

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال یازدهم، شماره پنجاه و هشتم، بهمن و اسفند ۱۴۰۴

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

مدول‌های انژکتیو خاکستری روی حلقه‌ها

معصومه هزارجریبی^{۱*}، زهره حبیبی^۲

(^۲و^۱) گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۳/۰۶/۰۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۴/۰۲/۱۶

چکیده

در این مقاله، به مطالعه و بررسی مدول‌های خاکستری و ویژگی‌های آن‌ها پرداخته‌ایم. ابتدا به تعریف مفاهیم پایه‌ای مانند مجموعه‌های خاکستری و اعداد خاکستری پرداخته و سپس به معرفی مدول‌های خاکستری به عنوان تعمیمی از نظریه مجموعه‌های فازی پرداخته‌ایم. در این راستا، ما به تحلیل خواص رسته‌ای مدول‌های خاکستری پرداخته و ویژگی‌های مهمی نظیر حاصلضرب و هم‌حاصلضرب در این مدول‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم. علاوه بر این، مفهوم مدول‌های خاکستری انژکتیو معرفی شده و خواص مربوط به آن به‌طور جامع تحلیل شده‌اند. یکی از بخش‌های مهم این مقاله به بررسی دنباله‌های دقیق خاکستری اختصاص دارد. دنباله‌های دقیق خاکستری به عنوان یک ابزار مؤثر برای تحلیل ساختارهای مدولی و بررسی روابط بین آن‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در ادامه، قضیه بئر برای مدول‌های خاکستری به تفصیل بررسی شده و نقش آن در تئوری مدول‌ها و کاربردهای آن روشن شده است. همچنین، در این مقاله به مطالعه مدول‌های خاکستری بخش‌پذیر پرداخته شده و ویژگی‌های منحصربه‌فرد آن‌ها مورد تحلیل قرار گرفته است. در نهایت، این مقاله تلاش می‌کند تا نشان دهد که مدول‌های خاکستری و دنباله‌های دقیق خاکستری می‌توانند به عنوان ابزارهایی قدرتمند در تحلیل سیستم‌های پیچیده با داده‌های ناقص و نامشخص به کار گرفته شوند.

واژه‌های کلیدی: انژکتیو خاکستری، بخش‌پذیر خاکستری، حلقه، مدول خاکستری.

۱- مقدمه

مجموعه‌های خاکستری به عنوان یک توسعه از نظریه مجموعه‌های فازی، مفهوم تازه‌ای را در ریاضیات معرفی می‌کنند که به تحلیل داده‌ها و اشیاء با عدم قطعیت کمک می‌کند. این مجموعه‌ها نه تنها به تعیین عضویت یک عنصر به صورت فازی می‌پردازند، بلکه به بررسی عدم قطعیت در عضویت نیز می‌پردازند. این ویژگی منحصر به فرد، مجموعه‌های خاکستری را برای مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌های پیچیده با داده‌های ناقص یا نامشخص بسیار مناسب می‌سازد.

نظریه مجموعه‌های خاکستری از نظریه مجموعه‌های فازی که توسط لطفی‌زاده در دهه ۱۹۶۰ معرفی شد، نشأت می‌گیرد. مطالعات بسیار زیادی در مورد مجموعه فازی انجام شده است. به عنوان مثال می‌توانید مراجع [۱]، [۲]، [۳]، [۴] و [۵] را ببینید. در مجموعه‌های فازی، هر عنصر با درجه‌ای از عضویت به مجموعه تعلق می‌گیرد که این درجه عضویت عددی بین ۰ و ۱ است. با این حال، مجموعه‌های فازی قادر به نمایش عدم قطعیت‌های پیچیده‌تر نیستند. در پاسخ به این نیاز، نظریه مجموعه‌های خاکستری توسعه یافت. در مجموعه‌های خاکستری، هر عنصر به همراه دو مقدار که مرزهای بالا و پایین عضویت آن را تعیین می‌کنند، مشخص می‌شود. این دو مقدار با توجه به حداقل و حداکثر درجات عضویت عنصر در مجموعه در نظر گرفته می‌شوند، که این امر به بررسی دقیق‌تری از عدم قطعیت می‌انجامد. تحقیقات بسیار زیادی در مورد اعداد خاکستری و مجموعه خاکستری انجام شده است. نظریه سیستم‌های خاکستری به عنوان یک روش موثر برای حل مشکلات با داده‌های گسسته و اطلاعات ناقص معرفی شده است.

در باب این موضوع لیو در [۶] و [۷] و درویشی در [۸] تحقیق و مطالعه انجام داده‌اند. همچنین هزارجریبی و حبیبی عمل‌های خاکستری روی تکواژه‌ها و همچنین تابع‌گون‌ها و عمل‌های انژکتیو خاکستری را مورد بررسی قرار داده‌اند [۹]. همچنین می‌توانید برخی از مطالعات را در مراجع [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲] و [۱۳] ببینید.

ما در این مقاله قصد داریم مدول‌های خاکستری را تعریف کنیم و سپس رسته مدول‌های خاکستری را ارائه و پس از آن برخی خواص رسته‌ای مدول‌های خاکستری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین مدول‌های انژکتیو خاکستری را تعریف کرده و برخی خواص آن مانند حاصلضرب و هم‌حاصلضرب را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. قضیه بئر را نیز در مورد مدول‌های خاکستری بررسی و مدول‌های خاکستری بخش‌پذیر نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در ادامه، تعاریف زیر را که مورد نیاز است، یادآوری می‌کنیم.

یک عدد خاکستری عددی است که دارای مرزهای بالایی و پایینی مشخصی است اما موقعیت دقیق آن درون این مرزها نامشخص است. یادآوری می‌کنیم که یک عدد خاکستری به صورت $g^{\pm} \in [g^-, g^+] = \{g^- \leq t \leq g^+\}$ می‌باشد که در آن g^- و g^+ کران بالا و پایین اطلاعات هستند. اگر کران بالا برابر با کران پایین باشد می‌گوییم t یک عدد سفید است. در این گونه تعریف اعداد خاکستری به صورت پیوسته نشان داده می‌شوند [۱۱].

