

تحلیل دینامیکی ربات هیبرید 3PRS-RRP

علیرضا رضانی فر^۱، حسن ظهور^۲، سید علی اکبر موسویان^۳

(تاریخ دریافت: ۱۷/۳/۶ - تاریخ پذیرش: ۱۷/۹/۲۵)

چکیده: در این مقاله با استفاده از ماتریس انتقال دناویت- هارتنبرگ و جبر ماتریسها روش جدید و دقیقی برای تحلیل سینماتیک و دینامیک ربات موازی 3PRS و هیبرید (موازی-سری) 3PRS-RRP ارائه شده است. در ابتدا، خواص انواع رباتها مقایسه شده‌اند. در ادامه، پس از معرفی پارامترهای دناویت- هارتنبرگ و جدولهای مربوط به پارامترها، با استفاده از جبر برداری و ماتریسی روش حل سینماتیک مستقیم و معکوس و نقاط تکین توضیح داده شده و با استفاده از روش لاگرانژ معادلات دینامیک بدست آمده‌اند. در پایان برای اندازه‌های مشخص و با فرض یک حرکت دورانی برای نقطه وسط سکوی متحرک ربات موازی و دو ورودی سینماتیکی برای ربات سری، چند منحنی سینماتیکی و دینامیکی برای بررسی نقاط تکین رسم شده‌اند. به طور کلی حل سینماتیک مستقیم رباتهای موازی و حل سینماتیک معکوس رباتهای سری مشکل می باشند. برای راحتی کار با این گونه رباتهای هیبرید بهتر است در حالت سینماتیک مستقیم از ربات موازی استفاده شود که سکوی متحرک حرکت خطی داشته و در جهت فضا دهی و استحکام بخشی بکار رود و یا اینکه کارکرد سری و موازی از نظر زمانی استقلال داشته باشند.

واژه‌های کلیدی: ربات هیبرید، ربات صنعتی، حل سینماتیک

Dynamic Analysis of Hybrid Robot 3PRS-RRP

Alireza Ramezanifar, Hassan Zohoor, Aliakbar Moosavian

Abstract: In this article a new and an accurate method for kinematic and dynamic analysis of a parallel robot 3PRS and a hybrid robot (parallel and serial) 3PRS-RRP are presented, which is based on the Denavit-Hartenberg transformation matrix algebra. First, basic properties of various kinds of robots are compared, and then the Denavit-Hartenberg parameters and their table are introduced. Next, the methods of forward and inverse kinematic are explained and system dynamic equations are obtained by Lagrange method. Finally for defined sizes and with imagination of a rotational movement for the center point of the moving plate of parallel robot and two input kinematic for serial robot, a few kinematic and dynamic results for parallel and serial robot by Newton and Lagrange methods are presented for singularity consideration. Generally, the forward kinematic solution of parallel robots and inverse kinematic solution of serial robots are difficult. For these hybrid robots, it would be better to use parallel robots, which have linear movement on the moving plate in the forward mode to increase the space and strength, or the two robots be time independent.

Keywords: Hybrid Robot, Industrial Robot, Kinematic Solution

۱. کارشناس، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب (ramezanifar@yahoo.com)

۲. استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شریف (zohoor@sharif.edu)

۳. دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی (moosavian@kntu.ac.ir)

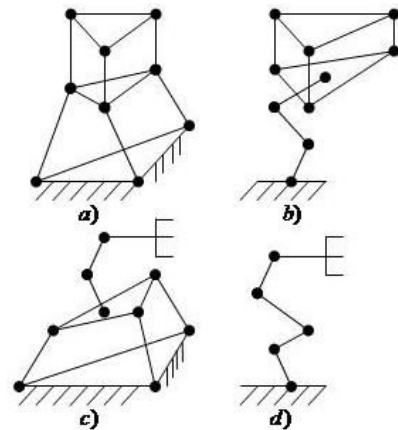
۱. مقدمه

رباتهای صنعتی به دو صورت عمده رواج یافته‌اند:

۱- زنجیره ای سی سری ۲- موازی

در ربات سری، رابطه با دنباله هم با اتصالات از زمین تا نقطه انتهایی به هم وصل می شوند مانند رباتهای PUMA، در حالی که در ربات موازی رابط انتهایی با دو یا چند زنجیره سینماتیکی مستقل به زمین متصل است و یک یا چند حلقه بسته سینماتیکی تشکیل می دهند مانند رباتهای Stewart [۱]. رباتهای موازی نسبت به رباتهای سری دارای سفتی، دقت، سرعت کاری، تکرار پذیری و نسبت بار به وزن بیشتر و مناسبتری بوده، ولی در عوض دارای فضای کاری و چابکی کمتری هستند [۱].

البته طراحی ربات موازی و تحلیل تکنیکی آن مشکل تر از ربات سری و تحلیل سینماتیک مستقیم ربات موازی به مشکلی تحلیل سینماتیک معکوس ربات سری است. پژوهشگران در تلاش بوده‌اند که با ترکیب این دو نوع ربات مزیت‌های هر دو را بدست آورند. این ساختارهای ترکیبی (هیبرید) در چهار نوع کلی وجود دارند [۲]:



شکل ۱. انواع ربات هیبرید

۱- موازی- موازی: شکل (1-a) که سفتی و وزن کم را بهبود داده و سرعت کاری را بالا می برد [۳].

۲- سری- موازی: شکل (1-b) که برای سیستمهای کوچک، پهنای باند و دقت عملکرد را بهتر می کند [۴].

۳- موازی- سری: شکل (1-c) پایداری و استحکام قسمت سری افزایش می یابد.

۴- سری- سری: شکل (1-d) که همان ربات سری محسوب می شود، البته می توان رباتهای هیبرید با ساختار متغیر با زمان مانند رباتهای راه رونده را به آنها اضافه کرد.

