

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال پنجم، شماره بیست و یکم، آذر و دی ۱۳۹۸

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# ارایه روشی برای TOPSIS فازی با اعمال اصل گسترش "زاده"

رضا کارگر\*

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قم، قم، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۴/۰۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۱۹

## چکیده

فرایند TOPSIS یکی از جامع‌ترین سیستم‌های طراحی شده برای تصمیم‌گیری با معیارهای چندگانه است زیرا این تکنیک امکان فرموله کردن مساله را به صورت ماتریس تصمیم فراهم می‌کند و همچنین امکان در نظر گرفتن معیارهای مختلف کمی و کیفی را در مساله دارد. به روش‌های TOPSIS فازی موجود ایرادات اساسی وارد است که باعث می‌شود مفاهیم تصمیم در این روش‌ها کمرنگ شوند از جمله این اشکالات می‌توان به عدم دقت لازم در محاسبات فازی اشاره داشت و علت آن عدم استفاده از اصل گسترش "زاده" در تعریف اپراتورهاست. به‌عنوان مثال ضرب دو عدد فازی مثلثی الزاماً فازی مثلثی نخواهد بود. لکن در عمده روش‌های TOPSIS فازی اینگونه فرض شده است. در این مقاله تلاش می‌شود ابتدا تعریف بردار ایده‌آل و ضدایده‌آل فازی بیان گردد سپس برای تحقق این منظور دو تابع طراحی شد که بهین این توابع بردار ایده‌آل و ضدایده‌آل فازی است که در ادامه با رعایت اصل "زاده" توابعی که اعمال حسابی و اثر یک تابع بر اعداد فازی در حالت گسسته را محاسبه می‌کند، ساخته شد در نهایت الگوریتم با کمک این توابع و بردارهای جدید رتبه‌بندی را انجام می‌دهد.

**واژه‌های کلیدی:** اصل گسترش "زاده"، فرایند تاپسیس، فازی، ماکسیمال، ایده‌آل، رتبه‌بندی الگوریتم ژنتیک.

## ۱- مقدمه

از آنجا که اتخاذ تصمیم صحیح و به موقع می‌تواند تاثیر بسزایی در زندگی شخصی و اجتماعی انسان‌ها داشته باشد، ضرورت وجود تکنیک‌های قوی که بتواند انسان را در این زمینه یاری کند کاملاً محسوس می‌باشد. یکی از این کارآمدترین این تکنیک‌ها "شبهات به گزینه ایده‌آل" <sup>1</sup> TOPSIS است که برای اولین بار توسط هوانگ و یون ۱۹۸۱ [1] مطرح شد.

این تکنیک براساس بیشترین و کمترین شبهات با ایده‌آل و ضد ایده‌آل بنا شده و امکان بررسی سناریوهای مختلف را به مدیران می‌دهد. TOPSIS به علت ماهیت ساده و جامعی که دارد موجب نگارش مقالات متعددی در این زمینه شده است. لکن در دنیای واقعی داده‌ها از عدم قطعیت برخوردارند و بدین منظور با بکارگیری داده‌های فازی تا حدودی تصمیم‌سازی به واقعیت بیش از گذشته نزدیک‌تر شده است و مدیران تصمیم‌گیر با ریسک کمتری مدل‌ها را می‌پذیرند: Hwang در سال ۱۹۹۳ در [2] روش جدیدی در مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره ارائه نمود. Liang در سال ۱۹۹۹ در [3] تصمیم‌گیری چند معیاره فازی بر اساس اصول ایده‌آل و ضد ایده‌آل مطرح نمود Chen در سال ۲۰۰۰ در [4] توسعه روش TOPSIS برای تصمیم‌گیری در محیط فازی را بیان نمود. Abo-Sinna, Amer در سال ۲۰۰۵ در [5] روش TOPSIS برای حل مسایل چند هدفه غیرخطی توسعه داد. پروفیسور جهانشاهلو و همکاران در سال ۲۰۰۶ [6] را برای داده‌های فازی گسترش دادند. Wang, Lee در سال ۲۰۰۷ در [7] این روش را تعمیم دادند. Chu و همکارش در سال ۲۰۰۹ در [8] حساب بازه‌ای را برای TOPSIS را بکار بستند. Chen در سال ۲۰۰۹ در [9] با استفاده از داده‌های بازه‌ای مقدار روش مذکور را روی داده‌های تجربی پیاده‌سازی نمودند. وی در سال ۲۰۱۱ مقایسه‌ای بین روش جمع ساده اوزان (SAW) و TOPSIS در مورد رتبه‌بندی انجام داد. [10\_16] به برخی کاربردهای این روش اشاره دارد. ساختار این مقاله در ادامه یا مطالب زیر دنبال می‌شود: در بخش دوم

تعاریف مختصر از روش مکاشفه‌ای ژنتیک الگوریتم و مفاهیم اولیه فازی و اصل گسترش بیان و روش کلاسیک TOPSIS ارائه می‌گردد. در بخش سوم ابتدا معایب روش‌هایی که مبتنی بر اصل گسترش نمی‌باشند بیان می‌گردد سپس با جایگزینی مفهوم ماکسیمال و مینیمال با ماکسیمم و مینمم روشی تازه مطرح می‌شود. در بخش چهارم یک مثال ذکر می‌شود که حل آن توسط روش ارائه شده در بخش سوم خواهد بود در بخش پنجم به جمع‌بندی نتایج روش ارائه شده پرداخته می‌شود.

