

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هشتم، شماره سی و هفتم، مرداد و شهریور ۱۴۰۱

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# جریان لزج دوبعدی درون شکاف‌های در حال انبساط یا در حال انقباض با دیواره‌های نفوذپذیر با استفاده از روش اغتشاش پارامتری (PPM)

میراله حسینی\*

استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک (تبدیل انرژی)، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائمشهر، قائمشهر، مازندران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۱۶

## چکیده

در این مقاله مسئله جریان لایه‌ای، هم‌دما، تراکم‌ناپذیر و ویسکوز در دامنه مستطیلی که به دو دیواره متخلخل متحرک مقید شده است و سیال می‌تواند از طریق انبساط یا انقباض‌های پی‌درپی از این دیواره‌ها وارد یا خارج شود، با استفاده از تکنیک تحلیلی مبتنی بر «روش اختلال پارامتری شده (PPM)» حل می‌شود. ابتدا مفهوم این روش به اختصار بیان می‌گردد و سپس کاربردهای آن در این مسئله مورد مطالعه قرار می‌گیرند. آنگاه، نتایج با نتایج عددی مقایسه می‌شوند و اعتبار این روش‌ها سنجیده می‌شود. بعد از این اعتبارسنجی، اثر برخی پارامترهای کاربردپذیر فیزیکی تحلیل می‌شود تا کارایی PPM در این نوع مسائل نشان داده شود. نتایج گرافیکی برای بررسی تاثیر آهنگ اتساع دیواره بدون بعد ( $\alpha$ ) و عدد رینولدز نفوذ ( $Re$ ) بر سرعت، توزیع فشار نرمال و تنش برشی دیواره ارائه شده‌اند. مسئله حاضر که برای دیواره‌هایی با انبساط و انقباض کند و نفوذپذیری ضعیف طراحی شده است، یک مدل ساده برای انتقال سیالات زیستی از طریق رگ‌های در حال انقباض یا انبساط است.

**واژه‌های کلیدی:** عدد رینولدز نفوذ؛ آهنگ اتساع دیواره بدون بعد؛ روش اغتشاش پارامتری (PPM).

## ۱- مقدمه

مطالعات انتقال سیال در موجودات زیستی معمولاً به جریان یک سیال خاص درون رگ‌های در حال انقباض یا انبساط با دیواره‌های نفوذپذیر می‌پردازند. در مورد رگ دریچه‌ای که مرزهای تغییرشکل یافته دارد، انقباض متناوب دیواره، سبب ایجاد اثر پمپاژ فیزیولوژیکی می‌گردد. رفتار جریان درون لنف، مشخصه مشابهی دارد. در این مدل‌ها، گردش سیال از طریق انقباض‌های متوالی در دو ورقه نازک که منجر به همرفت رو به پایین سیال ساندویچ شده می‌گردد، ایجاد می‌شود. نفوذ از میان دیواره‌های متخلخل مشخصاً در انتقال جرم بین خون، هوا و بافت تاثیر دارد [۱]. بنابراین، در کارهای تحقیقاتی زیادی، جریان درون یک دامنه مستطیلی که با دو دیواره متخلخل متحرک مرزبندی شده است، مورد مطالعه قرار گرفته است به گونه‌ای که جریان بتواند در طول انقباض‌ها یا انبساط‌های پی‌درپی وارد یا خارج شود. داثون‌هائر<sup>۲</sup> و مجدلانی<sup>۳</sup> [۲] جریان ناپایا ناپایا درون کانال‌های در حال انبساط نیمه‌معین را با تزریق از طریق دیواره، مورد مطالعه قرار دادند. آنها دو پارامتر بدون بعد یعنی نسبت انبساط دیواره  $\alpha$  و عدد رینولدز جریان متقاطع  $Re$  را مشخصه‌یابی کردند. مجدلانی و ژو<sup>۴</sup> [۳]، جریان‌های کانال ناشی از تزریق و مکش متوسط تا شدید را در دیواره‌های در حال انبساط یا انقباض مطالعه کردند. معادله حاصل شده، با استفاده از اختلالات در عدد رینولدز جریان متقاطع  $Re$  هم به صورت عددی و هم به صورت تحلیلی حل شد. بوتروس<sup>۵</sup> و همکارانش [۴] جواب معادلات ناویر-استوکس را مطالعه کردند که جریان لایه‌ای تراکم‌ناپذیر ناپایا در لوله دایره‌ای متخلخل نیمه‌معین با تزریق یا مکش از طریق

دیواره لوله‌هایی که شعاعشان با زمان تغییر می‌کند را توصیف می‌کنند. سپس معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه چهارم حاصل، با استفاده از اختلالات در پارامتر کوچک حل شد.

