

وجود و عدم وجود جواب‌های مثبت و یکتائی جواب‌ها برای کلاسی از دستگاه معادلات واکنش انتشار برآمده از سیستم‌های بوم‌شناسی با شرایط مرزی غیرخطی

عبدالجواد شعبانپور^۱، سید هاشم رسولی^{۲*}

^(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۳/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۹/۲۶

چکیده

در این مقاله ما مسأله

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda v f(v); & \Omega, \\ \alpha(u) \frac{\partial u}{\partial \eta} + [1 - \alpha(u)]u = 0; & \partial \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

را که در جواب‌های مثبت آن در مرجع [۱۲] بحث شده است را به دستگاه

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda v g(v); & \Omega, \\ -\Delta v = \lambda u f(u); & \Omega, \\ \beta(u) \frac{\partial u}{\partial \eta} + [1 - \beta(u)]u = 0; & \partial \Omega, \\ \alpha(v) \frac{\partial v}{\partial \eta} + [1 - \alpha(v)]v = 0; & \partial \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

توسیع می‌دهیم که در آن Ω دامنه‌ای کراندار در R^N ($N > 1$) با مرز کراندار و هموار $\partial \Omega$ ، یا $\Omega = (0,1)$ می‌باشد، $\frac{\partial}{\partial \eta}$ بیانگر بردار نرمال خارجی روی مرز و $\lambda > 0$ پارامتری مثبت است. همچنین $f, g: [0, \infty) \rightarrow R$ توابعی از کلاس C^2 می‌باشند به طوری که $\frac{f(s)}{k_1-s} > 0$ و $\frac{g(s)}{k_2-s} > 0$ برای برخی $k_1, k_2 > 0$ که در آن $\alpha: [0, k_1] \rightarrow [0,1]$ و $\beta: [0, k_2] \rightarrow [0,1]$ توابعی از کلاس C^2 هستند. در اینجا $f(u)$ و $g(v)$ بیانگر ظرفیت نرخ رشد می‌باشند و همچنین $\alpha(v)$ و $\beta(u)$ بیانگر کسری از جمعیت باقیمانده در مرز منطقه مورد بحث هستند. λ پارامتر مربوط به بُعد و رشد انتشار منطقه می‌باشد. در حالت خاص ما روی مدلی بحث می‌کنیم که سرعت ظرفیت رشد، برای u و v های کوچک می‌باشد که مدل مربوط به چرای گیاه‌خواران نیز از این گونه است. حالاتی را بحث می‌کنیم که در آن $\alpha'(s) \geq 0$ وقتی که $s \in [0, k_1]$ و نیز $\beta'(s) \geq 0$ وقتی که $s \in [0, k_2]$ باشد که بیانگر چگالی منفی وابسته به پراکندگی گونه‌ها روی مرز می‌باشد. برای اثبات قضایا در این مقاله از جواب‌های بالایی و پائینی کمک می‌گیریم.

واژه‌های کلیدی: جواب‌های مثبت، جواب‌های بالایی و پائینی، شرایط مرزی دیریکله، شرایط مرزی نیومن و رابین، مسأله لاپلاس، واکنش انتشار، دینامیک جمعیت، اثر آلی.

۱. مقدمه

در این مقاله به بررسی جواب‌های مثبت حالت پایای مدل بوم‌شناسی مانند مسأله زیر می‌پردازیم:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda v g(v); & \Omega, \\ -\Delta v = \lambda u f(u); & \Omega, \\ \beta(u) \frac{\partial u}{\partial \eta} + [1 - \beta(u)]u = 0; & \partial\Omega, \\ \alpha(v) \frac{\partial v}{\partial \eta} + [1 - \alpha(v)]v = 0; & \partial\Omega, \end{cases} \quad (۳)$$

که در آن درصد سرعت رشد ظرفیت f و g و همچنین α و β در شرایط زیر صدق می‌کنند:
 $f, g \in C^2[0, \infty)(H_1)$ ، علاوه بر آن دو تابع $h_1, h_2: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ از کلاس C^2 و ثابت‌های $k_1, k_2 > 0$ وجود دارند طوری که $f(s) = (k_1 - s)h_1(s)$ و $g(s) = (k_2 - s)h_2(s)$
 (H_2) توابع $\alpha: [0, k_1] \rightarrow [0, 1]$ و $\beta: [0, k_2] \rightarrow [0, 1]$ از کلاس C^2 هستند به طوری که $\alpha(s) \geq 0$
 برای $s \in [0, k_1]$ و همچنین $\beta(t) \geq 0$ برای $t \in [0, k_2]$.
 ویژگی اصلی توابع غیرخطی f و g آن است که هر دوی آنها به ترتیب در نقاط k_1 و k_2 نقطه صفر افتان هستند
 (که همان ظرفیت حمل می‌باشند).

فرض (H_1) شامل حالت رشد لجستیکی مانند $f(u) = f_1(u) = 1 - \frac{u}{k_1}$ و $g(v) = g_1(v) = 1 - \frac{v}{k_2}$
 می‌باشد. حالت آلی ضعیف نیز به صورت $f(u) = f_2(u) = \alpha - u - \frac{1}{1+mu}$ و $g(v) = g_2(v) = b - v - \frac{1}{1+nv}$
 است. (منظور ما از آلی ضعیف رشد سرانه مثبت و افزایشی برای چگالی‌های کوچک است) و موردی که درگیر چرا باشد به صورت‌های $f(u) = f_3(u) = 1 - \frac{u}{c} - d \frac{u}{1+u^2}$ ، $c > 0$ ، $d > 0$ ، $g(v) = g_3(v) = 1 - \frac{v}{e} - p \frac{v}{1+v^2}$ ، $e > 0$ ، $p > 0$ می‌باشد.