## ۲- مفاهیم اولیه

این فصل به ادبیات موضوع تحقیق که شامل ابزارها، تعاریف و قضایای مورد نیاز پرداخته است. در بخش نخست به ابزار الگوریتم ژنتیک می‌پردازیم. سپس مفاهیم فازی بیان می‌گردد. در نهایت مختصری از TOPSIS مطرح می‌گردد.

### ۱-۲- الگوریتم مکاشفه‌ای ژنتیک

در بسیاری از مسایل، به ویژه مسایل سخت، انتخاب بهترین جواب از طریق جستجوی همه جانبه<sup>۲</sup> (آزمودن تمام جواب‌های ممکن)، اگر کاری غیرممکن نباشد، بسیار دشوار و غیرعملی است. یک عامل مهم در بهینه‌سازی، زمان رسیدن به پاسخ است که جستجوی همه جانبه زمان‌بر و از این جنبه پرهزینه است. منظور از واژه بهینه‌سازی، یافتن بهترین جواب برای حل یک مسأله از بین جواب‌های ممکن در یک زمان قابل قبول است.

از خصوصیات روش‌های بهینه‌سازی ابتکاری، عدم وابستگی آن‌ها به مشتق‌پذیری تابع هدف است. این توانایی باعث شده است تا مسایل با توابع هدف پیچیده و غیرمشتق‌پذیر، بدون صرف هزینه بیشتر نسبت به توابع هدف مشتق‌پذیر قابل حل باشند.

همه روش‌های جستجوی ابتکاری بر پایه احتمالات عمل می‌کنند. یعنی این که برای دنبال کردن جهت جستجو از تئوری احتمالات و تولید دنباله‌های تصادفی بهره می‌برند. این موضوع، دلیل اصلی توانایی آن‌ها در یافتن بهینه

1. Technique for Order Performance by Similarity to Ideal Solution

2. Exhaustive search

۴- جایگزینی: برای مراحل بعدی الگوریتم از جمعیت جدید استفاده کن.

۵- تست: اگر به شرایط پایانی رسیده ایم کار را متوقف کنید و بهترین جواب را در جمعیت فعلی به عنوان جواب انتخاب کنید.

۶- در غیر اینصورت برو به مرحله ۲: همانطوری که مشاهده می کنید این نمای ارایه شده بسیار کلی است. پارامترها و تنظیمات مختلفی با توجه به ماهیت هر مساله وجود دارد که بسته به مساله در هر یک از آنها متفاوت می باشند. مطالب این بخش برگرفته از [17] است.

## ۲-۲- منطق فازی

نظریه مجموعه های فازی، یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریه مجموعه های معمولی است که در یک قالب جدید ریاضی برای صورت بندی و تجزیه و تحلیل مفاهیم موافق با زبان و فهم طبیعی انسان ها بیان شده است. در زیر به تعاریف مورد نیاز این مقاله پرداخته می شود.

### تعریف (۱-۲) مجموعه فازی

فرض کنید  $X$  مجموعه ای ناتهی باشد. هر زیر مجموعه فازی از  $X$  توسط یک تابع  $\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0,1]$  به نام تابع عضویت معین می شود.  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  نشان دهنده میزان تعلق داشتن  $x$  به مجموعه فازی  $\tilde{A}$  می باشد.

فرض کنید  $X$  یک مجموعه مرجع و  $\tilde{A}$  زیر مجموعه ای فازی از آن باشد که تابع عضویت آن با  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  نمایش داده می شود

### تعریف (۲-۲)

$\tilde{A}$  مجموعه نقاطی از  $X$  که  $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$  باشد، تکیه گاه  $\tilde{A}$  می نامند.

$$Supp(\tilde{A}) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

فرامحلی در یک زمان قابل قبول است.

الگوریتم های ژنتیکی با یک مجموعه از جواب ها (که کروموزوم<sup>۱</sup> هم نامیده می شوند) کار خود را شروع می کنند. به این مجموعه جمعیت<sup>۲</sup> نیز گفته می شود. از جواب های یک جمعیت برای ایجاد جمعیت جدید استفاده می کنیم. با این امید که جواب های جمعیت جدید بهتر از جمعیت قبلی باشد. برای تشکیل جمعیت جدید از میان جواب های تولید شده در هر مرحله بهترین آنها را با توجه به ارزش آنها انتخاب می کنیم. هر چه قدرت آنها بیشتر باشد شانس حضور آنها در مجموعه بعدی بیشتر است. این عملیات آنقدر تکرار می شود تا به شرایط خاصی برسیم. برای مثال تعداد جمعیت های ساخته شده به حد معینی برسند یا اینکه بهبود مشخصی در جواب بدست آید.

مراحل انجام یک الگوریتم ژنتیکی بصورت زیر است:

۱- شروع: یک جمعیت متشکل از  $n$  کروموزوم را به طور تصادفی ایجاد کن.

۲- ارزش گذاری: برای هر کروموزوم  $x$  ارزش آن را که با تابع  $f(x)$  (بهینه ساز<sup>۳</sup>) مشخص شده محاسبه کن.

۳- جمعیت جدید: با انجام مراحل زیر یک جمعیت جدید با استفاده از جمعیت موجود بساز:

۱-۳- انتخاب: دو کروموزوم والد را بر اساس ارزش آنها از جمعیت انتخاب کن (هر چه ارزش یک کروموزوم بیشتر باشد شانس انتخاب آن بیشتر است).