مراجع [۱۲] یک نمایش جدید برای اعداد خاکستری در نظر گرفته است. در واقع هر عدد خاکستری به صورت $g^{\pm} \in \bigcup_{i=1}^n [a_i^-, a_i^+]$ (اجتماع بازه‌های بسته) در نظر گرفته می‌شود و بدین صورت که $0 < n < \infty$ ، $a_i^-, a_i^+ \in \mathbb{R}$ ، $i = 1, 2, 3, \dots, n$ یک عدد صحیح به طوری که $a_{i-1}^- \leq a_i^- \leq a_i^+ \leq a_{i+1}^+$.

اگر p_i احتمال قرار گرفتن $g^{\pm}$ در بازه $[a_i^-, a_i^+]$ باشد، شرایط زیر را داریم:

(الف) $p_i > 0$ اگر و تنها اگر $g^{\pm} \in [a_i^-, a_i^+]$.

(ب) $p_i = 0$ اگر و تنها اگر $g^\pm \notin [a_i^-, a_i^+]$

(ج) $\sum_{i=1}^n P_i = 1$

و همچنین داریم:

$$g^- = \inf_{a_i^- \in g^\pm} a_i^-, g^+ = \sup_{a_i^+ \in g^\pm} a_i^+$$

g^+ کران بالا و g^- کران پایین عدد خاکستری هستند و این عدد خاکستری را با نماد $t_g^{g^+}$ نشان می‌دهند. حال مجموعه U و زیرمجموعه A از آن را در نظر بگیرید. اگر مقدار تابع مشخصه متناظر با A به صورت یک عدد خاکستری باشد، یعنی در واقع داشته باشیم:

$\chi_A: U \rightarrow D[0, 1]^\pm$ در اینصورت می‌گوییم مجموعه A خاکستری است که در آن $D[0, 1]^\pm$ مجموعه همه اعداد خاکستری در بازه $[0, 1]$ است. لازم به ذکر است که این تابع مشخصه مانند تابع مشخصه معمولی عمل نمی‌کند. به عبارت دیگر، تابع مشخصه خاکستری می‌تواند میزان عضویت یک عنصر را به صورت غیرقطعی و در قالب بازه‌ای مشخص کند و می‌تواند مقدار غیرصفر نیز بگیرد.

اگر مقدار تابع مشخصه به صورت یک عدد سفید باشد، می‌گوییم مجموعه A سفید است.

مشابه با مجموعه فازی، هر مجموعه خاکستری را می‌توان به صورت زیر نمایش داد [۱۲].

به عبارت دیگر $A = \frac{g^\pm(x_1)}{x_1} + \frac{g^\pm(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{g^\pm(x_n)}{x_n}$ که در آن $x_i \in U$ مجموعه خاکستری را با نماد (U, χ_A) نشان می‌دهیم. بدیهی است که مجموعه فازی حالت خاصی از مجموعه سفید و مجموعه سفید حالت خاصی از مجموعه خاکستری است.

حال از مرجع [۱۳]، عملگر شبکه خاکستری را یادآوری می‌کنیم. دو عدد خاکستری $y^\pm = [y^-, y^+]$ ، $x^\pm = [x^-, x^+]$ را در نظر بگیرید.

وست و رسند این دو عدد خاکستری را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$x^\pm \vee y^\pm = [\min\{x^-, y^-\}, \max\{x^+, y^+\}]$$

$$x^\pm \wedge y^\pm = [\max\{x^-, y^-\}, \min\{x^+, y^+\}]$$

با توجه به تعریف فوق، رابطه ترتیب جزیی روی مجموعه خاکستری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x^\pm \leq y^\pm \Leftrightarrow x^+ \leq y^+, y^- \leq x^-$$

حال دو مجموعه خاکستری زیر را در نظر بگیرید.

$$(U, \chi_A), (V, \mu_B)$$

یک تابع خاکستری بین این دو مجموعه خاکستری، تابعی مانند $f: A \rightarrow B$ است به طوری که برای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$\chi^+(a) \leq \mu^+(f(a)), \mu^-(f(a)) \leq \chi^-(a)$$

۲. نتایج اصلی

در این بخش مدول‌های خاکستری را تعریف کرده و برخی ویژگی‌های رسته‌ای این مفهوم را بررسی می‌کنیم. همچنین مدول‌های خاکستری انژکتیو و بخش‌پذیر را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. علاوه بر آن دنباله‌های دقیق خاکستری نیز مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

در سراسر این مقاله مدول‌های راست را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱-۲: فرض کنید M یک R -مدول باشد. آنگاه χ_M را یک مدول خاکستری (راست) می‌نامیم هر گاه تابعی مانند $\chi: M \rightarrow D[0, 1]^\pm$ موجود باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

$$1) \chi^+(m_1 - m_2) \geq \min(\chi^+(m_1), \chi^+(m_2)) \\ , \chi^-(m_1 - m_2) \leq \max(\chi^-(m_1), \chi^-(m_2))$$

برای هر $m_1, m_2 \in M$.

$$2) \chi^+(m) \leq \chi^+(mr) \\ , \chi^-(mr) \leq \chi^-(m)$$

برای هر $m \in M, r \in R$.

$$3) \chi^+(0_M) = 1, \chi^-(0_M) = 0$$

حال اگر R را به عنوان مدول در نظر بگیریم، داشته باشیم:

$$4) \chi^+(1_R) = 1, \chi^-(1_R) = 0$$

به طور مشابه می‌توان مدول خاکستری چپ را نیز تعریف کرد. توجه گردد تابع χ در تعریف ۱-۲ لزوماً تابع مشخصه نمی‌باشد.

شایان ذکر است که در بخش‌های آتی از مفهوم ایده‌ال خاکستری استفاده می‌گردد که این مفهوم بدین معناست که مدول مورد نظر در تعریف مدول‌های خاکستری، ایده‌ال حلقه می‌باشد. همچنین برای هر R -مدول مانند M ، مدول خاکستری 1_M را تعریف می‌کنیم که در آن $1: M \rightarrow D[0,1]^{\pm}$ برای هر $m \in M$ $1^+(m) = 1$ و $1^-(m) = 0$.