شرط مرزی نشان دهنده تنش بین اعضای گونه است که تمایل دارند وقتی به مرز می‌رسند منطقه را ترک کنند و
 یا در منطقه باقی بمانند. با افزایش مقادیر $\alpha(v)$ و $\beta(u)$ تمایل به باقی ماندن در منطقه قوی‌تر می‌شود. به طور
 دقیق‌تر، توابع $\alpha(v)$ و $\beta(u)$ در شرایط مرزی مربوط به کسری از گونه‌ها هستند که وقتی به مرز آن می‌رسند در
 منطقه باقی می‌مانند.

توجه داشته باشید در مسأله (۲) وقتی که $\alpha, \beta \equiv 0$ باشد شرایط مرزی دیریکله (خصمانه) را داریم، و زمانی که
 $\alpha, \beta \equiv 1$ باشد شرط مرزی نیومن را داریم و وقتی $\alpha, \beta \equiv c$ باشد که در آن c یک عدد ثابت است و $c \notin \{0, 1\}$
 آنگاه شرط مرزی رابین را خواهیم داشت.

در چند دهه گذشته، چندین محقق اغلب مواردی را بررسی نموده‌اند که یک ثابت، که نشان‌دهنده مهاجرت وابسته
 به چگالی در مرز است وجود ندارد. کاهش α و β نشان‌دهنده پراکندگی وابسته به چگالی مثبت است، در حالی
 که افزایش α و β نشان‌دهنده پراکندگی وابسته به چگالی منفی است.

کانتزل^۱ و کاسنر^۲ حالتی از تراکم را بررسی کردند که بستگی به پراکندگی در رشد لجستیکی داشته است (مراجع
 [۱]، [۳]، [۴] را ببینید). همچنین نتایج بیشتر در زمینه رشد لجستیکی را می‌توانید در مراجع ([۶]، [۸]، [۹]،
 [۱۱]، [۱۰]، [۷]) ملاحظه کنید. برای مطالعه بیشتر در خصوص رشد آلی ضعیف می‌توانید به مراجع ([۵]، [۶])
 مراجعه کنید.

^۱ Cantrell^۲ Cosner

ما وجود، عدم وجود و منحصر به فرد بودن جواب‌های مثبت را مورد بحث قرار خواهیم داد. نتایج مان را برای حالت $\alpha(0), \beta(0) > 0$ در نظر می‌گیریم. در سراسر این مقاله، ثابت‌های $\{\alpha_*, \beta_*\} \in (0, 1)$ و λ_* نشان‌دهنده مقدار ویژه اصلی مسأله زیر است

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda v; & \Omega, \\ -\Delta v = \lambda u; & \Omega, \\ \beta_* \frac{\partial u}{\partial \eta} + [1 - \beta_*]u = 0; & \partial\Omega, \\ \alpha_* \frac{\partial v}{\partial \eta} + [1 - \alpha_*]v = 0; & \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

که در آن $\alpha_* = \alpha(0), \beta_* = \beta(0)$. فرض کنید $\phi_{\alpha_*}, \phi_{\beta_*}$ توابع ویژه متناظر نرمال شده با شرط $\phi_{\alpha_*} > 0$ و $\phi_{\beta_*} > 0$ روی $\bar{\Omega}$ باشند و همچنین با این شرط که $||\phi_{\alpha_*}|| = ||\phi_{\beta_*}|| = 1$. توجه کنید که $\lambda_{\alpha_*}, \lambda_{\beta_*}$ به ترتیب توابع کاهشی از α_* و β_* هستند و نیز $\{\lambda_{\alpha_*}, \lambda_{\beta_*}\} \in (0, \lambda_1)$ و مقدار ویژه اصلی مسأله مقدار مرزی دیریکله است (به [۲] مراجعه کنید). نتایج وجود و عدم وجود زیر را برای مسأله (۲) مشخص می‌کنیم.

۲. معرفی قضایای مهم و یک لم

قضیه ۱. فرض کنید $\beta(0) > 0, \alpha(0) > 0$ و $\alpha_m = \max_{s \in [0, k_1]} \alpha(s)$ و $\beta_m = \max_{s \in [0, k_2]} \beta(s)$ و نیز داریم $f_{max} = \max_{s \in [0, k_1]} f(s)$ و $g_{max} = \max_{s \in [0, k_2]} g(s)$ و همچنین $\bar{\lambda}_1 = \frac{\lambda_{\alpha(0)}}{k_1 h_1(0)}$ و $\bar{\lambda}_2 = \frac{\lambda_{\beta(0)}}{k_2 h_2(0)}$ باشد، حال داریم:

(۱) اگر $\lambda > \bar{\lambda} = \max\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2\}$ باشد در این صورت یک $\alpha \in (0, 1)$ وجود دارد به طوری که مسأله (2) یک جواب $(u, v) \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$ با شرط $u, v > 0$ روی $\bar{\Omega}$ خواهد داشت.

(۲) اگر $\lambda < \min\{\frac{\lambda_{\alpha_m}}{f_{max}}, \frac{\lambda_{\beta_m}}{g_{max}}\}$ و $\{\alpha_m, \beta_m\} \subset (0, 1)$ جواب مثبت ندارد.