۲-۳- ترکیب<sup>۴</sup>: با "احتمال ترکیب" والدین را برای تشکیل فرزندان جدید ترکیب کن. اگر ترکیب اتفاق نیفتاد فرزندان کپی همان والدین خواهند بود.

۳-۳- جهش<sup>۵</sup>: با "احتمال جهش" در یک محل از کروموزوم فرزندان تغییری بوجود بیاور.

۴-۳- تکمیل: دو فرزند تولید شده را در جمعیت جدید قرار بده.

1. Chromosome
2. population
3. fitness
4. Crossover
5. Mutation

### تعریف (۳-۲)

$\tilde{A}$  نقطه‌ای از  $X$  که دارای بالاترین درجه عضویت باشد را در نظر بگیرید. مقدار این درجه عضویت را ارتفاع مجموعه  $\tilde{A}$  نامیده می‌شود. یعنی

$$M = \sup \{ \mu_{\tilde{A}}(x) \mid x \in X \}$$

### تعریف (۴-۲)

مجموعه  $\tilde{A}$  را نرمال گویند اگر و فقط اگر ارتفاع آن برابر یک باشد. یعنی

$$\sup \{ \mu_{\tilde{A}}(x) \mid x \in X \} = 1$$

در غیر این صورت آن را غیر نرمال (زیر نرمال) گویند. بدیهی است که هر مجموعه فازی غیر نرمال  $\tilde{A}$  را می‌توان با تقسیم  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  بر ارتفاع  $\tilde{A}$ ، نرمال کرد.

### تعریف (۵-۲)

(i) مجموعه فازی  $\tilde{A}$  محدب گویند اگر و فقط اگر برای هر  $x_1, x_2 \in X$  و هر  $\lambda \in [0, 1]$  داشته باشید:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2) \}$$

(ii) مجموعه فازی  $\tilde{A}$  را محدب گویند، اگر و فقط اگر برای هر  $\lambda \in [0, 1]$ ،  $\tilde{A}_\lambda$  محدب باشد.

عبارت (i) معادل این است که برای هر  $x_1, x_2 \in X$  دلخواه و به ازای هر  $x$  داشته باشید:

$$x_1 \leq x \leq x_2 \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2) \}$$

### تعریف (۶-۲)

فرض کنید  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$  زیر مجموعه‌های فازی از مجموعه مرجع  $X$  باشد. در این صورت حاصلضرب دکارتی آنها بصورت زیر تعریف می‌شود:

برای هر  $x \in X$

$$\mu_{\tilde{A}_1 * \dots * \tilde{A}_n}(x_1, \dots, x_n) = \min \{ \mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \}$$

### تعریف (۷-۲) (اصل گسترش)

این اصل ابزاری است برای گسترش و تعمیم مفاهیم ریاضی غیرفازی به گونه‌ای که بصورت کمیت‌های فازی در آیند. این اصل به ویژه در تعمیم عملگرهای جبری بین اعداد و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی مفید است.

فرض کنید  $X = X_1 \times \dots \times X_n$  حاصلضرب دکارتی  $n$  مجموعه مرجع و  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ ،  $n$  زیر مجموعه فازی به ترتیب از  $X_1, X_2, \dots, X_n$  باشد و  $f: X \rightarrow Y$  که  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  در این صورت حاصل عمل  $f$  بر  $n$  مجموعه فازی  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$  به صورت زیر تعریف می‌شود که زیر مجموعه فازی  $\tilde{B}$  از  $Y$  خواهد بود.

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) =$$

$$\{ (y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \}$$

$$\{ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in X \}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(y) =$$

$$\mu_{f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)}(y) =$$

$$\begin{cases} \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min \{ \mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \} & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

### تعریف (۸-۲) عدد فازی

اعداد فازی یک تعمیم طبیعی بر اعداد معمولی است، که بصورت زیر تعریف می‌شود

یک مجموعه فازی نرمال محدب مانند  $\tilde{A}$  از  $R$  را یک عدد فازی گویند، اگر داشته باشید:

(i)  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  تک نمایی باشد یعنی دقیقاً یک  $x \in R$  وجود داشته باشد که:  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ .

(ii)  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  قطعه قطعه پیوسته باشد.

$\tilde{A}$  را یک بازه فازی می‌گویند و دو عدد  $m_1 < m_2$  از  $R$  وجود دارد که برای هر  $x \in [m_1, m_2]$  داریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

مزیت روش‌های متعلق به این مدل نیز سادگی آنها است که با رفتار DM و محدود بودن اطلاعات او مطابقت دارد. در برخی از این روش‌ها ممکن است نیازی به کسب اطلاعات از DM نباشد.

ب - مدل جبرانی مشتمل بر روش‌هایی است که اجازه مبادله در بین شاخص‌ها در آنها مجاز است، یعنی مثلاً تغییری (احتمالاً کوچک) در یک شاخص می‌تواند توسط تغییری مخالف در شاخص (یا شاخص‌های) دیگر جبران شود.

تصمیم‌گیری TOPSIS معمولاً توسط ماتریس ذیل فرموله می‌گردد:

شاخص گزینه	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$A_1$	$r_{11}$	$r_{12}$	...	$r_{1n}$
$A_2$	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$A_m$	$r_{m1}$	$r_{m2}$	...	$r_{mn}$

به‌طوری که  $A_i$  نشان دهنده گزینه  $i$ ام،  $x_j$  نشان دهنده شاخص  $j$ ام و  $r_{ij}$  نشان دهنده ارزش شاخص  $j$ ام برای گزینه  $i$ ام می‌باشد.