S. Lee و S. Kim سینماتیک معکوس سرعت برای انواع رباتهای هیبرید را با استفاده از تصویر بردار سرعت ارائه کرده‌اند [۲]. ربات موازی 3PRS رباتی شناخته شده است که در دستگاههای CNC، CMM و

CPR^۱ کاربرد دارد. Q. Xu و Y. Li تحلیل سینماتیکی ربات 3PRS در حالت پایه هرمی با روش پیچشی را ارائه و با حل سینماتیک مستقیم با استفاده از روش نیوتن-رافسون، فضای کاری و چابکی را محاسبه کرده‌اند [۵]. برای ربات 3PRS ماتریس سفتی در [۶]، حل برداری برای پایه ستونی بدون نیاز به بررسی و حذف جوابها در [۷]، حساسیت سکوی متحرک نسبت به تمام پارامترهای ساختاری برای حالت پایه ستونی در [۸]، بهینه‌سازی برای سه حالت ساختاری در [۹]، کنترل به وسیله نرم‌افزار JAVA 3D در [۱۰] و فضای کاری در [۱۱] بررسی شده است. در مقایسه ساختارهای سری، از نظر طراحی هندسی بین رباتهای RRP-RPR-PRR، نوع RRP در حالتی که مفصلهای R بر هم عمود و متقاطع باشند با سه نقطه دلخواه انتهایی قابل ساخت است، در صورتی که برای بقیه به چهار نقطه نیاز است که به آن T-joint یا U-joint گفته می شود و در شانه ربات بکار می رود [۱۲]. در اکثر مقالات از روش برداری پیچشی و ماتریسهای ژاکوبین ۶*۶ برای تحلیل سینماتیکی استفاده شده است ولی در اینجا از پارامترها و ماتریسهای دناویت- هارتنبرگ ۴*۴ برای تحلیل سینماتیکی و دینامیکی بدون استفاده از ماتریسهای ژاکوبی استفاده می‌شود و قابل تعمیم به همه رباتها می باشد.

در این پژوهش ربات هیبریدی مورد نظر است که ۶ درجه آزادی داشته باشد، لذا از 3PRS به عنوان ربات موازی و از RRP در حالت T-joint برای ربات سری استفاده شده است. در ادامه، پس از معرفی پارامترهای دناویت- هارتنبرگ و جدولهای پارامترهای مربوطه، با استفاده از جبر برداری و ماتریسی روش حل سینماتیک مستقیم و معکوس و نقاط تکین ارائه شده اند. برای بررسی دینامیک سیستم، با استفاده از روش لاگرانژ معادلات دینامیک بدست آمده‌اند. در پایان برای اندازه‌های مشخص با فرض یک ورودی دورانی برای نقطه وسط سکوی متحرک ربات موازی و دو ورودی سینماتیکی برای ربات سری، منحنی‌های دینامیکی رسم و نیز دو نقطه تکین مشخص شده‌اند. در این مقاله برای رسم شکلها از نرم افزار MATLAB7 و برای رسم شکل ربات از نرم افزار SOLIDWORKS استفاده شده است.

۲. معرفی ربات و روش کار

ربات 3PRS-RRP از یک ربات موازی هرمی متصل به زمین 3PRS و در نقطه مرکزی سکوی یک ربات سری RRP تشکیل می‌یابد (شکل ۲)، که اتصال کشویی با P، لولایی با R و کروی با S نشان داده می‌شود. طبق معیار گروبلر درجه آزادی روبات برابر است با:

$$DOF = \eta(n - i - 1) + \sum_{i=1}^g f_i \quad (1)$$

DOF: درجه آزادی ربات n: تعداد لینکها

i: تعداد اتصالات $\eta = 6$: درجه فضا

f_i : درجه آزادی هر مفصل برای ربات موازی

$$DOF1 = 6(8 - 9 - 1) + 15 = 3$$

برای ربات سری DOF2=3 بنابراین درجه آزادی کل روبات هیبرید برابر

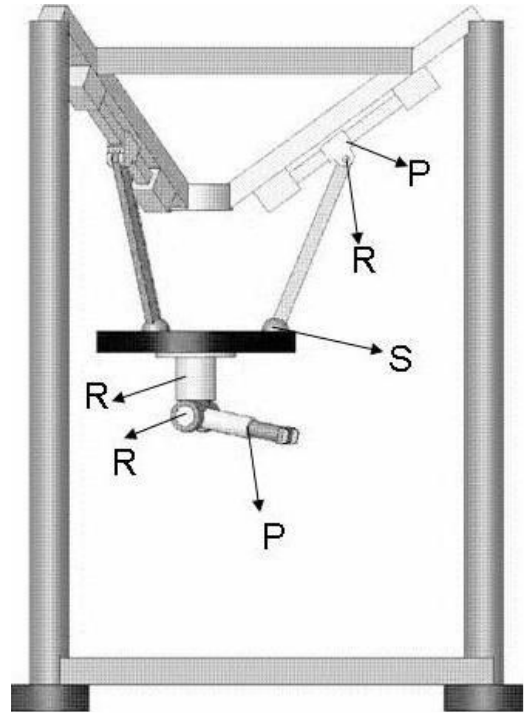
$$DOF = DOF1 + DOF2 = 6$$

است با:

سکوی متحرک را با ماتریس زاویه های اویلر منطبق کنیم ماتریس انتقال را تا موازی شدن نظیر به نظیر دستگاه با مبدا پیش می بریم.