تعریف ۲-۲: دو مدول خاکستری χ_M, ν_N را در نظر بگیرید. یک همریختی خاکستری بین دو مدول خاکستری، R -همریختی مانند $f: M \rightarrow N$ است به طوری که برای هر $m \in M$ داشته باشیم:

$$\chi^+(m) \leq \nu^+(f(m)) \\ , \nu^-(f(m)) \leq \chi^-(m)$$

همریختی خاکستری را با نماد $\tilde{f}: \chi_M \rightarrow \nu_N$ نشان می‌دهیم. به راحتی می‌توان دید که ترکیب دو همریختی خاکستری، یک همریختی خاکستری می‌باشد. لذا مدول‌های خاکستری و همریختی‌های خاکستری بین آنها تشکیل یک رشته می‌دهند که آن را با $G - Mod$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲-۳: هسته همریختی خاکستری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ker(\tilde{f}) = \{m \in M | \tilde{f}(m) = 0\}$$

همچنین تصویر همریختی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Im \tilde{f} = \{f(a) | a \in M\}$$

یک همریختی خاکستری $\tilde{f}: \chi_M \rightarrow \nu_N$ را تکریختی (پوشا) می‌گوییم هرگاه R -همریختی $f: M \rightarrow N$ تکریختی (پوشا) باشد.

تعریف ۲-۴: دو مدول خاکستری χ_M, ν_N را در نظر بگیرید. می‌گوییم ν_N زیر مدول خاکستری χ_M است هرگاه N زیر مدول M باشد و برای هر $n \in N$ داشته باشیم: $\nu^{\pm}(n) \leq \chi^{\pm}(n)$.

تعریف ۲-۵: همریختی خاکستری $\tilde{f}: \chi_M \rightarrow \nu_N$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم χ_M شبه یکریختی با ν_N دارد و با نماد $\chi_M \cong_Q \nu_N$ نشان می‌دهیم هرگاه R -مدول‌های M و N یکرخت باشند. به علاوه اگر به ازای هر $m \in M$ داشته باشیم $\chi(m) = \nu(\tilde{f}(m))$ آنگاه می‌گوییم χ_M با ν_N یکرخت است و با نماد $\chi_M \cong \nu_N$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲-۶: مدول خاکستری η_E را در نظر بگیرید. می‌گوییم این مدول انژکتیو خاکستری است هر گاه به ازای هر تکریمتی از مدول‌های خاکستری مانند $\tilde{f}: v_N \rightarrow \chi_M$ و هر همریختی خاکستری دلخواه $\tilde{g}: v_N \rightarrow \eta_E$ یک همریختی خاکستری $\tilde{h}: \chi_M \rightarrow \eta_E$ موجود باشد به طوریکه داشته باشیم $\tilde{h}\tilde{f} = \tilde{g}$. بدیهی است که اگر مدول خاکستری η_E انژکتیو باشد، آنگاه E یک R -مدول انژکتیو است. برای نشان دادن این موضوع نمودار زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow g & \\ & & E \end{array}$$

که در آن f یک R -همریختی یک به یک و g یک R -همریختی دلخواه است. مدول‌های خاکستری v_N, χ_M, η_E و μ_E را تعریف می‌کنیم که در آن $\chi(m) = v(n) = \mu(e)$ برای هر $m \in M, n \in N, e \in E$ باشد. بدیهی است که $\tilde{g}: \chi_M \rightarrow \mu_E$ و $\tilde{f}: \chi_M \rightarrow v_N$ همریختی‌های خاکستری هستند. حال از اینکه η_E انژکتیو است، یک همریختی خاکستری $h: v_N \rightarrow \mu_E$ موجود است به طوری که $\tilde{h}\tilde{f} = \tilde{g}$ بنابراین $hf = g$ و در نتیجه E یک R -مدول انژکتیو خواهد بود.

در حالت کلی نمی‌توان گفت که اگر E یک R -مدول انژکتیو باشد، آنگاه η_E نیز انژکتیو است.

لم زیر بیان می‌کند که تحت چه شرایطی این موضوع برقرار است.

لم ۲-۷: اگر M یک R -مدول انژکتیو باشد و $\chi = 1_M$ آنگاه مدول خاکستری χ_M نیز انژکتیو است.

اثبات: فرض کنید M یک R -مدول انژکتیو باشد.

نمودار زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ccc} \vartheta_K & \hookrightarrow & \mu_N \\ & \searrow \tilde{f} & \\ & & \chi_M \end{array}$$

از این که M یک R -مدول انژکتیو است یک همریختی $g: N \rightarrow M$ موجود است به طوری که $g|_K = f$.

از این که $\chi = 1_M$ بدیهی است که $\tilde{g}: \mu_N \rightarrow \chi_M$ یک همریختی خاکستری است.

لم ۲-۸: یک مدول خاکستری انژکتیو است اگر و تنها اگر نسبت به همه شمول‌ها از زیرمدول خاکستری، انژکتیو خاکستری باشد.

اثبات: برهان قسمت غیربدیهی را ارائه می‌دهیم.

فرض کنید μ_E مدولی خاکستری دلخواه باشد که نسبت به همه شمول‌ها از زیرمدول‌های خاکستری انژکتیو است. نشان می‌دهیم μ_E انژکتیو خاکستری است. نمودار زیر را در نظر بگیرید که در آن $\tilde{f}: \chi_M \rightarrow v_N$ یک تکریمتی خاکستری و $\tilde{g}: \chi_M \rightarrow \mu_E$ یک همریختی خاکستری دلخواه است.

$$\begin{array}{ccc} \chi_M & \xrightarrow{\tilde{f}} & v_N \\ & \searrow \tilde{g} & \\ & & \mu_E \end{array}$$

نشان می‌دهیم یک همریختی خاکستری از ν_N به μ_E موجود است به‌طوری که $\tilde{g}$ را گسترش می‌دهد. قرار دهید $K = \ker f$ و تعریف کنید:

$$\eta_{\frac{M}{K}}: \frac{M}{K} \rightarrow D[0,1]^{\pm}$$

به‌طوری که به ازای هر $m + K \in \frac{M}{K}$ داشته باشیم $\eta(m + K) = \chi(m)$. بدیهی است که $\eta_{\frac{M}{K}}$ یک مدول خاکستری است. حال همریختی خاکستری $\tilde{\eta}_{\frac{M}{K}}: \tilde{\eta}_{\frac{M}{K}} \rightarrow \chi_M$ را در نظر بگیرید که در آن $\tilde{\eta}(m + K) = m$ اکنون تابع $\lambda: f(M) \rightarrow D[0,1]^{\pm}$ را در نظر بگیرید که در آن به ازای هر $f(m) \in f(M)$ داریم $\lambda(f(m)) = t_0^1$. بدیهی است که $\lambda_{f(M)}$ یک مدول خاکستری است.