اکنون در زیر به بیان دو قضیه می‌پردازیم که جواب‌های یکتای مسأله (۲) را مورد بررسی قرار می‌دهند.

قضیه ۲. فرض کنید $\alpha(0), \beta(0), \alpha(k_1), \beta(k_2), \hat{\beta}(k_2)$ همگی مثبت باشند و همچنین $\alpha(k_1) = \beta(k_2) = 1$ در این صورت یک $\lambda_0 > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $\lambda > \lambda_0$ مسأله (۲) فقط یک جواب ثابت مانند $(u, v) = (k_2, k_1)$ خواهد داشت.

قضیه ۳. فرض کنید $\alpha(0), \beta(0) > 0$ و $\alpha(k_1), \beta(k_2) < 1$ اگر مقادیر $\delta_1, \delta_2 > 0$ موجود باشند به طوری که $\hat{\beta}(u), \hat{\alpha}(v)$ به ترتیب روی $v \in (k_1 - \delta_1, k_1]$ و $u \in (k_2 - \delta_2, k_2]$ برابر صفر باشند در این صورت مسأله (۲) جواب مثبت منحصر به فرد دارد، در صورتی که $\lambda \gg 1$.

لم. فرض کنید $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$ یک جواب مثبت مسأله (۲) باشد. آنگاه $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$ به طور یکنواخت در $\bar{\Omega}$ به (k_2, k_1) میل می‌کند، وقتی که λ_n به سمت بینهایت میل کند. یعنی

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} (u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n}) = (k_2, k_1)$$

به طور یکنواخت (مرجع [۱۲] را ببینید).

۳. اثبات قضایا

در این بخش قصد داریم وجود، یکتائی و عدم وجود نتایجمان را مورد بررسی قرار داده و اثبات نمائیم.

اثبات قضیه ۱.

اثبات (۱): فرض کنید $\emptyset_{\alpha(0)}$ و $\emptyset_{\beta(0)}$ توابع ویژه نرمال شده متناظر با مقادیر ویژه $\lambda_{\alpha(0)}$ و $\lambda_{\beta(0)}$ از مسأله (۴) باشند که در آن $\alpha_* = \alpha(0)$ و $\beta_* = \beta(0)$ قرار می‌دهیم $(\psi_1, \psi_2) = (\varepsilon \emptyset_{\alpha(0)}, \varepsilon \emptyset_{\beta(0)})$. حال توابع H_1 و H_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_1(s) = \lambda s f(s) - \lambda_{\alpha(0)} s$$

$$H_2(s) = \lambda s g(s) - \lambda_{\beta(0)} s$$

داریم $H_1(0) = 0$ و $H_2(0) = 0$. بنابراین خواهیم داشت

$$\dot{H}_1(s) = \lambda f(s) + \lambda s \dot{f}(s) - \lambda_{\alpha(0)}$$

$$\dot{H}_2(s) = \lambda g(s) + \lambda s \dot{g}(s) - \lambda_{\beta(0)}$$

از این رو به دست می‌آوریم:

$$\dot{H}_1(0) = \lambda f(0) - \lambda_{\alpha(0)} > 0$$

(نابرابری اخیر از آنجایی که دست آمد که داشتیم $f(s) = (k_1 - s)h_1(s)$ لذا $f(0) = k_1 h_1(0)$ همچنین بنا به این فرض که $\frac{\lambda_{\alpha(0)}}{k_1 h_1(0)} \leq \max\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2\} = \bar{\lambda} < \lambda$ آنگاه $\lambda k_1 h_1(0) > \lambda_{\alpha(0)}$ بنابراین $(\lambda f(0) - \lambda_{\alpha(0)}) > 0$ به طور مشابه به دست می‌آوریم

$$\dot{H}_2(0) = \lambda g(0) - \lambda_{\beta(0)} > 0$$

بنابراین، برای $\varepsilon \approx 0$ داریم $H_1(\varepsilon \emptyset_{\alpha(0)}), H_2(\varepsilon \emptyset_{\beta(0)}) \geq 0$ و از این رو خواهیم داشت

$$\begin{aligned} -\Delta \psi_1 &= -\Delta(\varepsilon \emptyset_{\alpha(0)}) \\ &= \varepsilon(-\Delta \emptyset_{\alpha(0)}) \\ &= \varepsilon \lambda_{\beta(0)} \emptyset_{\beta(0)} \\ &= \lambda_{\beta(0)} \psi_2 \\ &\leq \bar{\lambda} k_2 h_2(0) \psi_2 \\ &\leq \lambda \psi_2 g(\psi_2). \end{aligned}$$

(از آنجائیکه g تابعی پیوسته است و داریم $\lambda \geq \bar{\lambda} = \max\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2\}$ ، $\bar{\lambda}_2 = \frac{\lambda_{\beta(0)}}{k_2 h_2(0)}$ بنا به محاسبه

فوق به دست آوردیم $-\Delta \psi_1 \leq \lambda \psi_2 g(\psi_2), x \in \Omega$

با استدلالی مشابه بالا، به دست می‌آوریم $-\Delta \psi_2 \leq \lambda \psi_1 f(\psi_1), x \in \Omega$. همچنین روی مرز داریم:

$$\begin{aligned} \beta(\psi_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + [1 - \beta(\psi_1)] \psi_1 &= \beta(\psi_1) \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + \frac{1 - \beta(\psi_1)}{\beta(\psi_1)} \psi_1 \right] \\ &= \beta(\psi_1) \psi_1 \left[\frac{1 - \beta(\psi_1)}{\beta(\psi_1)} - \frac{1 - \beta(0)}{\beta(0)} \right] \\ &= \beta(\psi_1) \psi_1 \left[\frac{\beta(0) - \beta(\psi_1)}{\beta(0) \cdot \beta(\psi_1)} \right] \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