در این روش علاوه بر در نظر گرفتن فاصله یک گزینه  $A_i$  از نقطه ایدال، فاصله آن از نقطه ایده‌آل منفی هم در نظر گرفته می‌شود. بدان معنی که گزینه انتخابی باید دارای کمترین فاصله از راه حل ایده‌آل بوده و در عین حال دارای دورترین فاصله از راه حل ایده‌آل منفی باشد. واقعیات زیربنائی از این روش بدین قرار است:

الف - مطلوبیت هر شاخص باید به‌طور یکنواخت افزایشی (یا کاهششی) باشد (هرچه  $r_{ij}$  بیشتر، مطلوبیت بیشتر و یا برعکس) که بدان صورت بهترین ارزش موجود از یک

مجموعه تمام اعداد فازی را با  $F(R)$  نشان می‌دهند.

### مثال (۱-۲)

فرض کنید یک  $\tilde{A} \in f(R)$ ،  $f: R \rightarrow R$  عملگر یک بعدی باشد. براساس اصل گسترش، عدد فازی  $\tilde{B} = f(\tilde{A})$  با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x=f(x)} \mu_{\tilde{A}}(x) & , f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & , f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

### مثال (۲-۲)

فرض کنید  $\tilde{A}, \tilde{B} \in f(R)$  با توابع عضویت پیوسته باشند و  $\otimes: R \times R \rightarrow R$  یک عملگر دو تایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم  $\otimes$  را برای اعداد فازی با  $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$  نشان دهید، با استفاده از اصل گسترش حاصل  $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$  به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(\tilde{A} \otimes \tilde{B})(z) = \sup_{z=x*y} \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y) \}$$

### ۲-۳- روش TOPSIS

مطالب این قسمت برگرفته از [18] است.

دو دسته عمده از روش‌های مختلف در پروسه کردن اطلاعات موجود از یک مساله MADM در ادبیات موضوع مطرح شده است یک دسته از روش‌ها منشعب از مدلی مشهور به مدل غیرجبرانی<sup>۱</sup> بوده و دسته دیگر منشعب از مدل دیگری معروف به مدل جبرانی<sup>۲</sup> می‌باشد. الف - مدل غیرجبرانی شامل روش‌هایی می‌شود که در آنها مبادله<sup>۳</sup> در بین شاخص‌ها مجاز نیست، یعنی مثلاً نقطه ضعف موجود در یک شاخص توسط مزیت موجود از شاخص دیگر جبران نمی‌شود. بنابراین هر شاخص در این روش‌ها بتنهائی مطرح بوده و مقایسات براساس شاخص به شاخص انجام می‌پذیرد.

1. Non Compensatory model
2. Compensatory
3. Trade off

$$A^- = \text{گزینه ایـدآل منفی}$$

$$= \{V_1^-, V_2^-, \dots, V_j^-, \dots, V_n^-\}$$

$$= \{(\min_i V_{ij} | j \in J),$$

$$(\max_i V_{ij} | j \in J') | i = 1, 2, \dots, m\}$$

به طوری که  $J = \{j = 1, 2, \dots, n | \text{سود} \text{مربوط به سود}\}$  و  $J' = \{j = 1, 2, \dots, n | \text{هزینه} \text{مربوط به هزینه}\}$ .

**قدم چهارم** - محاسبه اندازه جدائی فاصله گزینه  $A_i$  ام ایـدآل با استفاده از روش اقلیدسی بدین قرار است:

$$d_i^+ = \left\{ \sum_{j=1}^n (V_{ij} - V_j^+)^2 \right\}^{0.5}; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

فاصله گزینه  $A_i$  ام با ضد ایـدآل با استفاده از روش اقلیدسی بدین قرار است:

$$d_i^- = \left\{ \sum_{j=1}^n (V_{ij} - V_j^-)^2 \right\}^{0.5}; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

**قدم پنجم** - محاسبه نزدیکی نسبی  $A_i$  به جواب ایـدآل این نزدیکی نسبی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$cl_{i+} = \frac{d_i^-}{(d_{i+} + d_i^-)}; \quad 0 \leq cl_{i+} \leq 1; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

**قدم ششم** - رتبه بندی گزینه ها براساس ترتیب نزولی  $cl_{i+}$

### ۳- روش پیشنهادی

به روش های TOPSIS فازی موجود پنج ایراد اساسی وارد است که باعث می شود مفاهیم روش شباهت به گزینه ایده آل در این روش ها کم رنگ شوند این اشکالات به شرح زیر می باشد.

الف) از دقت لازم در محاسبات فازی برخوردار نمی باشند و علت آن عدم استفاده از اصل گسترش "زاده" در تعریف اپراتورهاست. به عنوان مثال ضرب دو عدد فازی مثلثی الزاماً فازی مثلثی نخواهد بود. لکن در عمده روش های TOPSIS فازی اینگونه فرض شده است.

ب) در روش های فعلی FTOPSIS جهت بی مقیاس سازی ماتریس ارزیابی از ماکسیمم کران های بالای

شاخص نشان دهنده ایـدآل آن بوده و بدترین ارزش موجود از آن مشخص کننده ایـدآل - منفی برای آن خواهد بود.

ب- فاصله یک گزینه از ایـدآل (یا از ایـدآل منفی) ممکن است بصورت فاصله اقلیدسی (از توان دوم) و یا به صورت مجموع قدر مطلق از فواصل خطی<sup>۴</sup> (معروف به فواصل بلوکی) محاسبه گردد، که این امر بستگی به نرخ تبادل و جایگزینی در بین شاخص ها دارد.