حال همریختی خاکستری $\tilde{\eta}_{f(M)}: \tilde{\eta}_{f(M)} \rightarrow \lambda_{f(M)}$ را در نظر بگیرید به‌طوری که به ازای هر $m + K \in \frac{M}{K}$ داشته باشیم $\tilde{\eta}(m + K) = \tilde{f}(a)$. لذا با توجه به فرض یک همریختی خاکستری $\tilde{h}: \nu_N \rightarrow \mu_E$ موجود است به‌طوری که $\tilde{h}|_{\lambda_{f(M)}} = \tilde{g} \circ (\tilde{t} \circ \tilde{\varphi}^{-1})$ بنابراین داریم: $\tilde{h}\tilde{f}(m) = \tilde{g} \circ (\tilde{t} \circ \tilde{\varphi}^{-1})\tilde{f}(m) = \tilde{g}(m)$ و اثبات کامل می‌شود.

در ادامه قضیه بئر را برای مدول‌های خاکستری بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲-۹: مدول خاکستری μ_C انژکتیو است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌ال خاکستری ν_I ، هر تکریختی $\tilde{f}: \nu_I \rightarrow \chi_R$ و هر همریختی خاکستری $\tilde{g}: \nu_I \rightarrow \mu_C$ یک همریختی خاکستری $\tilde{h}: \chi_R \rightarrow \mu_C$ موجود باشد به طوری که $\tilde{h}\tilde{f} = \tilde{g}$.

اثبات: قسمت غیربدیهی را ارائه می‌دهیم. بدین منظور تکریختی از مدول‌های خاکستری $\tilde{\eta}: \chi_A \rightarrow \nu_B$ و همچنین همریختی خاکستری دلخواه $\tilde{f}: \chi_A \rightarrow \mu_M$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم یک همریختی خاکستری موجود است که $\tilde{t}$ را توسعه می‌دهد. مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$$\Sigma = \{(\eta_C, \tilde{g}) | \chi_A \subseteq \eta_C \subseteq \nu_B, \nu_B \text{ زیر مدول } \eta_C, \tilde{g}: \eta_C$$

$$\rightarrow \mu_M \text{ یک همریختی خاکستری است که } \tilde{f} \text{ را گسترش می‌دهد}\}.$$

از این که $(\chi_A, \tilde{f})$ متعلق به مجموعه Σ است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه Σ غیرتهی است. حال رابطه ترتیب جزئی زیر را روی مجموعه Σ در نظر بگیرید:

$$(\eta_C, \tilde{g}) \leq (\eta'_{C'}, \tilde{g}') \Leftrightarrow$$

$$\eta_C \subseteq \eta'_{C'}, \tilde{g}'|_{\eta_C} = \tilde{g}$$

برای هر زنجیر $\{(\eta_{i_{C_i}}, \tilde{g}_i)\}_{i \in I}$ در مجموعه Σ قرار دهید $\bar{\eta}_D = \bigcup_{i \in I} \eta_{i_{C_i}}$ و همچنین تعریف کنید

$$\bar{g}: \bar{\eta}_D \rightarrow \mu_M \text{ به طوری که برای هر } i \in I \text{ داشته باشیم } \bar{g}|_{\eta_{i_{C_i}}} = \tilde{g}_i$$

بدیهی است که زوج $(\bar{\eta}_D, \bar{g})$ متعلق به مجموعه Σ است. حال با توجه به لم زرن، مجموعه Σ دارای عضو ماکسیمالی مانند (η^*_E, g^*) می‌باشد. ادعا می‌کنیم $\eta^*_E = \nu_B$. در غیر این صورت $B \neq C'$ یا $\vartheta = \vartheta'$.

فرض کنید $B = C'$ و $\vartheta = \vartheta'$. در این صورت $x \in B$ موجود است به‌طوری که $\vartheta(x) \neq \vartheta'(x)$.

فرض کنید $\vartheta(x) = t_n^m$. حال برای هر $b \in B$ تعریف کنید:

$$\langle x_t \rangle: B \rightarrow D[0,1]^{\pm}$$

$$\langle x_t \rangle(b) = t_n^m \wedge \vartheta(b)$$

بدیهی است که $\langle x_t \rangle_B < \vartheta_B$ زیرمدول خاکستری از ϑ_B است. حال مدول خاکستری زیر را در نظر بگیرید که در آن برای هر $b \in B$ داریم:

$\psi: B \rightarrow D[0, 1]^\pm$
 $\psi(b) = \vartheta'(b) \vee \langle x_t \rangle(b)$.
 همچنین همریختی خاکستری $\tilde{h}: \psi_B \rightarrow \mu_Q$ را تعریف کنید به‌طوری‌که برای هر $b \in B$ داشته باشیم $\tilde{h}(b) = \tilde{k}(b)$. بدیهی است که $\vartheta'_B \leq \psi_B \leq \vartheta_B$ و در نتیجه $(\psi_B, \tilde{k}) \in \Sigma$ که تناقض با ماکسیمالی $(\vartheta'_B, \tilde{k})$ دارد. بنابراین $\vartheta = \vartheta'$ خواهد بود. حال فرض کنید $\vartheta = \vartheta'$ و $B \neq C'$ در این صورت $b' \in B - C'$ موجود است. مجموعه $I = \{r \in R | b'r \in A\}$ را در نظر بگیرید که بدیهی است غیرتهی و ایده‌آلی از حلقه R می‌باشد.
 حال تابع زیر را در نظر بگیرید:

$\eta: I \rightarrow D[0, 1]^\pm$
 که در آن به ازای هر $i \in I$ داریم $\eta(i) = \chi(b'i)$.
 به آسانی می‌توان نشان داد η_I یک مدول خاکستری است.
 اکنون همریختی خاکستری $\tilde{g}: \eta_I \rightarrow \mu_Q$ را در نظر بگیرید به‌طوری‌که به ازای هر $r \in I$ داشته باشید:
 $\tilde{g}(i) = \tilde{f}(b'i)$

حال تابع $\xi: R \rightarrow D[0, 1]^\pm$ را تعریف کنید به‌طوری‌که به ازای هر $r \in R$ داشته باشید: $\xi(r) = t_0^1$ اکنون با توجه به فرض یک همریختی خاکستری $\tilde{g}: \xi_R \rightarrow \mu_Q$ موجود است به‌طوری‌که $\tilde{g}'|_{\eta_I} = \tilde{g}$. حال R -مدول $B' = C' + b'R$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید $\psi: B' \rightarrow D[0, 1]^\pm$ به‌طوری‌که به ازای هر $c' + b'r \in B'$ داشته باشید:

$\psi(c' + b'r) = \vartheta'(c') \vee \chi(b'r)$.
 همچنین همریختی خاکستری $\tilde{h}: \psi_{B'} \rightarrow \mu_Q$ را در نظر بگیرید به‌طوری‌که به ازای هر $x = c' + b'r \in B'$ داشته باشید:

$\tilde{h}(x) = \tilde{k}(c') + \tilde{g}(1)r$
 بدیهی است که $(\psi_{B'}, \tilde{h}) \in \Sigma$ که تناقض با ماکسیمالی $(\vartheta'_B, \tilde{k})$ دارد. بنابراین فرض خلف باطل است و μ_Q انژکتیو خاکستری است.

تعریف ۱۰-۲: خانواده $\{\chi_{i_{A_i}}\}_{i \in I}$ از مدول‌های خاکستری را در نظر بگیرید. حاصلضرب از مدول‌های خاکستری به صورت $(\prod_{i \in I} \chi_{i_{A_i}}, \tilde{P}_i)$ می‌باشد که در آن $\prod_{i \in I} \chi_{i_{A_i}}: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow D[0, 1]^\pm$ به ازای هر $(a_i)_{i \in I}$ به صورت $\tilde{P}_i((a_i)_{i \in I}) = a_i$ با ضابطه $\tilde{P}_i: \prod_{i \in I} \chi_{i_{A_i}} \rightarrow \chi_{i_{A_i}}$ و $\prod_{i \in I} \chi_{i_{A_i}}(a_i)_{i \in I} = \bigwedge (\chi_i(a_i))_{i \in I}$ می‌شود.

قضیه ۱۱-۲: فرض کنید $\{\chi_{i_{A_i}}\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مدول‌های خاکستری باشند. در این صورت $\prod_{i \in I} \chi_{i_{A_i}}$ انژکتیو خاکستری است اگر و تنها اگر به ازای هر $i, i' \in I$ انژکتیو خاکستری است.

اثبات: فرض کنید $\prod_{i \in I} \chi_{i_{A_i}}$ انژکتیو خاکستری باشد. نشان می‌دهیم به ازای هر $j, j' \in I$ نیز انژکتیو خاکستری است. نمودار زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{c} \chi_M \hookrightarrow \vartheta_N \\ \downarrow \tilde{f} \\ \chi_{i_{A_i}} \end{array}$$

نشان می‌دهیم یک همریختی خاکستری از ϑ_N به $\chi_{i_{A_i}}$ موجود است که $\tilde{f}$ را گسترش می‌دهد.

همریختی خاکستری $\tilde{L}_j: \chi_{j_{A_j}} \rightarrow \prod_{i \in I} \chi_{i_{A_i}}$ را در نظر بگیرید که در آن به‌ازای هر $a_j \in A_j$ داریم

$$\tilde{L}_j(a_j) = (a_i)_{i \in I} = \begin{cases} a_j & i = j \\ \theta_i & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ازای هر $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ داشته باشیم $\tilde{P}_j(a_i)_{i \in I} = a_j$. از این که $\prod_{i \in I} \chi_{i_{A_i}}$ انژکتیو خاکستری است،

یک همریختی خاکستری $\tilde{g}: \vartheta_N \rightarrow \prod_{i \in I} \chi_{i_{A_i}}$ موجود است به طوری که $\tilde{g}|_{\chi_M} = \tilde{f}$ حال تعریف کنید

$\tilde{h}: \vartheta_N \rightarrow \chi_{j_{A_j}}$ به طوری که $\tilde{h} = \tilde{P}_j \tilde{g}$. بنابراین داریم $\tilde{h} = \tilde{P}_j \tilde{g}$. $\tilde{h}|_{\chi_M} = \tilde{P}_j \tilde{g}|_{\chi_M} = \tilde{P}_j \circ \tilde{f} = \tilde{f}$ در نتیجه $\chi_{j_{A_j}}$ نیز انژکتیو خاکستری است.

برای نشان دادن عکس قضیه، نمودار زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{c} \chi_M \hookrightarrow \vartheta_N \\ \downarrow \tilde{f} \\ \prod_{i \in I} \chi_{i_{A_i}} \end{array}$$

از این که $\chi_{i_{A_i}}$ به‌ازای هر $i \in I$ انژکتیو خاکستری است یک همریختی خاکستری $\tilde{g}: \vartheta_N \rightarrow \prod_{i \in I} \chi_{i_{A_i}}$ موجود

است به طوری که $\tilde{g}|_{\chi_M} = \tilde{f}$. با توجه به خاصیت جهانی حاصلضرب، یک همریختی خاکستری

$\tilde{h}: \vartheta_N \rightarrow \prod_{i \in I} \chi_{i_{A_i}}$ موجود است به طوری که $\tilde{h} = \tilde{g}$. حال داریم $\tilde{h}|_{\chi_M} = \tilde{g}|_{\chi_M} = \tilde{f}$ و بنابراین

خواهیم داشت $\tilde{h}|_{\chi_M} = \tilde{f}$ و اثبات کامل می‌شود.