جدول ۱. پارامترهای دناویت-هارتنبگ ربات موازی

I	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	$120(k-1)$
2	0	r_1	0	0
3	0	0	0	-90
4	$90-\psi$	0	0	0
5	0	a_5	d_{k5}	90
6	-90	a_6	0	$\theta_{k6} - 90$
7	0	0	0	θ_{k7}
8	-90	0	0	$\theta_{k8} + 90$
9	90	0	0	θ_{k9}
10	0	r_2	0	0
11	-90	0	0	0
12	0	0	0	$-120(k-1)+90$



شکل ۲. ربات هیبرید 3PRS-RRP

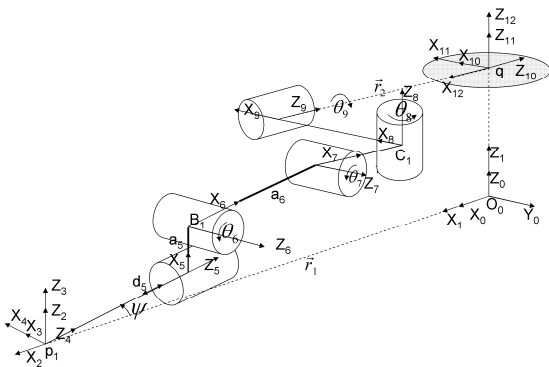
۴. قیدهای هندسی

اگر ماتریس دوران سکوی و نقطه q نسبت به O_0 و زاویه های اویلر را با محورهای ثابت در نظر بگیریم:

$${}^0_q T_{ZXY}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} CaC\gamma + SaS\beta S\gamma & SaS\beta C\gamma - CaS\gamma & C\beta S\alpha & q_x \\ C\beta S\gamma & C\beta C\alpha & -S\beta & q_y \\ -SaC\beta + CaS\beta S\gamma & CaS\beta C\gamma + SaS\gamma & C\beta C\alpha & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

اگر دستگاه uvw متصل به سکوی و مطابق شکل (۴) موازی با $X_0Y_0Z_0$ متصل به زمین در نظر گرفته شود، داریم:

$$T_{ZXY}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & q_x \\ u_y & v_y & w_y & q_y \\ u_z & v_z & w_z & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$



شکل ۳. نمایش مختصات پارامترهای دناویت-هارتنبگ در ربات موازی

۳. ماتریس انتقال

برای توصیف حرکت هر نقطه از میله ها یک دستگاه مختصات به آن متصل می شود بطوریکه محور Z از چهار چوب $\{i\}$ که Z_i نامیده می شود، منطبق بر محور مفصلی i و محور X_i از چهار چوب $\{i\}$ در راستای عمود مشترک Z_i و Z_{i+1} قرار می گیرد و جهت آن از رابط i به سوی رابط i+1 باشد. T_i^{i-1} ماتریس تبدیلی است که مختصات مفصل i را به i-1 تبدیل می کند و می توان نوشت:

$$T_i^{i-1} \cdot [X_i] = [X_{i-1}] \quad (2)$$

$$T_N^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot \dots \cdot T_N^{N-1} \quad (3)$$

که می توان بدست آورد [۱۳]:

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d_i C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

C: Cos
S: Sin

- a_i : فاصله بین Z_i و Z_{i+1} در راستای X_i
- α_i : زاویه بین Z_i و Z_{i+1} حول X_i
- d_i : فاصله بین X_i و X_{i-1} در راستای Z_i
- θ_i : زاویه بین X_i و X_{i-1} حول Z_i

برای بررسی بهتر ربات را بصورت وارونه در نظر گرفته و مفصل گروهی سه مفصل کشویی فرض می شود. جدول (۱) پارامترهای دناویت-هارتنبگ را برای ربات مورد نظر نشان می دهد. همانگونه که در جدول (۱) و شکل (۳) دیده می شود، برای آنکه بتوانیم ماتریس انتقال

$$q_x - \frac{r_2}{2}u_x + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_x = \quad (16)$$

$$-\sqrt{3}(q_x - \frac{r_2}{2}u_x + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_x)$$

$$c_{3y} = \sqrt{3}c_{3x} \Rightarrow$$

$$q_x - \frac{r_2}{2}u_x - \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_x = \quad (17)$$

$$\sqrt{3}(q_x - \frac{r_2}{2}u_x - \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_x)$$

با حذف q از روابط ۱۵، ۱۶ و ۱۷ نتیجه می‌شود:

$$v_x = u_y \quad (18)$$

در نتیجه:

$$-C\alpha S\gamma + S\beta S\alpha C\gamma = C\beta S\gamma \quad (19)$$

از (۱۶+۱۷):

$$q_x = \frac{r_2}{2}(u_x - v_y) \quad (20)$$

در نتیجه:

$$q_x = \frac{r_2}{2}(C\alpha C\gamma + S\beta S\gamma S\alpha - C\beta C\gamma) \quad (21)$$

از (۱۵) بدست می‌آید:

$$q_y = -r_2u_y \quad (22)$$

$$q_y = -r_2C\beta S\gamma \quad (23)$$

۵. سینماتیک مستقیم

۵-۱. مکان

نقاط C_k یک مثلث تشکیل می‌دهند. از طول هر مثلث معادله زیر تشکیل می‌شود:

$$|c_k c_{k+1}| = f_k(\rho_{k,1} \sin(\theta_{k,6}), \rho_{k,2} \sin(\theta_{k+1,6}), \dots) \quad (24)$$

$$\rho_{k,3} \cos(\theta_{k,6}), \rho_{k,4} \cos(\theta_{k+1,6})) = 3r_2^2$$

$k=1,2,3$ $\rho_{k,i}$ تابعی از پارامترهای طراحی می‌باشند.