**قدم یکم** - تبدیل ماتریس تصمیم گیری موجود به یک ماتریس «بی مقیاس شده» با استفاده از فرمول:

$$n_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m r_{ij}^2}}$$

**قدم دوم** - ایجاد ماتریس «بی مقیاس» وزین با مفروض بودن ماتریس قطری  $W$  به عنوان ورودی به الگوریتم، یعنی:

$$W = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

$$= V =$$

$$N_D W_{n \times n} = \begin{vmatrix} V_{11}, \dots & V_{1j}, \dots & V_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{m1}, \dots & V_{mj}, \dots & V_{mn} \end{vmatrix}$$

به طوری که ND ماتریسی است که امتیازات شاخص ها در آن «بی مقیاس» و قابل مقایسه شده است، و  $W_{n \times n}$  ماتریسی است قطری که فقط عناصر قطر اصلی آن غیر صفر خواهد بود.

**قدم سوم** - مشخص نمودن جواب ایـدآل و جواب ضد ایـدآل برای گزینه ایـدآل  $A^+$  و ضدایده آل  $A^-$  تعریف کنیم:

$$A^+ = \text{گزینه ایـدآل}$$

$$= \{V_1^+, V_2^+, \dots, V_j^+, \dots, V_n^+\}$$

$$= \{(\max_i V_{ij} | j \in J),$$

$$(\min_i V_{ij} | j \in J') | i = 1, 2, \dots, m\}$$

$$Q = \{q : q \text{ is a fuzzy number}\}$$

$$\forall q \in Q \quad q \prec Z^* \quad , \quad core(Z^*) \leq core(Z) : Z \succ Z^*$$

### تعریف (۲-۳)

می‌گوییم  $Z^*$  برای مجموعه زیر یک مینیمال است اگر

$$Q = \{q : q \text{ is a fuzzy number}\}$$

$$\forall q \in Q \quad q \succ Z^* \quad , \quad core(Z^*) \geq core(Z) : Z \prec Z^*$$

برای یافتن ماکسیمال یک مجموعه فازی به شرح زیر عمل می‌شود:

$$\min core(Z)$$

$$s.t \int_0^1 x(M_{Z_x} - M_{q_x}) dx > 0 \quad \forall q \in Q$$

همچنین برای یافتن مینیمال یک مجموعه فازی به شرح زیر عمل می‌شود:

$$\max core(Z)$$

$$s.t \int_0^1 x(M_{Z_x} - M_{q_x}) dx < 0 \quad \forall q \in Q$$

چون تابع فوق یک تابع ساختنی است از الگوریتم مکاشفه‌ای GA بهره می‌بریم. در مراحل زیر الگوریتم را تشریح می‌کنیم

### قدم یکم - نرمال سازی

تبدیل ماتریس تصمیم‌گیری موجود به یک ماتریس «بی‌مقیاس شده» با استفاده از فرمول:

$$n_{ij} = \frac{r_{ij}}{\left( \sum_{i=1}^m r_{ij}^2 \right)^{.5}}$$

برای این منظور با توابع گسسته فازی مذکور ابتدا جذر نرم ۲ هر ستون محاسبه شده و سپس با عمل تقسیم فازی هر ستون بر عدد مربوطه تقسیم می‌شود. این عمل برای همه ستون‌ها و همه اوزان معیارها صورت می‌پذیرد.

### قدم دوم - موزون سازی

ایجاد ماتریس «بی‌مقیاس» وزین با مفروض بودن بردار  $W$  به عنوان ورودی به الگوریتم، یعنی:

Support عناصر یک سطر ماتریس استفاده می‌شود که قطعا هیچ‌گونه مفهوم نرمال سازی را در بر ندارد چرا که منشا این بی‌مقیاس سازی "نرم" نیست.

پ) رابطه‌های ترتیبی متفاوتی در حساب فازی برقرار است که بر الویت گزینه‌ها موثر است که در نتیجه انتخاب رنکینگ متفاوت، الویت‌ها را تغییر خواهد داد.

ت) اوزان توزیعی باید مفهوم سهم شاخص‌ها را در پی داشته باشد یعنی مجموع اوزان نرمال شده تحت یک نرم باید واحد باشد. البته در روش‌های فعلی این موضوع به هیچ وجه رعایت نشده است.

ث) در تعریف ایده‌آل و ضدایده‌آل شاخص مناسبی تعریف نشده است به عنوان مثال اگر  $V=(0.2,0.3,1)$  و  $U=(0.2,0.8,1)$  هر دو از یک ارزش برخوردار است چرا که  $U_3 = V_3 = 1$  در صورتی که تفاوت فاحشی بین این دو گزینه وجود دارد.

در اینجا ابتدا چند تعریف و قضیه را مطرح می‌کنیم سپس در زبان یا محیط‌های برنامه سازی نظیر جاوا و ابر محیط MATLAB با کمک اصل "زاده" توابع مورد نیاز به شکل گسسته ساخته می‌شود.