تعریف ۲-۱۲: فرض کنید $\{\chi_{i_{M_i}}\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مدول‌های خاکستری باشند. جمعوند مستقیم این خانواده را با

نماد $\bigoplus_{i \in I} \chi_{i_{M_i}}$ نشان می‌دهیم و تابع مشخصه آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\bigoplus_{i \in I} \chi_{i_{M_i}}: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow D[0, 1]^{\pm}$$

$$\bigoplus_{i \in I} \chi_{i_{M_i}}((m_i)_{i \in I}) = \bigwedge_{i \in I} (\chi_{i_{M_i}}(m_i))$$

قضیه ۲-۱۳: فرض کنید $\{\chi_{i_{A_i}}\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مدول‌های خاکستری باشند. اگر $\bigoplus_{i \in I} \chi_{i_{A_i}}$ انژکتیو خاکستری

باشد آنگاه به‌ازای هر $i \in I$ ، $\chi_{i_{A_i}}$ نیز انژکتیو خاکستری است.

اثبات: با برهانی مشابه حاصلضرب، می‌توان به آسانی نشان داد اگر خانواده‌ای از مدول‌های خاکستری، انژکتیو خاکستری باشد، آنگاه هر کدام از اعضای خانواده نیز انژکتیو خاکستری است.

تذکره ۲-۱۴: خانواده‌ای از مدول‌های خاکستری را در نظر بگیرید. اگر هر عضو خانواده انژکتیو خاکستری باشد آنگاه

نمی‌توان گفت در حالت کلی جمعوند آنها نیز انژکتیو خاکستری است. البته اگر تعداد اعضای خانواده مدول‌های

خاکستری متناهی باشد، آنگاه جمعوند آنها نیز انژکتیو خاکستری است.

گزاره ۲-۱۵: هر مدول خاکستری را در مدول انژکتیو خاکستری می‌توان نشاناد.

اثبات: فرض کنید χ_M یک مدول خاکستری باشد. می‌دانیم که هر R -مدول را می‌توان در R -مدولی انژکتیو نشاناد. بنابراین یک R -مدول انژکتیو E موجود است که توسط تکریختی $f: M \rightarrow E$ در E نشانده می‌شود. حال کافی است مدول خاکستری μ_E را در نظر بگیریم که در آن $\mu = 1_E$. با توجه به لم ۲-۷، از اینکه E انژکتیو است، μ_E نیز یک مدول انژکتیو خاکستری خواهد بود. همچنین بدیهی است که $\tilde{f}: \chi_M \rightarrow \mu_E$ یک تکریختی خاکستری است. بنابراین اثبات کامل است.

تعریف ۲-۱۶: یک همریختی خاکستری $\tilde{f}: \mu_M \rightarrow \vartheta_N$ را شکافنده خاکستری می‌نامیم هرگاه همریختی خاکستری $\tilde{g}: \vartheta_N \rightarrow \mu_M$ موجود باشد به‌طوری‌که داشته باشیم $\tilde{f}\tilde{g} = \tilde{id}_N$.

تعریف ۲-۱۷: دنباله زیر از مدول‌های خاکستری و همریختی‌های خاکستری را در نظر بگیرید.

$$\dots \rightarrow \rho_M \xrightarrow{\tilde{f}_{n-1}} \eta_N \xrightarrow{\tilde{f}_n} \theta_K \rightarrow \dots$$

$$Im(\tilde{f}_{n-1}) = Ker(\tilde{f}_n) \text{ باشیم}$$

تعریف ۲-۱۸: دنباله زیر را از مدول‌های خاکستری و همریختی‌های خاکستری را در نظر بگیرید.

$$\bar{0} \rightarrow \rho_M \xrightarrow{\tilde{f}} \eta_N \xrightarrow{\tilde{g}} \theta_K \rightarrow \bar{0}$$

می‌گوییم این دنباله دقیق کوتاه است هرگاه $\tilde{f}$ تکریختی، $\tilde{g}$ بروریختی و داشته باشیم $Im(\tilde{f}) = Ker(\tilde{g})$.

لم ۲-۱۹: اگر همریختی $\tilde{f}: \mu_M \rightarrow \vartheta_N$ یک شکافنده خاکستری باشد آنگاه برای هر دنباله دقیق خاکستری

$$\vartheta_N \cong \mu_M \oplus \eta_K \quad \bar{0} \rightarrow \mu_M \xrightarrow{\tilde{f}} \vartheta_N \xrightarrow{\tilde{g}} \eta_K \rightarrow 0$$

اثبات: از این که همریختی $\tilde{f}$ شکافنده است یک همریختی خاکستری $\tilde{h}: \vartheta_N \rightarrow \mu_M$ موجود است به‌طوری‌که $\tilde{h}\tilde{f} = \tilde{id}_N$. بنابراین $hf = id_N$ و درنتیجه داریم $N \cong M \oplus K$. بنابراین یکرختی $t: N \rightarrow M \oplus K$ موجود است که در آن به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $t(n) = (h(n), g(n))$. تعریف کنید:

$$\mu \oplus \eta(m, k) = \mu(m) \vee \eta(k) \text{ که به‌طوری‌که } \mu_M \oplus \eta_K: M \oplus K \rightarrow D[0, 1]^\pm$$

بدیهی است که $\mu \oplus \eta_{M \oplus K}$ یک مدول خاکستری است. حال نشان می‌دهیم $\tilde{t}$ یک همریختی خاکستری است. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $n \in \mathbb{N}$ داریم $\vartheta(n) \leq \eta(\tilde{g}(n)) \leq \eta(\tilde{g}(n)) \vee \mu(h(n)) = \mu \oplus \eta(\tilde{t}(n))$ بنابراین داریم

$$\vartheta_N \cong \mu_M \oplus \eta_K$$

قضیه ۲-۲۰: مدول خاکستری μ_E را در نظر بگیرید. شرایط زیر معادل هستند.

(الف) μ_E مدول انژکتیو خاکستری است.