(از آنجائیکه β تابعی غیرکاهشی است، از $0 \leq \psi_1$ به دست می‌آوریم $\beta(0) \leq \beta(\psi_1)$ و لذا $\beta(0) - \beta(\psi_1) \leq 0$ به طریق مشابه داریم:

$$\alpha(\psi_2) \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} + [1 - \alpha(\psi_2)] \psi_2 \leq 0$$

از این رو $(\psi_1, \psi_2) = (\varepsilon \phi_{\alpha(0)}, \varepsilon \phi_{\beta(0)})$ یک جواب پایینی برای مسأله (۲) خواهد بود، زمانی که $\varepsilon \approx 0$. به آسانی می‌توان نشان داد که $(\phi_1, \phi_2) \equiv (k_1, k_2)$ یک جواب بالایی برای مسأله (۲) می‌باشد. از آنجائیکه برای $i = 1, 2$ داریم $\psi_i < \phi_i$ که در آن $\varepsilon \approx 0$. از لم معروف و شناخته شده‌ی مربوط به جواب‌های بالایی و پائینی نتیجه می‌شود که (u, v) یک جواب برای مسأله (۲) خواهد بود که در آن $(u, v) \in [(\psi_1, \psi_2), (\phi_1, \phi_2)]$. علاوه بر آن در $\bar{\Omega}$ داریم $u, v > 0$ ، و نیز $\phi_{\alpha(0)} > 0, \phi_{\beta(0)} > 0$. (از آنجائیکه $0 < \phi_{\alpha(0)} = \psi_1 \leq u \leq \phi_1$ آنگاه $u > 0$ ، به طریق مشابه خواهیم داشت $v > 0$).

اثبات (۲): اینک عدم وجود جواب را به کمک برهان خلف ثابت می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم یک جواب مثبت $(u, v) \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega}) \times C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$ برای مسأله (۲) وجود دارد که در آن $\lambda < \min\{\frac{\lambda_{\alpha_m}}{f_{\max}}, \frac{\lambda_{\beta_m}}{g_{\max}}\}$ و λ_{β_m} مقادیر ویژه، ϕ_{β_m} و ϕ_{α_m} توابع ویژه متناظر آنها هستند و داریم

$$\alpha_m = \max_{s \in [0, k_1]} \alpha(s) \\ \beta_m = \max_{s \in [0, k_2]} \beta(s).$$

برای اثبات این قسمت دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $u \geq v$ باشد آنگاه اولین معادله (۲) را در ϕ_{β_m} ضرب کرده و روی Ω انتگرال می‌گیریم، لذا داریم:

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \phi_{\beta_m} \Delta u dx &= \lambda \int_{\Omega} \phi_{\beta_m} v g(v) dx \\ \text{با استفاده از اتحاد گرین} \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial \phi_{\beta_m}}{\partial \eta} - \phi_{\beta_m} \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds &= \int_{\Omega} u \Delta \phi_{\beta_m} - \phi_{\beta_m} \Delta u dx \\ -\int_{\Omega} \phi_{\beta_m} \Delta u dx &= \int_{\Omega} u \Delta \phi_{\beta_m} dx + \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial \phi_{\beta_m}}{\partial \eta} - \phi_{\beta_m} \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds \\ &= \lambda_{\beta_m} \int_{\Omega} u \phi_{\beta_m} dx + \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial \phi_{\beta_m}}{\partial \eta} - \phi_{\beta_m} \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds \end{aligned}$$

آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial \phi_{\beta_m}}{\partial \eta} - \phi_{\beta_m} \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds &= \lambda \int_{\Omega} v g(v) \phi_{\beta_m} dx - \lambda_{\beta_m} \int_{\Omega} u \phi_{\beta_m} dx \\ &\leq \lambda \int_{\Omega} v g(v) \phi_{\beta_m} dx - \lambda_{\beta_m} \int_{\Omega} v \phi_{\beta_m} dx \\ &= (\lambda g(v) - \lambda_{\beta_m}) \int_{\Omega} v \phi_{\beta_m} dx \\ &\leq (\lambda g_{\max} - \lambda_{\beta_m}) \int_{\Omega} v \phi_{\beta_m} dx \\ &< 0 \end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial \phi_{\beta_m}}{\partial \eta} - \phi_{\beta_m} \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds &= \int_{\partial\Omega} (-u \frac{1 - \beta_m}{\beta_m} \phi_{\beta_m} + \phi_{\beta_m} \frac{1 - \beta(u)}{\beta(u)} u) ds \\ &= \int_{\partial\Omega} (\frac{1 - \beta(u)}{\beta(u)} - \frac{1 - \beta_m}{\beta_m}) u \phi_{\beta_m} ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\beta_m - \beta(u)}{\beta_m \beta(u)} u \phi_{\beta_m} ds \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

و این یک تناقض است.

حالت دوم: اگر $u \leq v$ باشد معادله دوم در (۲) را در ϕ_{α_m} ضرب کرده و روی Ω انتگرال می‌گیریم، لذا داریم:

$$-\int_{\Omega} \phi_{\alpha_m} \Delta v dx = \lambda \int_{\Omega} \phi_{\alpha_m} u f(u) dx$$

با استفاده از قضیه گرین $(\int_{\Omega} v \Delta \phi_{\alpha_m} - \phi_{\alpha_m} \Delta v) dx = \int_{\partial \Omega} (v \frac{\partial \phi_{\alpha_m}}{\partial \eta} - \phi_{\alpha_m} \frac{\partial v}{\partial \eta}) ds$ داریم.