قضیه (۱-۳) رابطه زیر یک شبه ترتیب است:

$$P \succ Q \Leftrightarrow \int_0^1 x(M_{P_x} - M_{Q_x}) dx > 0$$

که  $M_{P_x}$  وسط  $x\_cut$  برای عدد فازی  $P$  می‌باشد. برهان: [17]

شکل گسسته این مساله با کمی اغماض برای  $n$  به حد کافی بزرگ عبارت است از

$$P \succ Q \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} (M_{P_{\frac{i}{n}}} - M_{Q_{\frac{i}{n}}}) > 0$$

لازم به توضیح است که از آنجا حوزه اعداد در روش تاپسیس عادی اعداد حقیقی هستند مفهوم ماکسیمم و مینیمم به دلیل ترتیب ارزشمیدوسی کامل معنادار است اما در فازی این مفاهیم معنادار نخواهد بود و جایگزین آنها ماکسیمال و مینیمال می‌گردد.

### تعریف (۱-۳)

می‌گوییم  $Z^*$  برای مجموعه زیر یک ماکسیمال است اگر

### قدم چهارم - محاسبه اندازه جدائی

فاصله گزینه  $i$  ام با ایدآل با استفاده از روش متریک بدین قرار است:

$$d_i^+ = \left( \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 (M_{V_{xy}} - M_{V_{jx}^+}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

فاصله گزینه  $i$  ام با آنتی ایدآل با استفاده از روش متریک بدین قرار است:

$$d_i^- = \left( \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 (M_{V_{xy}} - M_{V_{jx}^-}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

### قدم پنجم - محاسبه نزدیکی نسبی $A_i$ به جواب ایده ال

پنزدیکی نسبی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$cl_i = \frac{d_i^+}{(d_i^+ + d_i^-)}; 0 \leq cl_i \leq 1;$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

### قدم ششم - رتبه‌بندی گزینه‌ها.

براساس ترتیب نزولی  $cl_{i+}$  می‌توان گزینه‌های موجود از مسأله مفروض را رتبه‌بندی نمود.

### ۴- مثال عددی

در اینجا به صورت گرافیکی یک مثال مطرح می‌شود. فرض کنید برای سه گزینه  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  و چهار معیار  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  اوزان و ماتریس تصمیم موجود است ضمناً دو شاخص اول از جنس سود هستند و دو شاخص آخر از جنس هزینه می‌باشد. اطلاعات مساله به شرح زیر است:

$W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \approx (DM)$

$V =$  ماتریس بی مقیاس وزین

$$N_D W_{n \times n} = \begin{vmatrix} V_{11}, \dots & V_{1j}, \dots & V_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{m1}, \dots & V_{mj}, \dots & V_{mn} \end{vmatrix}$$

به طوری که ND ماتریسی است که امتیازات شاخص‌ها در آن «بی‌مقیاس» و قابل مقایسه شده است، و  $W_{n \times n}$  ماتریسی است قطری که فقط عناصر قطر اصلی آن غیرصفر خواهد بود.

برای این منظور عناصر ستون  $i$  ام رادر وزن  $i$  ام با کمک توابع مذکور ضرب می‌کنیم.

### قدم سوم - مشخص نمودن جواب ایدآل و جواب ضد ایده‌ال

برای گزینه ایدآل  $(A^+)$  و ضد ایدآل  $(A^-)$  تعریف می‌کنیم:

$$A^+ = \text{گزینه ایدآل}$$

$$= \{V_1^+, V_2^+, \dots, V_j^+, \dots, V_n^+\}$$

$$= \{(\max_{ij} V_{ij} | j \in J), (\min_{ij} V_{ij} | j \in J') | i = 1, 2, \dots, m\}$$

$$A^- = \text{گزینه ایدآل منفی}$$

$$= \{V_1^-, V_2^-, \dots, V_j^-, \dots, V_n^-\}$$

$$= \{(\min_{ij} V_{ij} | j \in J), (\max_{ij} V_{ij} | j \in J') | i = 1, 2, \dots, m\}$$

به طوری که

$$J = \{j = 1, 2, \dots, n | \text{سود}\}$$

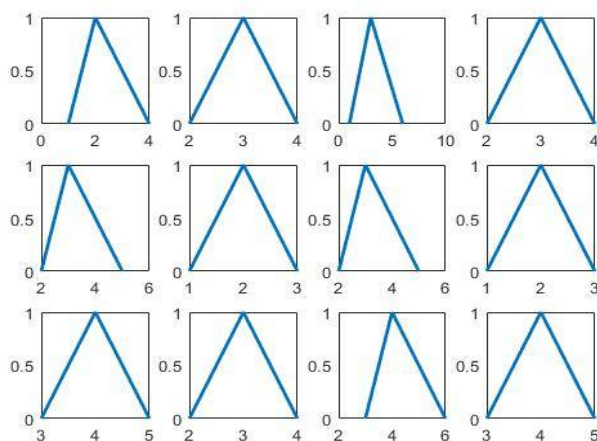
و

$$J' = \{j = 1, 2, \dots, n | \text{هزینه}\}$$

برای این منظور هر کدام از ستون‌های  $V$  مجموعه  $Q$  تلقی شده و از راهکار یافتن عنصر ما کسیمال و مینمال استفاده می‌کنیم که توسط GA بهین این دو تابع یافت می‌شود.