با قرار دادن روابط تانژانت نصف قوس:

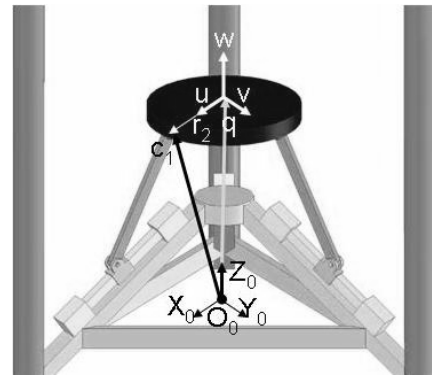
$$\sin(\theta_i) = \frac{2t_i}{1+t_i^2}$$

$$\cos(\theta_i) = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}$$

$$t_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right)$$

بدست می‌آید:

$$\begin{cases} A(t_2) t_3^2 + B(t_2) t_3 + C(t_2) = 0 \\ D(t_1) t_3^2 + E(t_1) t_3 + F(t_1) = 0 \\ G(t_1) t_2^2 + H(t_1) t_2 + I(t_1) = 0 \end{cases} \quad (25)$$



شکل ۴. دستگاه uvw متصل به سکو

مطابق شکل (۴) در دستگاه ثابت $X_0Y_0Z_0$ روابط برداری زیر قابل

بهربرداری است:

$$\overrightarrow{O_0c_k} = \overrightarrow{r_{2k/0}} + \overrightarrow{O_0q} \quad (7)$$

$$\overrightarrow{r_{2k/0}} = {}^0T_{ZZY} \cdot \overrightarrow{r_{2k/q}} \quad (8)$$

$$\overrightarrow{r_{21/q}} = [r_2 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (9)$$

$$\overrightarrow{r_{22/q}} = \left[-r_2/2 \ \sqrt{3}r_2/2 \ 0 \ 1 \right]^T \quad (10)$$

$$\overrightarrow{r_{23/q}} = \left[-r_2/2 \ -\sqrt{3}r_2/2 \ 0 \ 1 \right]^T \quad (11)$$

با توجه به رابطه ۱۵ و ۱۶ بردارهای P بدست می‌آیند.

$$\overrightarrow{O_0c_1} = \begin{bmatrix} q_x + r_2u_x \\ q_y + r_2u_y \\ q_z + r_2u_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\overrightarrow{O_0c_2} = \begin{bmatrix} q_x - \frac{r_2}{2}u_x + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_x \\ q_y - \frac{r_2}{2}u_y + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_y \\ q_z - \frac{r_2}{2}u_z + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_z \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\overrightarrow{O_0c_3} = \begin{bmatrix} q_x - \frac{r_2}{2}u_x - \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_x \\ q_y - \frac{r_2}{2}u_y - \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_y \\ q_z - \frac{r_2}{2}u_z - \frac{\sqrt{3}}{2}r_2v_z \end{bmatrix} \quad (14)$$

قید اینگونه اعمال می‌شود که اتصال کروی تنها در صفحه پایه هرم حرکت کند:

$$c_{1y} = 0 \Rightarrow q_y + r_2u_y = 0 \quad (15)$$

$$c_{2y} = -\sqrt{3}c_{2x} \Rightarrow$$

۲-۵. سرعت

اگر از دو طرف رابطه (۳۶) نسبت به زمان مشتق گرفته شود:

$${}^0\dot{T} = {}^0\dot{T} \begin{matrix} 12 \\ 16 \end{matrix} T + {}^0\dot{T} \begin{matrix} 12 \\ 16 \end{matrix} \dot{T} \quad (36)$$

با داشتن ورودی‌های \dot{d}_{15} ، \dot{d}_{25} و \dot{d}_{35}

$$\vec{V}_{C_k} = \frac{d}{dt}(c_k) \quad (37)$$

از مشتق‌گیری نسبت به زمان طرفین رابطه (۸):

$$\vec{V}_{C_k} = \frac{d}{dt}({}^0T \vec{r}_{2k/q}) \quad (38)$$

از رابطه‌های ۳۷ و ۳۸ نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dt}(c_k) = \frac{d}{dt}({}^0T \vec{r}_{2k/q}) \quad (39)$$

از مساوی قرار دادن مولفه‌های بردارهای رابطه ۳۹، ۹ معادله خطی با مجهولات $\dot{\theta}_{36}$ ، $\dot{\theta}_{26}$ ، $\dot{\theta}_{16}$ ، $\dot{\gamma}$ ، $\dot{\beta}$ ، $\dot{\alpha}$ ، \dot{q}_z ، \dot{q}_y ، \dot{q}_x داریم که با حل آنها سرعت نقطه انتهایی بدست می‌آید. برای محاسبه $\dot{\theta}_{k7}$ و $\dot{\theta}_{k8}$ از دو طرف دستگاه (۳۳) نسبت به زمان مشتق گرفته و با حل دستگاه بدست می‌آیند. برای محاسبه $\dot{\theta}_{k9}$ از دو طرف معادله (۳۴) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و معادله را حل می‌کنیم.

۳-۵. شتاب

اگر از دو طرف رابطه ۳۵ نسبت به زمان دو بار مشتق گرفته شود با زاویه‌ها و سرعت‌های معلوم و ورودی‌های \ddot{d}_{k5} ، \ddot{s}_{15} ، $\ddot{\theta}_{14}$ ، $\ddot{\theta}_{13}$ ، شتاب e :

$${}^0\ddot{A} = {}^0\ddot{T} \begin{matrix} 12 \\ 16 \end{matrix} \ddot{T} + 2 {}^0\ddot{T} \begin{matrix} 12 \\ 16 \end{matrix} \dot{T} + {}^0\ddot{T} \begin{matrix} 12 \\ 16 \end{matrix} \ddot{T} \quad (40)$$
 برای بدست آوردن مجهولات شتاب مانند قسمت سرعت ولی با دو بار مشتق‌گیری عمل می‌کنیم.