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \phi_{\alpha_m} \Delta v dx &= \int_{\Omega} v \Delta \phi_{\alpha_m} dx + \int_{\partial \Omega} (v \frac{\partial \phi_{\alpha_m}}{\partial \eta} - \phi_{\alpha_m} \frac{\partial v}{\partial \eta}) ds \\ &= \lambda_{\alpha_m} \int_{\Omega} v \phi_{\alpha_m} dx + \int_{\partial \Omega} (v \frac{\partial \phi_{\alpha_m}}{\partial \eta} - \phi_{\alpha_m} \frac{\partial v}{\partial \eta}) ds \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega} (v \frac{\partial \phi_{\alpha_m}}{\partial \eta} - \phi_{\alpha_m} \frac{\partial v}{\partial \eta}) ds &= \lambda \int_{\Omega} u f(u) \phi_{\alpha_m} dx - \lambda_{\alpha_m} \int_{\Omega} v \phi_{\alpha_m} dx \\ &\leq \lambda \int_{\Omega} u f(u) \phi_{\alpha_m} dx - \lambda_{\alpha_m} \int_{\Omega} u \phi_{\alpha_m} dx \\ &= (\lambda f(u) - \lambda_{\alpha_m}) \int_{\Omega} u \phi_{\alpha_m} dx \\ &\leq (\lambda f_{\max} - \lambda_{\alpha_m}) \int_{\Omega} u \phi_{\alpha_m} dx \\ &< 0 \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega} (v \frac{\partial \phi_{\alpha_m}}{\partial \eta} - \phi_{\alpha_m} \frac{\partial v}{\partial \eta}) ds &= \int_{\partial \Omega} (-v \frac{1 - \alpha_m}{\alpha_m} \phi_{\alpha_m} + \phi_{\alpha_m} \frac{1 - \alpha(v)}{\alpha(v)} v) ds \\ &= \int_{\partial \Omega} (\frac{1 - \alpha(v)}{\alpha(v)} - \frac{1 - \alpha_m}{\alpha_m}) v \phi_{\alpha_m} ds \\ &= \int_{\partial \Omega} (\frac{\alpha_m - \alpha(v)}{\alpha_m \alpha(v)} v \phi_{\alpha_m} ds \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

که این هم یک تناقض است.

بنابراین در هر دو حالت به تناقض رسیدیم، لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

اثبات قضیه ۲. قضیه (۲) را به کمک برهان خلف ثابت می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$ دنباله‌ای از جواب‌های مسأله (۲) برای هر λ_n باشد. از این به بعد برای راحتی کار به جای نمایش $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$ از نماد (u_n, v_n) استفاده می‌کنیم. طبق لم بالا برای $\delta_2 > 0$ و برای n های بزرگ داریم $u_n \geq k_2 - \delta_2$ و برای $\delta_1 > 0$ و برای n های بزرگ داریم $v_n \geq k_1 - \delta_1$ جواب یکتای مسأله زیر باشد:

$$\begin{cases} -\Delta \xi = 1; & \Omega, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} + l \xi = 0; & \partial \Omega, \end{cases} \quad (5)$$

(که در آن $l > 0$ بعداً انتخاب می‌شود) و فرض کنید $z_n = (k_2 - u_n) \xi$ و $w_n = (k_1 - v_n) \xi$ به وضوح $w_n \not\equiv k_1$ و همچنین $z_n \not\equiv k_2$. ابتدا نشان می‌دهیم w_n و z_n در دستگاه زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\frac{1}{\xi^2} \nabla z_n) - \frac{z_n}{\xi} \Delta \frac{1}{\xi} + \lambda_n \frac{w_n}{\xi^2} v_n h_1(v_n) = 0 & \Omega, \\ \frac{\partial z_n}{\partial \eta} + [l - \frac{1 - \alpha(u)}{k_2 - u_n} \cdot \frac{u_n}{\alpha(u_n)}] z_n = 0; & \partial \Omega, \end{cases} \quad (6)$$

برای این منظور قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} (I) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\xi^2} \nabla z_n \right) \\ (II) = \Delta \frac{1}{\xi} \\ (III) = \lambda_n \frac{w_n}{\xi^2} v_n h_1(v_n) \end{cases} \quad (V)$$