این مسئله علمی با یک معادله دیفرانسیل معمولی یا جزئی مدلسازی شد. در اغلب موارد، نمی‌توان از راه‌حل‌های تحلیلی برای این مسئله استفاده کرد در نتیجه این معادله را باید با استفاده از تکنیک‌های خاص حل کرد. در سال‌های اخیر، روش‌های جدیداً توسعه یافته برای تولید جواب تحلیلی این معادله بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند؛ از جمله این روش‌ها می‌توان به روش اختلال هوموتوپي (HPM) و روش اختلال پارامتری شده (PPM) اشاره کرد [۵-۱۱].

در این مطالعه، از روش اختلال پارامتری شده برای یافتن جواب‌های تقریبی معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر جریان ویسکوز دوبعدی درون شکاف‌های در حال انبساط یا انقباض با دیواره‌های متخلخل استفاده شده و نتایج آن با راه حل عددی مقایسه شده است. روش رانگ کوتای مرتبه چهارم مورد استفاده قرار گرفته و به عنوان جواب عددی برای روایی این مدل به کار رفته است. در بخش دوم جریان سیال و معادلات حاکم بر آن استخراج خواهد شد و در بخش سوم روش اختلال پارامتری شده ارائه می‌گردد. در بخش بعد این روش جهت حل معادلات حاکم بکار برده می‌شود و در بخش بنجم نتایج حاصل ارائه خواهد شد. در بخش نهایی مقاله نیز نتایج حاصل مورد بحث و نتیجه‌گیری واقع می‌گردد.

## ۲- تحلیل جریان و فورمولبندی ریاضی

مساله یک جریان لایه‌ای، هم‌دما و تراکم‌ناپذیر را درون یک دامنه مستطیلی در نظر بگیرید که به دو سطح نفوذپذیر مقید است که سیال می‌تواند حین انقباض یا انبساط‌های پی‌درپی از طریق این دو

<sup>2</sup> Dauenhauer<sup>3</sup> Majdalani<sup>4</sup> Zhou<sup>5</sup> Boutros

$$y^* = a(t): u^* = 0,$$

$$v^* = -V_w = -\frac{a^*}{c}, \quad (۴-۲)$$

$$y^* = 0: \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0, v^* = 0,$$

$$x^* = 0: u^* = 0.$$

که در آن،  $c = \frac{a^*}{V_w}$  ضریب مکش/تزریق یا حضور

دیواره است که معیاری از نفوذپذیری دیواره است.

تابع جریان و میانگین ویسکوزیته جریان را می‌توان به کمک روابط زیر معرفی کرد:

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*}, \quad v^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*},$$

$$\xi^* = \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \quad (۵-۲)$$

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} =$$

$$\nu \left[ \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial y^{*2}} \right].$$

سطح وارد یا خارج شود. نمودار طرح‌وار مسئله در شکل ۱ نشان داده شده است.

دیواره‌ها به صورت یکنواخت با سرعت وابسته به زمان  $a^*$ ، منقبض یا منبسط می‌شوند. در دیواره فرض می‌شود که سرعت جریان ورودی سیال  $V_w$ ، مستقل از مکان است. معادلات پیوستگی و حرکت برای جریان ناپایا به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (۱-۲)$$

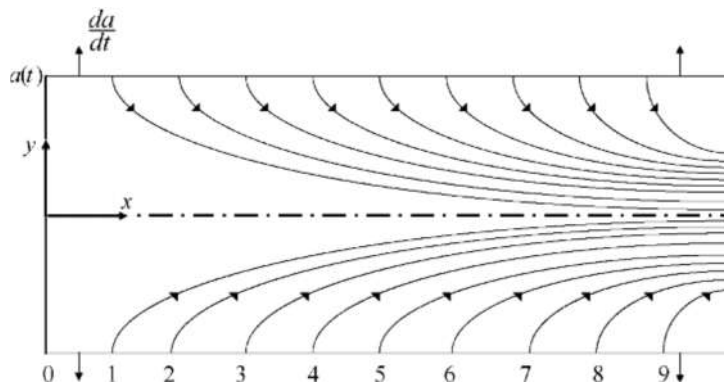
$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} =$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right], \quad (۲-۲)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} =$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right]. \quad (۳-۲)$$

