل ۳: مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی برای  $h = \frac{1}{40}$ ، مثال ۳شکل ۴: مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی برای  $h = \frac{1}{40}$ ، مثال ۴