جهت راحتی قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} (I) &= -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\xi^2} \nabla z_n \right) = -\frac{-2\xi \nabla \xi}{\xi^4} \nabla z_n - \Delta z_n \frac{1}{\xi^2} \\ &= \frac{2}{\xi^3} \nabla \xi \cdot \nabla (k_2 - u_n) \xi - \frac{1}{\xi^2} \cdot \nabla (k_2 - u_n) \xi \\ (II) &= \Delta \frac{1}{\xi} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\xi^2} \nabla \xi \right) = \nabla \cdot \left(\frac{-\nabla \xi}{\xi^2} \right) = -\frac{\Delta \xi \cdot \xi^2 - 2\xi |\Delta \xi|^2}{\xi^4} = -\frac{1}{\xi^2} \Delta \xi + \frac{2}{\xi^3} |\Delta \xi|^2 \\ (III) &= \lambda_n \frac{w_n}{\xi^2} v_n h_1(v_n) = \lambda_n \frac{(k_1 - u_n) \xi}{\xi^2} v_n h_1(v_n) = \lambda_n v_n \frac{(k_1 - u_n) \xi}{\xi^2} h_1(v_n) \\ &= \lambda_n v_n \frac{f(v_n)}{\xi} \end{aligned}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} (I) - \frac{z_n}{\xi} (II) &= \frac{2}{\xi^3} \nabla \xi \cdot \nabla (k_2 - u_n) \xi - \frac{1}{\xi^2} \Delta (k_2 - u_n) \xi - \frac{(k_2 - u_n) \xi}{\xi} \left(-\frac{1}{\xi^2} \Delta \xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\xi^3} |\nabla \xi|^2 \right) \\ &= \frac{2k_2}{\xi^3} |\nabla \xi|^2 - \frac{2}{\xi^3} \nabla \xi \cdot \nabla (u_n \xi) - \frac{k_2}{\xi^2} \Delta \xi + \frac{1}{\xi^2} \Delta (u_n \xi) \\ &= \frac{2k_2}{\xi^3} |\nabla \xi|^2 - \frac{2}{\xi^3} \nabla \xi \cdot \nabla (u_n \xi) - \frac{k_2}{\xi^2} \Delta \xi + \frac{1}{\xi^2} [\nabla \cdot (\nabla (u_n \xi))] + \frac{k_2 - u_n}{\xi^2} \Delta \xi \\ &\quad - \frac{2(k_2 - u_n)}{\xi^3} |\nabla \xi|^3 \\ &= \frac{2k_2}{\xi^3} |\nabla \xi|^2 - \frac{2}{\xi^3} \nabla \xi (\nabla u_n \xi + u_n \nabla \xi) - \frac{k_2}{\xi^2} \Delta \xi + \frac{2 \nabla \xi \nabla u_n}{\xi^2} + \frac{\Delta u_n}{\xi} + \frac{u_n \Delta \xi}{\xi^2} \\ &\quad + \frac{k_2 \Delta \xi}{\xi^2} - \frac{u_n \Delta \xi}{\xi^2} - \frac{2k_2}{\xi^3} |\nabla \xi|^2 - \frac{2u_n}{\xi^3} |\nabla \xi|^2 = \frac{\Delta u_n}{\xi} = -\lambda_n v_n \frac{f(v_n)}{\xi} \end{aligned}$$

بنابراین به دست آوردیم

$$(I) - \frac{z_n}{\xi} (II) + (III) = -\lambda_n v_n \frac{f(v_n)}{\xi} + \lambda_n v_n \frac{f(v_n)}{\xi} = 0$$

یعنی

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{\xi^2} \nabla_{z_n} \right) - \frac{z_n}{\xi} \Delta \frac{1}{\xi} + \lambda_n \frac{w_n}{\xi^2} v_n h_1(v_n) = 0; \quad \Omega$$

اینک رابطه دوم را در مسأله بالا ثابت می‌کنیم، یعنی نشان می‌دهیم:

$$\frac{\partial z_n}{\partial \eta} + \left[l - \frac{1 - \alpha(u)}{k_2 - u_n} \cdot \frac{u_n}{\alpha(u_n)} \right] z_n = 0; \quad \partial \Omega,$$

برای این منظور قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} (I) = \frac{\partial z_n}{\partial \eta} \\ (II) = \left[l - \frac{1 - \alpha(u)}{k_2 - u_n} \cdot \frac{u_n}{\alpha(u_n)} \right] z_n = 0 \end{cases} \quad (8)$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} (I) &= \frac{\partial z_n}{\partial \eta} = \frac{\partial [(k_2 - u_n)\xi]}{\partial \eta} = \frac{\partial (k_2 - u_n)}{\partial \eta} \xi + \frac{\partial \xi}{\partial \eta} (k_2 - u_n) \\ &= -\xi \frac{\partial u_n}{\partial \eta} + (k_2 - u_n) \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \xi \frac{1 - \alpha(u_n)}{\alpha(u_n)} u_n - (k_2 - u_n) l \xi \\ (II) &= \left[l - \frac{1 - \alpha(u)}{k_2 - u_n} \cdot \frac{u_n}{\alpha(u_n)} \right] z_n = \left[l - \frac{1 - \alpha(u)}{k_2 - u_n} \cdot \frac{u_n}{\alpha(u_n)} \right] (k_2 - u_n) \xi \\ &= (k_2 - u_n) l \xi - \xi \frac{1 - \alpha(u_n)}{\alpha(u_n)} u_n \end{aligned}$$

بنابراین به دست آوردیم:

$$\begin{aligned} (I) + (II) &= \left[\xi \frac{1 - \alpha(u_n)}{\alpha(u_n)} u_n - (k_2 - u_n) l \xi \right] + \left[(k_2 - u_n) l \xi - \xi \frac{1 - \alpha(u_n)}{\alpha(u_n)} u_n \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

یعنی روی مرز داریم:

$$\frac{\partial z_n}{\partial \eta} + \left[l - \frac{1 - \alpha(u)}{k_2 - u_n} \cdot \frac{u_n}{\alpha(u_n)} \right] z_n = 0; \quad \partial \Omega,$$

لذا نشان دادیم w_n و z_n در دستگاه زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\xi^2} \nabla_{z_n} \right) - \frac{z_n}{\xi} \Delta \frac{1}{\xi} + \lambda_n \frac{w_n}{\xi^2} v_n h_1(v_n) = 0; & \Omega, \\ \frac{\partial z_n}{\partial \eta} + \left[l - \frac{1 - \alpha(u)}{k_2 - u_n} \cdot \frac{u_n}{\alpha(u_n)} \right] z_n = 0; & \partial \Omega, \end{cases} \quad (9)$$