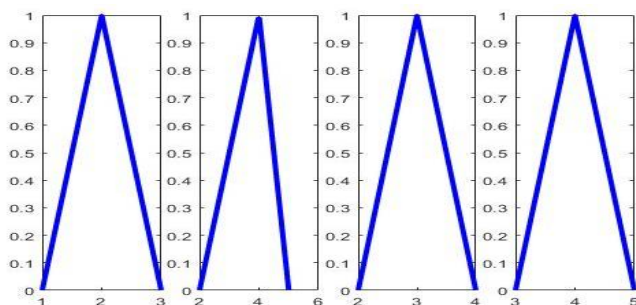


الف) ماتریس تصمیم



شکل ۴-۱ ماتریس تصمیم

ب) بردار اوزان

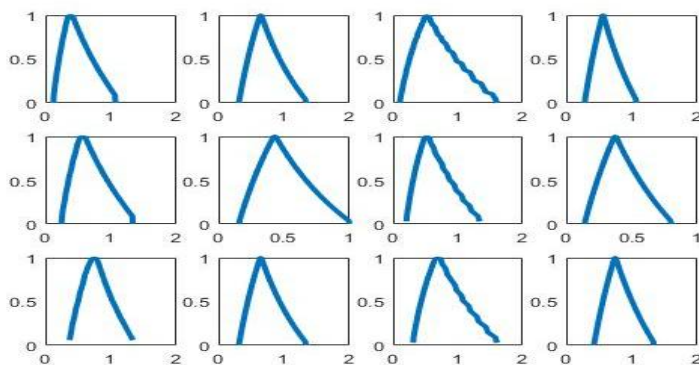


شکل ۴-۲ بردار اوزان

مرحله اول

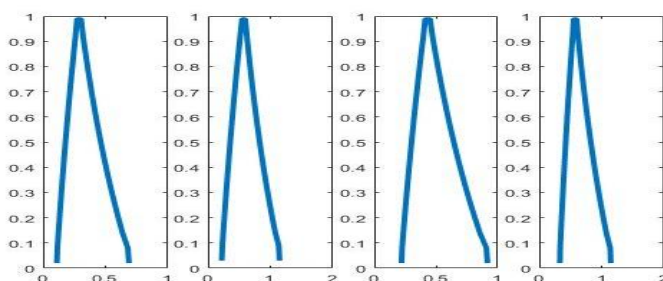
ماتریس تصمیم و بردار اوزان را نرمال می‌کنیم

الف) ماتریس تصمیم نرمال شده



شکل ۴-۳ ماتریس تصمیم نرمال شده

**ب) بردار موزون نرمال**

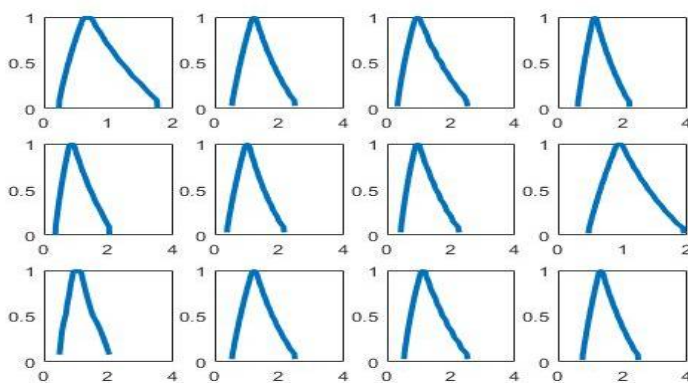


شکل ۴-۴ اوزان نرمال شده

ضرب هر ستون در مولفه نظیر وزن‌ها نرمال می‌کنیم.

**مرحله دوم**

ماتریس نرمال شده حاصل از مرحله اول را از طریق

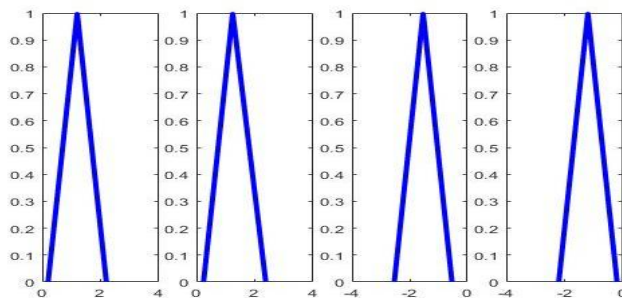


شکل ۴-۵ ماتریسی که بعد از نرمالسازی موزون شده

این قسمت شرح زیر است:

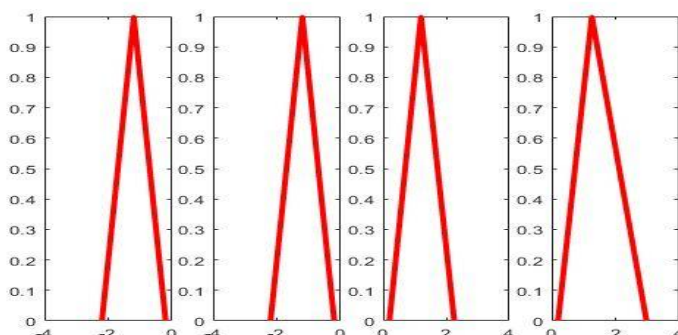
**مرحله سوم**

مشخص نمودن جواب ایدآل و جواب ایدآل-منفی که



شکل ۴-۶ بردار ایده آل

در ادامه بردار ضد ایده آل را معرفی می‌کنیم:



شکل ۴-۷ بردار ضد ایده آل

برای بردار ایده آل ضد ایده آل سعی شد با بهینه‌سازی تابعی را که در قسمت سوم ساختیم بوسیله ژنتیک الگوریتم، و روش ماکسیمال و مینیمال این بردار به‌طور دقیق کشف شوند. در ادامه با کمک متر معرفی شده فاصله هر گزینه از دوبردار مذکور یافت گردید.