۶. سینماتیک معکوس

در این بخش با مشخص بودن ماتریس مکان 0T نقطه انتهایی، مقدار ورودی‌های موقعیتی که شامل d_{k5} ، s_{15} ، θ_{13} و θ_{14} هستند محاسبه می‌شوند.

$${}^0R = {}^0R \begin{matrix} 12 \\ 16 \end{matrix} R \quad (41)$$

در نتیجه:

$${}^0R = {}^0R \begin{matrix} 12 \\ 16 \end{matrix} R^{-1} \quad (42)$$

در طرف چپ معادله ۴۲، هیچ متغیری معلوم نیست ولی قیدهای ۱۸، ۲۰ و ۲۲ در طرف راست معادله ۴۲ نیز باید صدق کنند در نتیجه:

$${}^0R \begin{matrix} 12 \\ 16 \end{matrix} R^{-1} = \Omega \quad (43)$$

$$\begin{cases} \Omega(1,2) = \Omega(2,1) \\ e_x - r_{xe/q} = \frac{r_2}{2}(\Omega(1,1) - \Omega(2,2)) \\ e_y - r_{ye/q} = -r_2\Omega(2,1) \end{cases} \quad (44)$$

بعد از حل دستگاه (۲۶) با استفاده از (۳) مختصات نقاط C_1 ، C_2 و C_3 محاسبه می‌شوند.

$$q = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{3} \quad (26)$$

$$\vec{u} = \frac{c_1 - q}{r_2} \quad (27)$$

$$\vec{v} = \frac{c_2 - c_3}{\sqrt{3}r_2} \quad (28)$$

$$\alpha = A \tan 2(w_x, w_z) \quad (29)$$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \quad (30)$$

$$\beta = A \tan 2(-w_y, \sqrt{u_x^2 + u_y^2}) \quad (31)$$

$$\gamma = A \tan 2(u_y, v_y) \quad (32)$$

برای محاسبه زاویه‌های θ_{k7} ، θ_{k8} و θ_{k9} بدین صورت عمل می‌شود که از قیدهای هندسی (رابطه‌های ۱۹ و ۲۱)، یک دستگاه معادله بدست می‌آید:

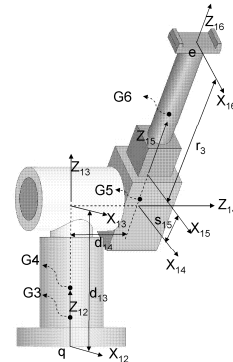
$$\begin{cases} {}^0T_k(1,4) = q_x \\ {}^0T_k(2,4) = q_y \end{cases} \quad (33)$$

با حل عددی دستگاه، θ_{k7} و θ_{k8} بدست می‌آیند. قید هندسی (رابطه ۱۸) بدست می‌دهد:

$${}^0T_k(1,2) = {}^0T_k(2,1) \quad (34)$$

که با حل عددی آن، θ_{k9} بدست می‌آید. پس از مشخص شدن زاویه‌های اولیه، ${}^0T_{ZXY}(\gamma, \beta, \alpha)$ و با ضرب آن در ماتریس انتقال ربات زنجیری، qT ، با استفاده از جدول (۲) و شکل (۵)، بردار مکان نقطه انتهایی e بدست می‌آیند:

$${}^0T = {}^0T {}^qT \Rightarrow {}^0T = {}^0T \begin{matrix} 12 \\ 16 \end{matrix} T \quad (35)$$



شکل ۵. مختصات دناویت- هارتنبرگ ربات RRP

جدول ۲. پارامترهای دناویت- هارتنبرگ ربات سری

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
13	0	0	d_{13}	θ_{13}
14	0	-90	d_{14}	θ_{14}
15	0	90	$d_{15} = s_{15}$	0
16	0	0	r_3	0

ادامه کار همانند حالت سرعت است بطوری که از معادلات قید و مکان دو بار مشتق می‌گیریم.

در پایان این بخش لازم به ذکر است که نقاط تکین داخلی ربات موازی ۴ نوع می‌باشد [۵]:

- ۱- وقتی رابطهای میله ای بر پایه هرمی عمود باشند که در حالت $\theta_{k6} = 90$ اتفاق می‌افتد،
- ۲- وقتی رابطهای میله ای با سکوی متحرک در یک راستا قرار بگیرند که در حالت $\theta_{k7} = 0$ اتفاق می‌افتد،
- ۳- وقتی حالت‌های ۱ و ۲ با هم اتفاق بیافتند.
- ۴- وقتی سکوی متحرک بطور کامل وارونه شود که به این حالت نقطه تکین قیدی می‌گویند.

۷. مدل‌سازی دینامیک به روش لاگرانژ

برای بررسی دینامیک سیستم، با استفاده از روش لاگرانژ، ابتدا لاگرانژین سیستم را می‌نویسیم:

$$L = K - U \quad (51)$$

که در آن K انرژی جنبشی کل:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \bar{\omega}_i^T [I]_{gi} \bar{\omega}_i + \frac{1}{2} \bar{V}_{gi}^T m_i \bar{V}_{gi} \quad (52)$$

و U انرژی پتانسیل کل:

$$U = -\sum_{j=1}^n m_j \bar{g} \cdot \bar{r}_{g_j} \quad (53)$$

$$\bar{g} = [0 \quad 0 \quad 9.8]^T \quad (54)$$

n: تعداد رابط و در نتیجه معادله لاگرانژ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (55)$$

$$Q_j + \sum_{i=1}^R \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} \quad \text{for } j = 1 \text{ to } n \quad [15 \text{ و } 16]$$

R: تعداد قیدهای غیرهولونومیک، F: تابع استهلاک نیروی تعمیم یافته و λ_i : مختصات تعمیم می‌باشند.