حال طرفین رابطه اول در بالا را در $w_n z_n$ ضرب کرده و روی Ω انتگرال می‌گیریم، لذا داریم:

$$\begin{aligned} &\lambda_n \int_{\Omega} \lambda_n \frac{w_n^2 z_n}{\xi^2} v_n h_1(v_n) dx \\ &= \int_{\Omega} w_n z_n \nabla \cdot \left(\frac{1}{\xi^2} \nabla_{z_n} \right) dx + \int_{\Omega} \frac{w_n z_n^2}{\xi} \Delta \left(\frac{1}{\xi} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{w_n z_n}{\xi^2} \Delta z_n dx + \int_{\Omega} \frac{w_n z_n^2}{\xi} \Delta \left(\frac{1}{\xi} \right) dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \frac{w_n z_n}{\xi^2} \Delta z_n dx + \int_{\partial \Omega} \frac{w_n z_n}{\xi^2} \frac{\partial z_n}{\partial \eta} ds + \int_{\Omega} \frac{w_n z_n^2}{\xi} \Delta \left(\frac{1}{\xi} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\int_{\Omega} \nabla \frac{w_n z_n}{\xi^2} \Delta z_n dx - \int_{\partial\Omega} \frac{w_n z_n}{\xi^2} \left[l - \frac{1 - \alpha(u)}{k_2 - u_n} \cdot \frac{u_n}{\alpha(u_n)} \right] z_n ds + \int_{\Omega} \frac{w_n z_n^2}{\xi} \Delta \left(\frac{1}{\xi} \right) dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \frac{w_n z_n^2}{\xi} \Delta \left(\frac{1}{\xi} \right) dx \\
 &= \int_{\Omega} \frac{w_n z_n^2}{\xi} \left(-\frac{1}{\xi^2} \Delta \xi \right) + \frac{2}{\xi^3} |\nabla \xi|^2 dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{w_n^2 z_n}{\xi^2} v_n h_1(v_n) dx \right) \times \max \frac{1}{v_n(x) h_1(v_n(x)) w_n} \frac{z_n}{\xi(x)} \left(\frac{1}{\xi(x)} + \frac{2}{\xi^2(x)} |\nabla \xi(x)|^2 \right)
 \end{aligned}$$

حال اگر $(z_n, w_n) \not\equiv (0, 0)$ باشد، به دست می‌آوریم:

$$\lambda_n \leq \frac{1}{(k_1 - \delta_1)m} M \max \left(\frac{1}{\xi(x)} + \frac{2}{\xi^2(x)} |\nabla \xi(x)|^2 \right)$$

که در آن $m = \inf_{s \in [0, k_1]} h_1(s)$ و نیز $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{z_n}{w_n}$. و این با این فرض که λ_n بی‌کران است در تناقض است، بنابراین فرض خلف باطل و $(z_n, w_n) \equiv (0, 0)$. بدین ترتیب اثبات قضیه به پایان می‌رسد.

اثبات قضیه ۳. با توجه به اینکه $(u_n, v_n) \equiv (k_2, k_1)$ یک جواب بالایی برای مسئله (۲) می‌باشد، می‌توانیم یک جواب ماکزیمم برای مسئله (۲) برای λ بزرگ مانند $(u_{m_\lambda}, v_{m_\lambda})$ در نظر بگیریم. از برهان خلف برای اثبات این قضیه کمک می‌گیریم. برای این منظور فرض می‌کنیم (u, v) جواب مثبت دیگری برای مسئله (۲) باشد. بنابراین در منطقه $\bar{\Omega}$ به وضوح داریم $u < u_{m_\lambda} v < v_{m_\lambda}$ و $u_{m_\lambda} - u \not\equiv 0$ و $v_{m_\lambda} - v \not\equiv 0$ از آنجائیکه برای $s \in (k_1 - \delta_1, k_1]$ بنا به فرض داریم $\dot{\alpha}(s) = 0$ نتیجه می‌شود که α روی بازه $(k_1 - \delta_1, k_1]$ تابعی ثابت است. همچنین برای $t \in (k_2 - \delta_2, k_2]$ داریم $\dot{\beta}(t) = 0$ در نتیجه β هم روی بازه $(k_2 - \delta_2, k_2]$ تابعی ثابت خواهد بود. با توجه به ضوابط توابع f و g داریم $\dot{f}(k_1) = -h_1(k_1)$ ، لذا وجود دارد یک $\delta_1^* \in (0, \delta_1)$ به طوری که $f(s)$ روی بازه $(k_1 - \delta_1^*, k_1)$ کاهشی است و به طریق مشابه $\delta_2^* \in (0, \delta_2)$ وجود دارد که $g(s)$ در بازه $(k_2 - \delta_2^*, k_2)$ کاهشی خواهد بود. بنابراین طبق لم بالا وجود دارد $\lambda_1^*, \lambda_2^* > 0$ به طوری که برای $\lambda > \lambda_0 = \max \{\lambda_1^*, \lambda_2^*\}$ هر جواب مثبت (u_λ, v_λ) در رابطه $u_\lambda \geq \lambda_0 = \max \{\lambda_1^*, \lambda_2^*\}$ صدق می‌کند. حال برای $\lambda > \lambda_0$ که در آن $\lambda_0 = \max \{\lambda_1^*, \lambda_2^*\}$ داریم:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (u \Delta u_{m_\lambda} - u_{m_\lambda} \Delta u) dx &= \int_{\Omega} (u \lambda v_{m_\lambda} g(v_{m_\lambda}) - u_{m_\lambda} \lambda v g(v)) dx \\
 &= \lambda \int_{\Omega} (u v_{m_\lambda} g(v_{m_\lambda}) - u_{m_\lambda} v g(v)) dx \\
 &< \lambda \int_{\Omega} (u u_{m_\lambda} v v_{m_\lambda} g(v) - u_{m_\lambda} v g(v)) dx (*) \\
 &= \lambda \int_{\Omega} u_{m_\lambda} v g(v) (u v_{m_\lambda} - 1) dx \neq 0
 \end{aligned}$$