(ب) برای هر دنباله دقیق

$$\bar{0} \rightarrow \rho_M \xrightarrow{\tilde{f}} \eta_N \xrightarrow{\tilde{g}} \theta_K \rightarrow \bar{0}$$

دنباله القاشده زیر دقیق است

$$0 \rightarrow Hom_R(\theta_K, \mu_E) \xrightarrow{\tilde{g}^*} Hom_R(\eta_N, \mu_E) \xrightarrow{\tilde{f}^*} Hom_R(\rho_M, \mu_E) \rightarrow 0$$

(ج) اگر $\tilde{\beta}: \mu_E \rightarrow \eta_P$ یک تکریختی خاکستری باشد آنگاه همریختی خاکستری $\tilde{\alpha}: \eta_P \rightarrow \mu_E$ موجود است

$$\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = \tilde{id}_E \text{ به‌طوری‌که}$$

(د) μ_E جمعوند مستقیم خاکستری در هر مدول خاکستری که شامل μ_E به عنوان زیرمدول خاکستری است، می‌باشد.

اثبات: (الف) $\Leftarrow$ (ب) فرض می‌کنیم دنباله زیر دقیق خاکستری باشد.

$$\bar{0} \rightarrow \rho_M \xrightarrow{\tilde{f}} \eta_N \xrightarrow{\tilde{g}} \theta_K \rightarrow \bar{0}$$

نشان می‌دهیم دنباله القاشده توسط $Hom_R(-, \mu_E)$ دقیق است. ابتدا نشان می‌دهیم $\tilde{g}^*$ تکریمتی است. کافی است نشان دهیم g^* تکریمتی است. بدین منظور $\varphi \in Hom_R(K, E)$ را در نظر بگیرید. اگر $g^*(\varphi) = 0$ آنگاه $\varphi \circ g = 0$. از این که g پوشاست برای هر $k \in K$ ، یک $n \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که $g(n) = k$. بنابراین داریم $\varphi(k) = \varphi \circ g(b) = 0$ و در نتیجه به ازای هر $k \in K$ ، $\varphi = 0$. در نتیجه $\tilde{g}^*$ تکریمتی است.

حال نشان می‌دهیم $\tilde{f}^*$ پوشاست که کافی است نشان دهیم f^* پوشاست. همیمتی $\psi \in Hom(M, E)$ را در نظر بگیرید. از این که μ_E انژکتیو خاکستری است، E نیز انژکتیو است و بنابراین همیمتی $\varphi: N \rightarrow E$ موجود است به‌طوری‌که $\varphi \circ f = \psi$. بدیهی است که $\tilde{\varphi}: \eta_N \rightarrow \mu_E$ همیمتی خاکستری است و بنابراین $\tilde{f}^*$ پوشاست. اکنون نشان می‌دهیم $\ker \tilde{f}^* = Im \tilde{g}^*$ فرض کنید $\tilde{\varphi}: \eta_N \rightarrow \mu_E$ یک همیمتی خاکستری باشد به‌طوری‌که $f^*(\varphi) = 0$. بنابراین $\tilde{\varphi} \circ \tilde{f} = 0$. تعریف کنید $\tilde{\psi}: \theta_K \rightarrow \mu_E$ به‌طوری‌که برای هر $k \in K$ داشته باشیم $\tilde{\psi}(k) = \tilde{\varphi}(n)$ که در آن $g(n) = k$. بدیهی است که $\tilde{\psi}$ یک همیمتی است. از طرفی برای هر $k \in K$ داریم $\theta(k) = \theta(g(n)) \leq t_0^1 = \mu(\tilde{\psi}(k))$ بنابراین $\tilde{\psi}$ یک همیمتی خاکستری است.

برای برعکس، $\tilde{\psi} \in Im \tilde{g}^*$ را در نظر بگیرید. بنابراین $\tilde{\varphi}: \theta_K \rightarrow \mu_E$ موجود است به‌طوری‌که $\tilde{\varphi} \circ \tilde{g} = \tilde{g}^*(\varphi) = \tilde{\psi}$

داریم

$$\tilde{f}^*(\tilde{\psi}) = \tilde{\varphi} \circ \tilde{g} \circ \tilde{f} = 0$$

در نتیجه $\tilde{\psi} \in \ker \tilde{f}^*$

(ب) $\Leftarrow$ (ج) فرض کنید $\tilde{\beta}: \mu_E \rightarrow \eta_P$ یک تکریمتی خاکستری باشد. دنباله دقیق خاکستری زیر را در نظر بگیرید.

$$\bar{0} \rightarrow \mu_E \xrightarrow{\tilde{\beta}} \eta_P \xrightarrow{\tilde{\pi}} \lambda_{P/\ker \tilde{\beta}} \rightarrow \bar{0}$$

که در آن $\lambda: P/Im \tilde{\beta} \rightarrow D[0,1]^{\pm}$ به‌ازای هر $p + Im \tilde{\beta}$ به صورت $\lambda(p + Im \tilde{\beta}) = t_0^1$ تعریف می‌شود. با توجه به فرض دنباله القایی زیر دقیق است

$$0 \rightarrow Hom_R\left(\lambda_{P/\ker \tilde{\beta}}, \mu_E\right) \xrightarrow{\tilde{\pi}^*} Hom_R(\eta_P, \mu_E) \xrightarrow{\tilde{\beta}^*} Hom_R(\mu_E, \mu_E) \rightarrow 0$$

با توجه به این $\tilde{\beta}^*$ که پوشاست یک همیمتی خاکستری $\tilde{\alpha}: \eta_P \rightarrow \mu_E$ موجود است به‌طوری‌که $\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = \tilde{\beta}^*\tilde{\alpha} = \tilde{id}_I$.

(ج) $\Leftarrow$ (د) زیرمدول خاکستری μ_E از مدول خاکستری ρ_E و تکریمتی خاکستری $\tilde{\alpha}: \mu_E \rightarrow \rho_E$ را در نظر بگیرید. با توجه به قسمت (ج)، یک همیمتی خاکستری $\tilde{\beta}: \rho_E \rightarrow \mu_E$ موجود است به‌طوری‌که $\tilde{\alpha}\tilde{\beta} = \tilde{id}_I$ دنباله دقیق خاکستری زیر را در نظر بگیرید.

$$\bar{0} \rightarrow \mu_E \rightarrow \rho_E \rightarrow \lambda_{P/\ker \tilde{\beta}} \rightarrow \bar{0}$$

با توجه به لم ۲-۱۹، داریم

$$\rho_E \cong \mu_E \oplus \lambda_P / \ker \hat{\beta}.$$

(د) $\Leftarrow$ (الف) با توجه به گزاره ۲-۱۵ داریم که هر مدول خاکستری را می‌توان در مدول انژکتیو خاکستری نشان داد. بنابراین تکریم $\chi_E: \mu_E \rightarrow \chi_E$ موجود است که در آن χ_E مدول انژکتیو خاکستری است. حال با توجه به قسمت (د) زیرمدول خاکستری ϑ_E موجود است به‌طوری‌که $\chi_E \cong \mu_E \oplus \vartheta_E$. از این که χ_E مدول انژکتیو خاکستری است آنگاه از قضیه ۲-۱۳، می‌توان نتیجه گرفت که μ_E نیز مدول انژکتیو خاکستری است.