در معادلات بالا،  $u^*$  و  $v^*$ ، مولفه‌های سرعت در جهات X و Y را نشان می‌دهند،  $p^*$  بیانگر فشار ابعادی است،  $\rho, \nu$  و t به ترتیب، چگالی، ویسکوزیته سینماتیک و زمان را نشان می‌دهند. شرایط مرزی به صورت زیر خواهند بود:



شکل ۱: دامنه دوبعدی با دیواره‌های متخلخل در حال انقباض یا انقباض

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*}, \quad v^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*},$$

$$\xi^* = \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \quad (۵-۲)$$

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} =$$

$$v \left[ \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial y^{*2}} \right].$$

با توجه به پایستگی جرم، می‌توان جواب مشابهی را نسبت به  $x^*$  بدست آورد [۱۲]. فرایند را به کمک روابط زیر آغاز می‌کنیم:

$$\psi^* = \frac{vx^* f^*(y, t)}{a}, \quad u^* = \frac{vx^* f_y^*}{a^2},$$

$$v^* = \frac{-vf^*(y, t)}{a}, \quad (۶-۲)$$

$$y = \frac{y^*}{a}, \quad f_y^* \equiv \frac{\partial f^*}{\partial y^*}.$$

با جایگذاری معادله (۶-۲) در معادله (۵-۲) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$u_{y^* t}^* + u_{y^* x^*}^* + v_{y^* y^*}^* = \nu u_{y^* y^* y^*}^* \quad (۷-۲)$$

به منظور حل معادله (۷-۲)، می‌توان از قانون زنجیری استفاده کرد تا رابطه زیر بدست آید:

$$f_{yyy}^* + \alpha(yf_{yyy}^* + 3f_{yy}^*) + f^* f_{yyy}^* - f_y^* f_{yy}^* - a^2 v^{-1} f_{yyt}^* = 0, \quad (۸-۲)$$

که شرایط مرزی زیر در آن برقرار هستند:

$$at \ y = 0: \quad f^* = 0, f_{yy}^* = 0, \quad (۹-۲)$$

$$at \ y = 1: \quad f^* = \text{Re}, f_y^* = 0,$$

دیواره‌ها به صورت یکنواخت با سرعت وابسته به زمان  $a^*$ ، منقبض می‌شوند. در دیواره فرض می‌شود که سرعت جریان ورودی سیال  $V_w$ ، مستقل از مکان است. معادلات پیوستگی و حرکت برای جریان ناپایا به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (۱-۲)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} =$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right],$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} =$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + v \left[ \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right]. \quad (۳-۲)$$

در معادلات بالا،  $u^*$  و  $v^*$ ، مولفه‌های سرعت در جهات  $x$  و  $y$  را نشان می‌دهند،  $P^*$  بیانگر فشار ابعادی است،  $\rho, v$  و  $t$  به ترتیب، چگالی، ویسکوزیته سینماتیک و زمان را نشان می‌دهند. شرایط مرزی به صورت زیر خواهند بود:

$$y^* = a(t): \quad u^* = 0,$$

$$v^* = -V_w = -\frac{a^*}{c}, \quad (۴-۲)$$

$$y^* = 0: \quad \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0, v^* = 0,$$

$$x^* = 0: \quad u^* = 0.$$

که در آن،  $c = \frac{a^*}{V_w}$  ضریب مکش/تزریق یا حضور

دیواره است که معیاری از نفوذپذیری دیواره است.