(علت نامساوی (*): از آنجائیکه $v_{m_\lambda} > v$ لذا $v f(v) < f(v_{m_\lambda})$ طرفین رابطه اخیر را در $u v_{m_\lambda}$ ضرب می‌کنیم، بنابراین داریم $u v_{m_\lambda} v v_{m_\lambda} g(v) < u u_{m_\lambda} v v_{m_\lambda} g(v)$

لذا به دست آوردیم

$$\int_{\Omega} (u \Delta u_{m_\lambda} - u_{m_\lambda} \Delta u) dx = \lambda \int_{\Omega} u_{m_\lambda} v g(v) (u v_{m_\lambda} - 1) dx \neq 0 (**)$$

اما روی مرز داریم:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (u \Delta u_{m_\lambda} - u_{m_\lambda} \Delta u) dx &= \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial u_{m_\lambda}}{\partial \eta} - u_{m_\lambda} \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds \\
 &= \int_{\partial\Omega} u u_{m_\lambda} (\frac{1 - \beta(u)}{\beta(u)} - \frac{1 - \beta(u_{m_\lambda})}{\beta(u_{m_\lambda})}) ds \\
 &= \int_{\partial\Omega} u u_{m_\lambda} (\frac{\beta(u_{m_\lambda}) - \beta(u)}{\beta(u)\beta(u_{m_\lambda})}) ds \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

لذا به دست آوردیم

$$\int_{\Omega} (u \Delta u_{m_\lambda} - u_{m_\lambda} \Delta u) dx = 0 (***)$$

بنابراین روابط $(**)$ و $(***)$ برای $\lambda > \lambda_0 = \max \{\lambda_1^*, \lambda_2^*\}$ در تناقض است، با استدلالی مشابه برای v_{m_λ} باز هم به تناقض خواهیم رسید و لذا فرض خلف باطل است، یعنی ما برای مسأله (۲) یک جواب منحصر به فرد مثبت (u_n, v_n) خواهیم داشت و فرض جواب متمایز دیگری مانند (u, v) فرضی باطل است و به این ترتیب اثبات قضیه ۳ به پایان می‌رسد.

- [1] Robert S Cantrell, Chris Cosner, and Salomé Martínez. Steady state solutions of a logistic equation with nonlinear boundary conditions. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pages ,455-445 . 2011
- [2] Robert Stephen Cantrell and Chris Cosner. Spatial ecology via reaction-diffusion equations. John Wiley & Sons, 2004.
- [3] Robert Stephen Cantrell and Chris Cosner. On the effects of nonlinear boundary conditions in diffusive logistic equations on bounded domains. *Journal of Differential Equations*, ,804 - 768:(2)231 . 2006
- [4] Robert Stephen Cantrell and Chris Cosner. Density dependent behavior at habitat boundaries and the allee effect. *Bulletin of Mathematical Biology*, ,2360 – 2339:(7)69 . 2007
- [5] Nalin Fonseka, Jerome Goddard II, Ratnasingham Shivaji, and Byungjae Son. A diffusive weak allee effect model with u-shaped emigration and matrix hostility. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 26(10), 2021
- [6] Nalin Fonseka, Ratnasingham Shivaji, Jerome Goddard, Quinn A Morris, and Byungjae Son. On the effects of the exterior matrix hostility and a u-shaped density dependent dispersal on a diffusive logistic growth model. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series S*, 13(12), . 2020
- [7] Jerome Goddard, Eun Kyoung Lee, and Ratnasingham Shivaji. Population models with nonlinear boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)* [electronic only], ,149 – 2010:135 . 2010
- [8] Jerome Goddard II, Quinn Morris, Catherine Payne, and Ratnasingham Shivaji. A diffusive logistic equation with u-shaped density dependent dispersal on the boundary. . 2019
- [9] Jerome Goddard II, Quinn A Morris, Stephen B Robinson, Ratnasingham Shivaji, et al. An exact bifurcation diagram for a reaction–diffusion equation arising in population dynamics. *Boundary Value Problems*, – 1:(1)2018,17 . 2018
- [10] Jerome Goddard II and Ratnasingham Shivaji. Diffusive logistic equation with constant yield harvesting and negative density dependent emigration on the boundary. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 573 – 561:(2)414 . 2014
- [11] Jerome Goddard II, Ratnasingham Shivaji, and Eun Kyoung Lee. Diffusive logistic equation with non-linear boundary conditions. *Journal of mathematical analysis and applications*, ,370 – 365:(1)375 . 2011
- [12] Mohan Mallick, Sarath Sasi, R Shivaji, and S Sundar. Bifurcation, uniqueness and multiplicity results for classes of reaction diffusion equations arising in ecology with nonlinear boundary conditions. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 21(2), .2022