در ادامه برای سه گزینه سه زوج فاصله از بردارهای ایده آل و ضد ایده آل مشاهده می‌شود

	<i>pos</i>	<i>neg</i>	<i>ind</i>
$\alpha_1$	4.27	38.54	0.099
$\alpha_2$	3.91	34.37	0.102
$\alpha_3$	46.4	2.37	0.958

### تشکر و قدردانی

این مقاله مستخرج از طرح پژوهشی با عنوان زیر در دانشگاه آزاد اسلامی واحد قم می‌باشد.  
(ارائه یک مدل پیشنهادی برای "Fuzzy TOPSIS"  
بر اساس اصل گسترش "زاده")

بنابراین گزینه اول ارجح بر دو گزینه دیگر گزینه دوم بر گزینه سوم رجحان دارد.

### ۵- نتیجه‌گیری

فرایند TOPSIS یکی از جامع‌ترین سیستم‌های طراحی شده برای تصمیم‌گیری با معیارهای چندگانه است به روش‌های TOPSIS فازی موجود ایرادات اساسی وارد است که باعث می‌شود مفاهیم روش شباهت به ایده آل در این روش‌ها کمرنگ شوند برخی از این اشکالات عبارت است از اینکه این روش‌ها از دقت لازم در محاسبات فازی برخوردار نمی‌باشند و علت آن عدم استفاده از اصل گسترش "زاده" در تعریف اپراتورهاست. به‌عنوان مثال ضرب دو عدد فازی مثلثی الزاماً فازی مثلثی نخواهد بود. لکن در عمده مقالات اینگونه فرض شده است.

در این طرح یک روش نوین با رعایت اصل زاده ابداع شده است این روش مبتنی بر استفاده از اصل زاده است بدین معنی که با کمک گسسته‌سازی و اعمال اصل گسترش اپراتورهای لازم ساخته می‌شود.

## فهرست منابع

- [9] Ting-Yu Chen, Interval-valued fuzzy TOPSIS method with leniency reduction and an experimental analysis, *Applied Soft Computing*, Volume 11, Issue 8, December 2011, Pages 4591–4606.
- [10] Ting-Yu Chen, Comparative analysis of SAW and TOPSIS based on interval-valued fuzzy sets: Discussions on score functions and weight constraints, *Applications*, Volume, 1 February 2012, Pages 1848–1861.
- [11] Young-Jou Lai, Ting-Yun Liu, Ching-Lai Hwang, TOPSIS for MODM, *European Journal of Operational Research* Volume 76, Issue 3, 11 August 1994, Pages 486–500.
- [12] Akram Zouggari, Lyes Benyouce, Simulation based fuzzy TOPSIS approach for group multi-criteria supplier selection problem, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Volume 25, Issue 3, April 2012, Pages 507–519.
- [13] Metin Celik, Selcuk Cebi, Cengiz Kahraman, I.Deha Er, Application of axiomatic design and TOPSIS methodologies under fuzzy environment for proposing competitive strategies on Turkish container ports in maritime transportation network, *Expert Systems with Applications*, Volume 36, Issue 3, Part 1, April 2009, Pages 4541–4557.
- [14] Renato A. Krohling, Vinicius C. Campanharo, Fuzzy TOPSIS for group decision making: A case study for accidents with oil spill in the sea, *Expert Systems with Applications*, Volume 38, Issue 4, April 2011, Pages 4190–4197.
- [15] Bhattacharya U., Rao J.R., Tiwari R.N.1992, Fuzzy multi-criteria facility location problem. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 51, No.3, PP. 277-287.
- [1] Hwang C.L, Yoon K. *Multiple Attributes Decision Making Methods and applications*. Berlin Heidelberg, Springer.
- [2] Ching-Lai Hwang, Young-Jou Lai, Ting-Yun Liu A new approach for multiple objective decision making, *Computers & Operations Research*, Volume 20, Issue 8, October 1993, Pages 889–899.
- [3] Liang G.S, Fuzzy MCDM based on ideal and anti ideal concept , *European Journal of Operational Research* ,112, 1999, Pages 682–691.
- [4] Chen C.T. Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment. *Fuzzy Sets and Systems*.
- [5] M.S. Osman, M.A. Abo-Sinna A.H. Amer, O.E. Emam, A multi-level non-linear multi-objective decision-making under fuzziness, *Applied Mathematics and Computation* Volume 153, Issue 1, 25 May 2004, Pages 239–252.
- [6] Jahanshahloo G.R., Hosseynzade L.F Izadikhah M., Extension of the method for decision making problem with fuzzy data, *Appl Math Comput* 181 2006p. 1544\_1555.
- [7] Wang Y.J, Lee H.S. Generalizing TOPSIS for fuzzy multiple-criteria group decisionmaking. *An International Journal Computing and Mathematics with Applications*.
- [8] Ta-Chung Chu, Yi-Chen Lin, An interval arithmetic based fuzzy TOPSIS model, *Expert Systems with Applications*, Volume 36, Issue 8, October 2009, Pages 10870–10876.

[16] Triantphyllou E, Lin C.T. Development and evaluation of five fuzzy multi attribute. decision making methods. International Journal of Approximate Reasoning.

[۱۷] رساله دکتری رضا کارگر استاد راهنما فرهاد حسینزاده و... دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات دانشکده علوم پایه زمستان ۹۲.

[۱۸] محمد جواد اصغر پور، تصمیم‌گیری‌های چند معیاره انتشارات دانشگاه تهران چاپ ششم ۱۳۸۷.