تابع جریان و میانگین ویسکوزیته جریان را می‌توان به کمک روابط زیر معرفی کرد:

اگر از معادله (۲-۱۴) انتگرال بگیریم، می‌توانیم

توزیع فشار نرمال را بدست آوریم. فرض کنید  $P_c$  فشار در خط مرکزی باشد، بنابراین داریم:

$$\int_{P_c}^{p(y)} dp = \int_0^y -[Re^{-1} f'' + ff' + \alpha Re^{-1}(f + yf')] dy \quad (15-2)$$

بنابراین، با استفاده از  $ff' = (f^2)' / 2$  و  $(yf')' = (f + yf')$ ، افت فشار نرمال حاصل به صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta p_n = Re^{-1} f'(0) - [Re^{-1} f' + \frac{f^2}{2} + \alpha Re^{-1} yf'] \quad (16-2)$$

کمیت مهم دیگر، تنش برشی است. تنش برشی را می‌توان به کمک قانون نیوتن برای ویسکوزیته تعیین کرد:

$$\tau^* = \mu(v_x^* + u_y^*) = \frac{\rho v^2 x^* f''}{a^3} \quad (17-2)$$

با معرفی تنش برشی بدون بعد به صورت  $\tau = \frac{\tau^*}{\rho V_w^2}$ ، داریم:

$$\tau = \frac{xf''}{Re} \quad (18-2)$$

### ۳- تحلیل روش اختلال پارامتری شده

روش اختلال پارامتری شده، برای اولین بار در سال ۱۹۹۹ در مرجع [۱۴] پیشنهاد شد. مطابق با مرجع [۱۴]، پارامتر در حال انبساط را می‌توان با انتقال خطی زیر معرفی کرد:

$$f = \varepsilon v + b \quad (1-3)$$

که در آن،  $\varepsilon$  پارامتر اختلال است. با جایگذاری معادله (۳-۱) در معادله اصلی تا هیچ جمله دیرپایی در معادله وجود نداشته باشد، می‌توانیم

که در آن،  $\alpha(t) \equiv \frac{aa^*}{\nu}$  سرعت اتساع بدون بعد دیواره است که برای انبساط مثبت و برای انقباض منفی در نظر گرفته می‌شود.

به علاوه،  $Re = \frac{aV_w}{\nu}$  عدد رینولدز نفوذ است که برای تزریق مثبت و برای مکش از دیواره منفی در نظر گرفته می‌شود. معادلات (۲-۶)، (۲-۸) و (۲-۹) را می‌توان به طریق زیر بهنجار کرد:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\psi^*}{aa^*}, & u &= \frac{u^*}{a^*}, & (10-2) \\ v &= \frac{v^*}{a}, & f &= \frac{f^*}{Re} \end{aligned}$$

و بنابراین:

$$\psi = \frac{xf'}{c}, \quad u = \frac{xf'}{c}, \quad (11-2)$$

$$v = \frac{-f}{c}, \quad c = \frac{\alpha}{Re},$$

$$\begin{aligned} f''' + \alpha(yf'' + 3f') + \\ Ref'' - Ref'f' = 0 \end{aligned} \quad (12-2)$$

شرایط مرزی (۲-۹) به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} y=0: f=0, f''=0 \\ y=1: f=1, f'=0 \end{aligned} \quad (13-2)$$

معادله (۲-۱۲) حاصل، فرمول برمان کلاسیک است [۱۳] که در آن،  $\alpha=0$  بر قرار است (کانالی با دیواره‌های پایا).

بعد از اینکه میدان جریان بدست آمد، می‌توان از طریق جایگذاری مولفه‌های سرعت در معادلات (۱-۱) و (۱-۳) گرادیان جریان نرمال را بدست آورد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} p_y &= -[Re^{-1} f'' + ff' + \\ &\alpha Re^{-1}(f + yf')] \\ p &= \frac{p^*}{\rho V_w^2}. \end{aligned} \quad (14-2)$$

$$\begin{aligned} v_1(0) = 0, v_1''(0) = 0, \\ v_1(1) = 0, v_1'(1) = 0 \end{aligned} \quad (۴-۴)$$

با حل معادلات (۴-۴) و (۵-۴) براساس شرایط مرزی داریم:

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{y^3}{2\varepsilon} + \frac{3y}{3\varepsilon}, \\ v_1 &= \frac{y^7}{56\varepsilon^2} - \frac{3y^3}{56\varepsilon^2} + \frac{y}{28\varepsilon^2} \end{aligned} \quad (۶-۵)$$

مطابق با معادله (۲-۳)، می‌توانیم با جایگذاری  $v$  در (۱-۳)، آن را بدست آوریم:

$$\begin{aligned} f(y) &= -\frac{y^3}{2} + \frac{3y}{3} + \\ &\frac{y^7}{56} - \frac{3y^3}{56} + \frac{y}{28} + \dots \end{aligned} \quad (۷-۴)$$