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial q_j} \quad (56)$$

\bar{F}_i : نیروهای موثر بر ذره i و \bar{r}_i : بردار مختصات تعمیم یافته برای سیستم غیرهولونومیک [۱۶]

اگر اصطکاک از نوع ویسکوز باشد، تابع استهلاک رابلی، [۱۵]، به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, \dots, q_n) \quad (57)$$

D: ماتریس استهلاک خطی

H: ماتریس استهلاک دورانی

با حل دستگاه ۴۴، متغیرهای مجهول θ_{13} ، θ_{14} و s_{16} و پس از آن q_x ، q_y و q_z مشخص می‌شوند:

$$\bar{q} = \bar{e} - \bar{r}_{elq} \quad (45)$$

اکنون که طرف راست معادله ۴۲ مشخص گردید، با نوشتن سه معادله قید برای طرف چپ آن معادله 0R_q و با حل سه معادله سه مجهول متغیرهای مجهول α ، β و γ که زاویه‌های اویلر هستند، محاسبه می‌شوند.

با استفاده از رابطه‌های ۷ و ۸ مولفه‌های بردارهای 0C_k بدست می‌آیند، از طرفی با استفاده از جدول (۱) و رابطه‌های ۲ و ۳، مختصات B_k بدست می‌آیند.

$$\left| {}^0C_k \right|^2 + \left| \hat{B}_k \right|^2 = \left| C_k B_k \right|^2 = a_6^2 \quad (46)$$

حل معادله درجه دو (رابطه ۴۶)، اندازه و جهت d_{k5} را می‌دهد. بقیه زاویه‌ها مانند حالت مستقیم بدست می‌آیند.

با مشخص بودن همه مکانها و زاویه‌ها و ماتریس سرعت نقطه انتهایی e، ورودیهای سرعتی شامل \dot{d}_{k5} ، \dot{s}_{15} ، $\dot{\theta}_{13}$ و $\dot{\theta}_{14}$ محاسبه می‌شوند. با مشتق گیری از رابطه ۴۱ نسبت به زمان:

$${}^o\dot{R} = ({}^o\dot{R} - {}^oR_{16}{}^{12}\dot{R})_{16}{}^{12}R^{-1} \quad (47)$$

با توجه به اینکه مشتق قیدها نسبت به زمان در طرف راست معادله

۴۷ برقرار است برای طرف چپ نیز برقرار است و در نتیجه:

$$\begin{cases} {}^o\dot{R}(1,2) = {}^o\dot{R}(2,1) \\ \dot{q}_x = \dot{e}_x - \dot{r}_{xelq} = \frac{r_2}{2} ({}^o\dot{R}(1,1) - {}^o\dot{R}(2,2)) \\ \dot{q}_y = \dot{e}_y - \dot{r}_{yelq} = -r_{2q} {}^o\dot{R}(2,1) \end{cases} \quad (48)$$

دستگاه سه معادله خطی ۴۸ با مجهولات \dot{s}_{15} ، $\dot{\theta}_{13}$ و $\dot{\theta}_{14}$ تشکیل می‌شود که با محاسبه آنها، \dot{q}_x ، \dot{q}_y و \dot{q}_z بدست می‌آیند.

با نوشتن مشتق معادلات قید برای سمت چپ معادله ۴۷، معادلات قید ${}^o\dot{R}$ و حل آن دستگاه، $\dot{\alpha}$ ، $\dot{\beta}$ و $\dot{\gamma}$ سرعتهای زاویه ای اویلری بدست می‌آیند.

با توجه به رابطه ۳۹، داریم:

$${}^oV r_{2k/q} = \frac{d}{dt} (c_k) \quad (49)$$

برابری مولفه‌های اول و سوم معادله ۴۸ (چون استقلال خطی دارند) به ما $\dot{\theta}_{k6}$ و \dot{d}_{k5} را می‌دهند. بقیه سرعتهای زاویه‌ای مانند حالت مستقیم بدست می‌آیند.

با مشخص بودن همه مکانها و زاویه‌ها و سرعتها و ماتریس شتاب نقطه انتهایی e، شتاب‌های ورودی oA ، شتاب‌های ورودی \dot{d}_{k5} ، \dot{s}_{15} ، $\dot{\theta}_{13}$ و $\dot{\theta}_{14}$ محاسبه می‌شوند. برای این کار از دو طرف رابطه ۳۸ نسبت به زمان دو بار مشتق می‌گیریم:

$${}^o\ddot{R} = ({}^o\ddot{R} - 2{}^o\dot{R}{}^{12}\dot{R} - {}^oR_{16}{}^{12}\ddot{R})_{16}{}^{12}R^{-1} \quad (50)$$

1. Nonholonomic
2. Generalized Forces
3. Generalized Coordinates

$$q_x = \frac{r_2}{2}(\cos(\alpha) - 1) \quad (63)$$

$$\beta = \gamma = \dot{\beta} = \dot{\gamma} = \ddot{\beta} = \ddot{\gamma} = \ddot{\alpha} = 0$$

$$q_y = \dot{q}_y = \ddot{q}_y = \dot{q}_z = \ddot{q}_z = 0$$

$$\dot{\alpha} = 1 \text{ deg/s}$$

$$\dot{q}_x = -\frac{r_2}{2} \sin(\alpha) \dot{\alpha} \quad (64)$$

$$\ddot{q}_x = -\frac{r_2}{2} \cos(\alpha) \ddot{\alpha} \quad (65)$$

در ادامه فرض می‌کنیم که سکوی متحرک مانعی برای دوران نیست و همچنین:

$$\theta_{13} = \dot{\theta}_{13} = \ddot{\theta}_{13} = \ddot{\theta}_{14} = 0$$

$$\dot{\theta}_{14} = 5 \text{ deg/s}$$

$\theta_{14} = \alpha$ از صفر تا ۹۰ درجه دوران می‌کند.