تعریف ۲-۲۱: مدول خاکستری χ_M ، عضو $m \in M$ و $r \in R$ که مقسوم علیه صفر نیست را در نظر بگیرید. در این صورت می‌گوییم مدول χ_M بخش‌پذیر خاکستری است هرگاه $n \in M$ موجود باشد به‌طوری‌که $\chi(n) = \chi(nr)$.

بدیهی است که اگر M یک R -مدول بخش‌پذیر باشد آنگاه χ_M نیز مدول بخش‌پذیر خاکستری است ولی عکس آن لزوماً برقرار نیست. به عنوان مثال می‌دانیم $\mathbb{Z}$ مدول بخش‌پذیر نیست. حال تابع $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow D[0, 1]^{\pm}$ را در نظر بگیرید که در آن به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $\chi(n) = t_0^{0.5}$. بدیهی است که $\chi_{\mathbb{Z}}$ یک مدول بخش‌پذیر خاکستری است.

قضیه ۲-۲۲: هر مدول انژکتیو خاکستری، مدول بخش‌پذیر خاکستری است.

اثبات: اگر χ_M یک مدول انژکتیو خاکستری باشد آنگاه M یک R -مدول انژکتیو است و در نتیجه بخش‌پذیر است. بنابراین χ_M مدول بخش‌پذیر خاکستری خواهد بود.

قضیه ۲-۲۳: فرض کنید $\{\chi_{i_{M_i}}\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مدول‌های بخش‌پذیر خاکستری باشد. در این صورت $\bigoplus_{i \in I} \chi_{i_{M_i}}$ و $\prod_{i \in I} \chi_{i_{M_i}}$ نیز مدول‌های بخش‌پذیر خاکستری هستند.

اثبات: عنصر $(m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \chi_{i_{M_i}}$ و عنصر مقسوم علیه صفر $r \in R$ را در نظر بگیرید به‌ازای هر $i \in I$ ، $\chi_{i_{M_i}}$ بنابه فرض مدول بخش‌پذیر خاکستری است. بنابراین $n_i \in A_i$ موجود است به‌طوری‌که $\chi_i(m_i) = \chi_i(n_i r)$. بنابراین داریم

$$\prod_{i \in I} \chi_{i_{M_i}}(m_i)_{i \in I} = \wedge (\chi_i(m_i))_{i \in I} = \wedge (\chi_i(n_i r))_{i \in I} = \prod_{i \in I} \chi_{i_{M_i}}(n_i r)_{i \in I}.$$

به‌طور مشابه می‌توان برای جمعونند نیز اثبات نمود.

۳. نتیجه‌گیری

نتیجه‌گیری این پژوهش نشان می‌دهد که مدول‌های خاکستری و توابع مربوطه دارای خواص منحصر به فردی هستند که می‌توانند در زمینه‌های مختلف ریاضیات مدرن و کاربردهای مرتبط به کار گرفته شوند. این نتایج نشان‌دهنده امکان‌پذیری توسعه نظریه‌های جدید در این حوزه است. همچنین، این تحقیق نشان داد که دنباله‌های دقیق خاکستری به عنوان یک ابزار مؤثر در بررسی ساختارهای مدولی قابل استفاده هستند و می‌توانند به درک بهتر روابط میان مدول‌ها و کاربردهای آن‌ها کمک کنند. در نهایت، یافته‌های این پژوهش می‌تواند به گسترش دانش در زمینه ریاضیات محض و کاربردی کمک شایانی کند.

فهرست منابع

- [1] Goguen. J.A. (1967), L-fuzzy set, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 18, 145–74.
- [2] Goguen. J.A. (1969). Categories of L-sets, Bulletin of the American Mathematical Society, 75, 622–624
- [3] Harding. H., Walker. C., and Walker. E. (2014). Categories of fuzzy sets and relations, Fuzzy sets and Systems, 265, 149–165.
- [4] Porselvi Agnes. A. R, Sivaraj. D. and Tamizh Chelvam. T. (2010). On a new category of fuzzy sets, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, 2(4) (2010) 73–83.
- [5] Walker. C. (2004). Categories of fuzzy sets, Soft Computing, 8, 299–304.
- [6] Liu. S., Gao. T. and Dang. Y. (2000). Grey System Theory and its Applications, The Science Press of China, Beijing,
- [7] Liu. S., Yang. Y., Xie. N. and Forrest. J. (2016). New progress of grey system theory in the new millennium grey systems, Theory and Application, 6(1), 2–31.
- [8] Darvishi. D, Forrest. J. and Liu. S. (2019). A comparative analysis of grey ranking approaches, Grey Systems , Theory and Application, 9, 472–487.
- [9] Hezarjaribi. M, Habibi. Z.(2022). Some properties on grey S-acts over monoid, New Math. Nat. Comput., 18 (2), 313-323.
- [10] Deng. J. L. (1989). Introduction to grey system theory, The Journal of Grey Systems 1(1) 1–24.
- [11] Yang. Y. (2007). Extended grey numbers and their operations, IEEE International Conference on Systems. Man and Cybernetics, Montreal., 2181–2186.
- [12] Yang. Y., John. R. (2012). Grey sets and greyness. Information Sciences, 185(1), 249–264.
- [13] Yamaguchi. D., Li. G. D. and Nagai. M. (2006). On the combination of rough set theory and grey theory based on grey lattice operations, in S. Greco et al. (eds.), Proceedings of the Fifth International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing, RSCTC 2006. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4259, Springer, Berlin, Heidelberg.