#### ۵- نتایج و بحث

هدف مطالعه حاضر، کاربرد PPM برای بدست آوردن جواب تحلیلی صریح جریان ویسکوز تراکم ناپذیر همدمای لایه‌ای در یک دامنه مستطیلی بود که مقید به دو دیواره متخلخل در حال حرکت بود و سیال می‌توانست در حین انقباض یا انبساط پی درپی به آن وارد یا از آن خارج شود (شکل ۱). شکل ۲، مقایسه بین نتایج روش عددی و دیگر نتایج PPM را برای  $f'(y)$  و  $\text{Re} = -1$  و  $\text{Re} = 1$  در محدوده سرعت اتساع دیواره بدون بعد نشان می‌دهد. اثبات می‌شود که توافق قابل قبولی بین جواب عددی بدست آمده از روش رانگ کوتای مرتبه چهارم و این روش‌ها وجود دارد.

پارامتر ثابت مجهول  $b$  را بدست آوریم. آنگاه، جواب به شکل زیر بسط داده می‌شود:

$$v = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i v_i = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \quad (۲-۳)$$

در اینجا،  $\varepsilon$  یک پارامتر ساماندهی ساختگی است. برخلاف روش‌های اختلال مرسوم، داریم:

$$v_0(0) = v(0), \text{ و } \sum_{i=1}^n v_i = 0.$$

#### ۴- کاربرد PPM

با در نظر گرفتن معادلات (۱۲-۲) و (۱۳-۲) و جایگزینی معادله (۱-۳) می‌توانیم روابط زیر را بدست آوریم:

$$v^{IV} + \alpha(yv'' + 3v') + \quad (۱-۴)$$

$$\text{Re}(\varepsilon v + b)v'' - \text{Re} \varepsilon v' v' = 0$$

$$\varepsilon v + b = 0, v'' = 0 \text{ at } y = 0 \quad (۲-۴)$$

$$\varepsilon v + b = 1, v' = 0 \text{ at } y = 1$$

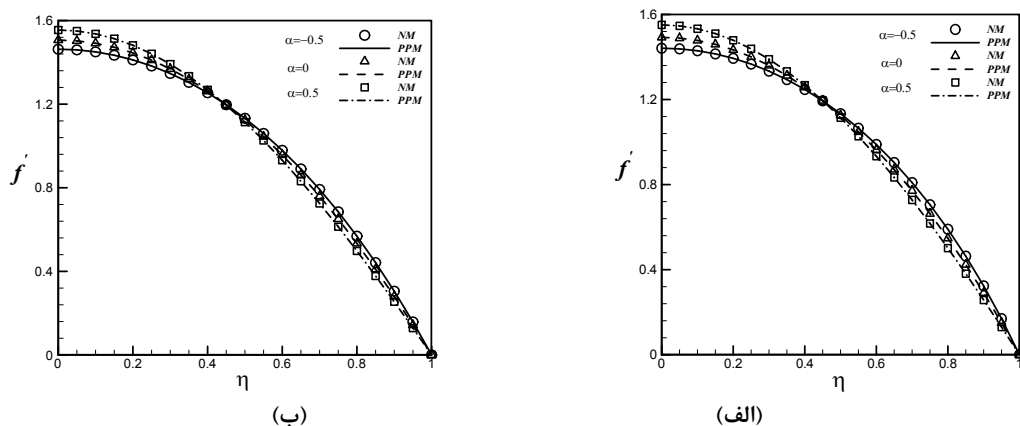
پارامتر مجهول ثابت  $b$  را می‌توان برابر با صفر در نظر گرفت ( $b = 0$ ). در نتیجه، معادله (۱-۳) باید در معادله (۱-۴) جایگزین شود و بعد از مقداری ساده‌سازی و بازآرایی بر اساس توان‌های عبارات  $\varepsilon$ ، برای حالت  $\alpha = 0, \text{Re} = 1$  داریم:

$\varepsilon^0$ :

$$\begin{aligned} v_0^{IV} &= 0 \\ v_0(0) &= 0, v_0''(0) = 0, \\ v_0(1) &= \frac{1}{\varepsilon}, v_0'(1) = 0 \end{aligned} \quad (۳-۴)$$

$\varepsilon^1$ :

$$v_1^{IV} + 5v_0 v_0''' - 5v_0' v_0'' = 0$$



شکل ۲: مقایسه بین روش عددی و جواب‌های PPM برای  $f'(y)$  وقتی (الف)  $Re = -1$  یا (ب)  $Re = 1$