$$\dot{s}_{15} = \alpha \text{ mm/s}$$

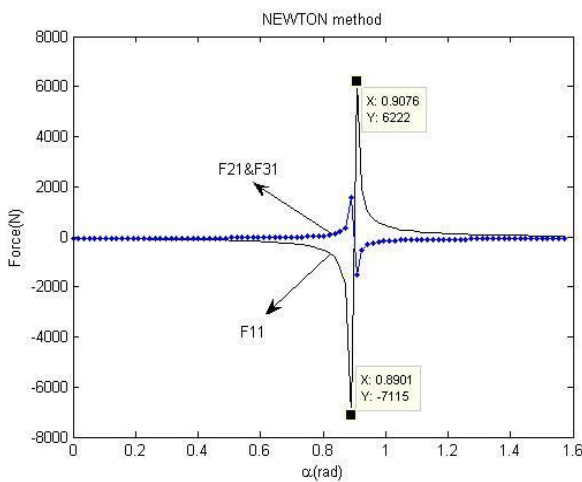
$$\ddot{s}_{15} = 0 \text{ mm/s}^2$$

$$q_z = 525.6 \text{ mm}$$

شکل (۶) نشان می‌دهد که با استفاده از روش نیوتن

در $\alpha \approx 52^\circ \approx 0.9 \text{ rad}$ نیروی F_{11} به سمت اعداد بزرگ میل می‌کند و در نتیجه یک نقطه تکین می‌باشد که در اثر هم راستایی میله و سکوی متحرک به وجود آمده است و دلیل آن هم شکل (۸) است که θ_{17} به صفر میل می‌کند. همچنین در این نقطه: $\alpha = \theta_{16} + \psi$.

در شکل (۹) در نقطه مذکور شکل d_{15} در حال تغییر جهت است. اما در شکل (۷) که با استفاده از روش لاگرانژ بدست آمده نقطه تکین $\alpha \approx 63.1^\circ \approx 1.1 \text{ rad}$ است.



شکل ۶. تغییر نیروهای پایه نسبت به α با استفاده از روش نیوتن

در حالت بدون اصطکاک ربات هیبرید ۱۲ مختصات تعمیم یافته و ۶ درجه آزادی دارد و در نتیجه ۶-۱۲ R معادله قید نیاز می‌باشد. در اینجا مختصات تعمیم یافته عبارتند از:

$$q_1 = d_{15}, q_2 = d_{25}, q_3 = d_{35},$$

$$q_4 = \alpha, q_5 = \beta, q_6 = \gamma,$$

$$q_7 = q_x, q_8 = q_y, q_9 = q_z,$$

$$q_{10} = \theta_{13}, q_{11} = \theta_{14}, q_{12} = s_{15}$$

معادلات قید اندازه:

$$\Gamma_k(d_{k5}, \alpha, \beta, \gamma, q_x, q_y, q_z) = |B_k C_k| \quad (58)$$

معادلات قید مکان:

$$\Gamma_4 = -C\alpha S\gamma + S\beta S\alpha C\gamma - C\beta S\gamma \quad (59)$$

$$\Gamma_5 = \frac{r_2}{2}(C\alpha C\gamma + S\beta S\gamma S\alpha - C\beta C\gamma) - q_x \quad (60)$$

$$\Gamma_6 = r_2 C\beta S\gamma + q_y \quad (61)$$

اگر نیروها و گشتاورهای اصطکاکی در مفصل‌های کروی و لولایی

نیز لازم باشند، ۱۲ مختصات تعمیم یافته دیگر و در نتیجه ۱۲ معادله قید دیگر نیاز است.

$$\Gamma_{k+6}(\theta_{k+1,6}, d_{k+1,5}, \theta_{k6}, d_{k5}) = |C_k C_{k+1}| \quad (62)$$

۹ معادله دیگر از معادلات ۳۳ و ۳۴ بدست می‌آیند. اگر از اصطکاک چشم‌پوشی شود، معادلات دینامیکی حاصل از رابطه ۵۵ به صورت ارائه شده در پیوست خواهد بود، که در آن F : نیروی کار انداز و T : گشتاور راه‌انداز و \vec{r}_g : بردار مکان مرکز جرم هر رابط است.

۸. حرکت ربات در حالت تغییر α

در این حالت فرض می‌شود که ربات با اندازه‌های زیر داریم:

$$\psi = \frac{\pi}{6}, r_1 = 400 \text{ mm}, r_2 = 200 \text{ mm}$$

$$r_3 = 30 \text{ mm}, a_5 = 50 \text{ mm}, a_6 = 550 \text{ mm}$$

$$d_{13} = 50 \text{ mm}, d_{14} = 0, m_3 = 26.514 \text{ kg}$$

$$m_1 = 1.146 \text{ kg}, G_1 = 34 \text{ mm}$$

$$m_2 = 1.034 \text{ kg}, G_2 = 290 \text{ mm}$$

$$m_4 = 1.464 \text{ kg}, G_4 = 50 \text{ mm}$$

$$m_5 = 0.01 \text{ kg}, G_5 = 13 \text{ mm}$$

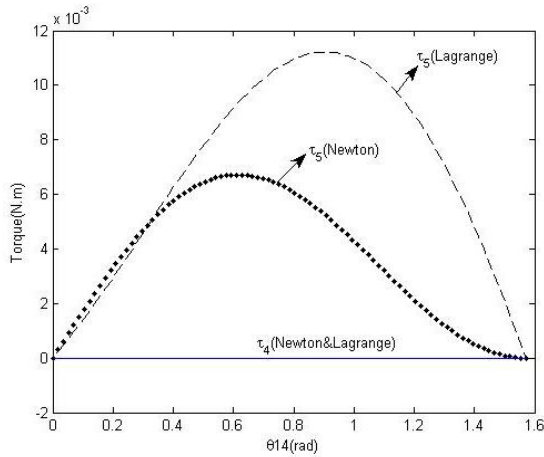
$$m_6 = 0.01 \text{ kg}, G_6 = 53 \text{ mm}$$

F_{11}, F_{21}, F_{31} : نیروی اعمالی به اتصال کشویی پایه‌ها

F_6 : نیروی اعمالی به اتصال کشویی ۶ ربات سری

$T_{4,5}$: گشتاور اعمالی به اتصالات لولایی ۴ و ۵ ربات سری

نقطه q واقع در وسط سکو در یک ارتفاع ثابت حول محور v از صفر تا ۹۰ درجه و با سرعت ۱ درجه در ثانیه و شتاب زاویه‌ای صفر در حال دوران است. با استفاده از معادلات قید (۱۹، ۲۱ و ۲۳)، معادلات سینماتیکی به این صورت خواهد بود.