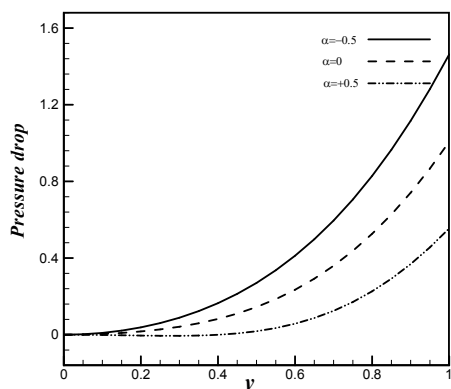
توزیع فشار در جهت نرمال افزایش می‌یابد. تنش برشی دیواره ( $\tau = xf''(1)/Re$ ) برای عدد رینولدز نفوذی  $Re = -1$  و در محدوده‌ای از سرعت‌های اتساع دیواره بدون بعد، در شکل ۴ نشان داده شده است. می‌توان از شکل ۶ دریافت که تنش برشی مطلق در راستای سطح دیواره، در جهت  $X$  افزایش می‌یابد. به علاوه، با افزایش سرعت اتساع دیواره بدون بعد، مقدار مطلق تنش برشی افزایش می‌یابد.

#### ۶- نتیجه‌گیری

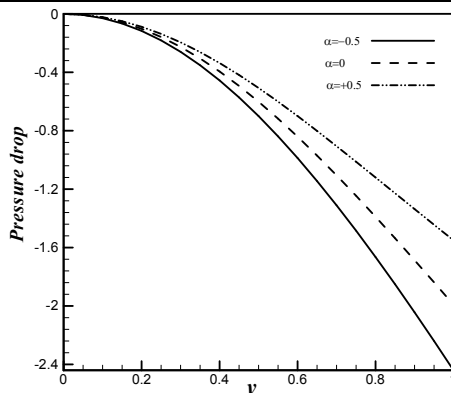
در این تحقیق، روش PPM به صورت موفقیت‌آمیز برای یافتن جواب تحلیلی جریان لایه‌ای، همدم، تراکم‌ناپذیر و ویسکوز در یک دامنه مستطیلی مقید به دو دیواره متخلخل در حال حرکت که سیال می‌تواند در حین انقباض‌ها یا انبساط‌های پی‌درپی از طریق آنها وارد یا خارج شود، به کار رفته است. دقت روش قابل توجه است. شکل‌ها مشخصاً دقت بالای این روش را برای حل این مسئله خاص و دیگر مسائل مشابه در مهندسی نشان می‌دهند.

بعد از اعتبارسنجی، نتایج مربوط به پروفایل سرعت، توزیع فشار نرمال و تنش برشی دیواره برای مقادیر مختلف اعداد رینولدز نفوذی و سرعت‌های اتساع دیواره بدون بعد ارائه می‌شوند. شکل ۲، رفتار  $f'(y)$  (یا  $uc/x$ ) را برای اعداد رینولدز نفوذی مختلف در محدوده‌ای از سرعت‌های اتساع دیواره بدون بعد نشان می‌دهد. در حالت دیواره در حال انبساط، برای هر سطح از تزریق یا مکش، افزایش  $\alpha$  منجر به افزایش سرعت محوری در نزدیکی مرکز و کاهش سرعت محوری در نزدیکی دیواره‌ها می‌گردد. دلیل این امر این است که جریان به سمت مرکز بزرگتر می‌شود تا فضای لازم برای انبساط دیواره فراهم و در نتیجه، سرعت محوری در نزدیکی مرکز بزرگتر می‌شود.

توزیع فشار در جهت نرمال برای اعداد رینولدز نفوذی مختلف در محدوده‌ای از سرعت‌های اتساع دیواره بدون بعد، در شکل ۳ نشان داده شده است. شکل ۵ نشان می‌دهد که برای هر سطح از تزریق یا مکش، تغییر فشار مطلق در جهت نرمال، در نزدیکی بخش مرکزی، کمینه است. به علاوه، با افزایش سرعت اتساع دیواره بدون بعد، مقدار مطلق

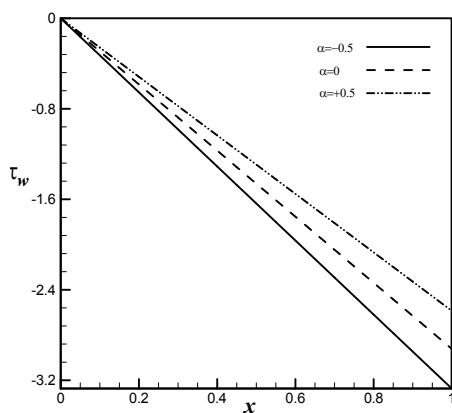


(ب)

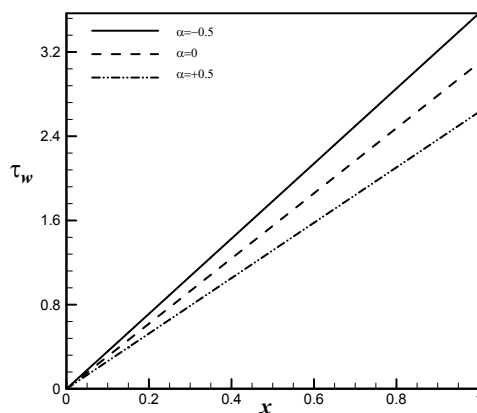


(الف)

شکل ۳: افت فشار در جهت نرمال ( $\Delta p_n$ ) که در محدوده  $\alpha$  برای (الف)  $Re = -1$  و (ب)  $Re = 1$



(ب)



(الف)

شکل ۴: تنش برشی برای یک محدوده  $\alpha$  در (الف)  $Re = -1$  و (ب)  $Re = 1$



- [9] M. Jalaal , D.D. Ganji, On Unsteady Rolling Motion of Spheres in Inclined Tubes Filled with Incompressible Newtonian Fluids, *Advanced Powder Technology*, (2010)
- [10] M. Jalaal , D.D. Ganji, G.Ahmadi, Analytical Investigation on Acceleration Motion of a Vertically Falling Spherical Particle in Incompressible Newtonian Media, *Advanced Powder Technology*, (2009)
- [11] M. Jalaal , D.D. Ganji, An Analytical Study on Motion of a Sphere Rolling Down an Inclined Plane Submerged in a Newtonian Fluid, *Powder Technology*, 198: 82–92, (2010)
- [12] J. Majdalani, C. Zhou, C.A. Dawson, Two-dimensional viscous flow between slowly expanding or contracting walls with weak permeability, *J. Biomech* 35: 1399-1403, (2002)
- [13] A.S. Berman, Laminar flow in channels with porous walls, *J. Appl. Phys.* 24: 1232\_1235, (1953)
- [14] He J.H., Recent developments in asymptotic methods for nonlinear ordinary equations, *Nonlinear Sci. Numer. Simul*, 4: 81–83, (1999)
- [1] H.N. Chang, J.S. Ha, J.K. Park, I.H. Kim, H.D. Shin, Velocity field of pulsatile flow in a porous tube, *J. Biomech.* 22: 1257-1262, (1989)
- [2] E.C. Dauenhauer, J. Majdalani, Unsteady flows in semi-infinite expanding channels with wall injection, in: *AIAA paper*, 99-3523, (1999)
- [3] J. Majdalani, C. Zhou, Moderate-to-large injection and suction driven channel flows with expanding or contracting walls, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 83: 181-196, (2003)
- [4] Y.Z. Boutros, M.B. Abd-el-Malek, N.A. Badran, H.S. Hassan, Lie-group method for unsteady flows in a semi-infinite expanding or contracting pipe with injection or suction through a porous wall, *J. Comput. Appl. Math.* 197 (2): 465-494, (2006)
- [5] J.H. He, Homotopy perturbation method for bifurcation on nonlinear problems, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 6: 207–208, (2005)
- [6] J.H. He, A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques, *Int. J. Non-linear Sci. Numer. Simul.*, 1, 51–70, (2000)
- [7] D.H. Shou, J.H. He, Application of parameter-expanding method to strongly nonlinear oscillators. *Int. J. Nonlinear. Sci. Numer. Simul* 8 (1): 121, (2007)
- [8] D. D. Ganji, H.Bararnia, S. Soleimani and E. Ghasemi, “Analytical solution of Magneto-Hydrodynamic flow over a Nonlinear Stretching Sheet”, *Mode. Phys. Lett B.* 23: 1-16, (2009)