شکل ۱۰. تغییر گشتاورها در ربات سری نسبت به θ_{14}

۹. حرکت ربات در حالت تغییر β

در این حالت فرض می شود که ربات با اندازه های قبلی است و نقطه q واقع در وسط سکو در یک ارتفاع ثابت حول محور u از صفر تا 90° درجه و با سرعت 1° درجه در ثانیه و شتاب زاویه ای صفر در حال دوران است. با استفاده از معادلات قید (۲۰، ۲۲ و ۲۳)، معادلات سینماتیکی به این صورت خواهد بود.

$$q_x = \frac{r_2}{2} (1 - \cos(\beta)) \quad (66)$$

$$\alpha = \gamma = \dot{\alpha} = \dot{\gamma} = \ddot{\alpha} = \ddot{\gamma} = 0$$

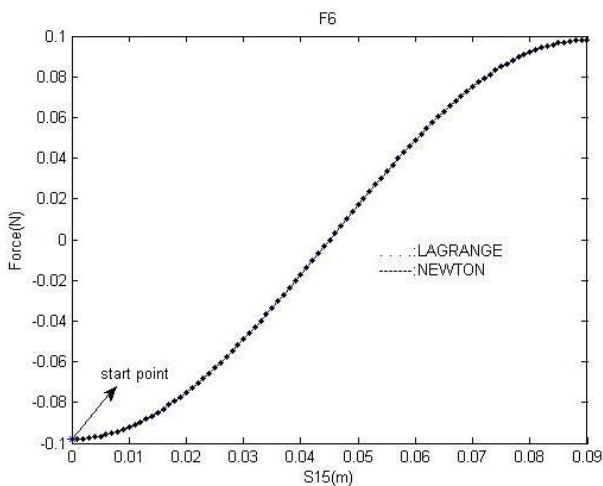
$$\ddot{\beta} = 0$$

$$q_y = \dot{q}_y = \ddot{q}_y = \dot{q}_z = \ddot{q}_z = 0$$

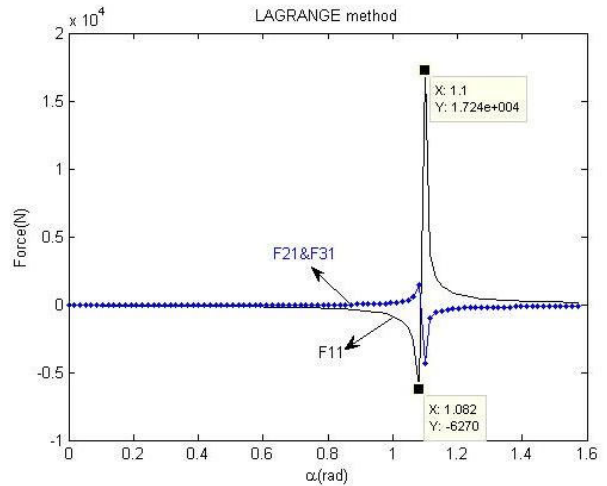
$$\dot{\beta} = 1 \text{ deg/s}$$

$$\dot{q}_x = \frac{r_2}{2} \sin(\beta) \dot{\beta} \quad (67)$$

$$\ddot{q}_x = \frac{r_2}{2} \cos(\beta) \ddot{\beta} \quad (68)$$

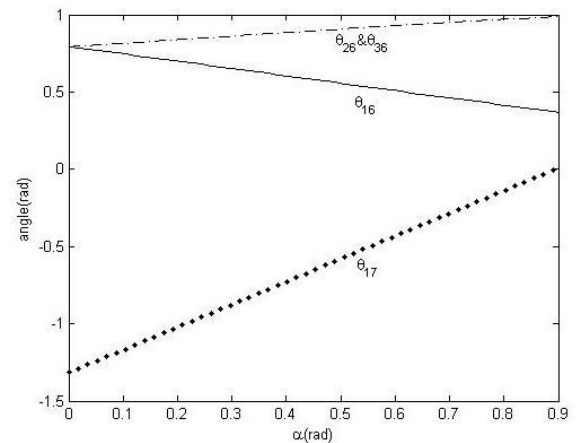


شکل ۱۱. نیروی نیوتنی و لاگرانژی F_6 نسبت به S_{15}

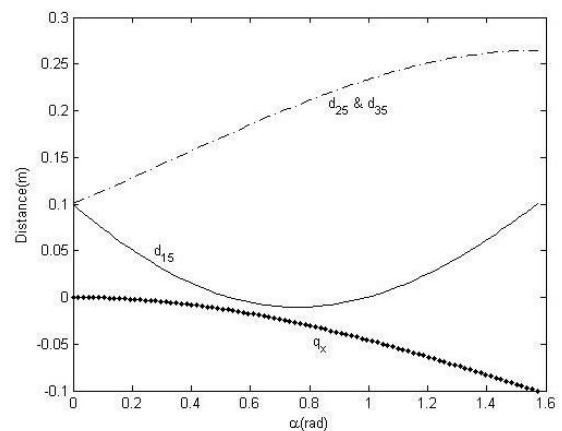


شکل ۷. تغییر نیروهای پایه نسبت به α با استفاده از روش لاگرانژ

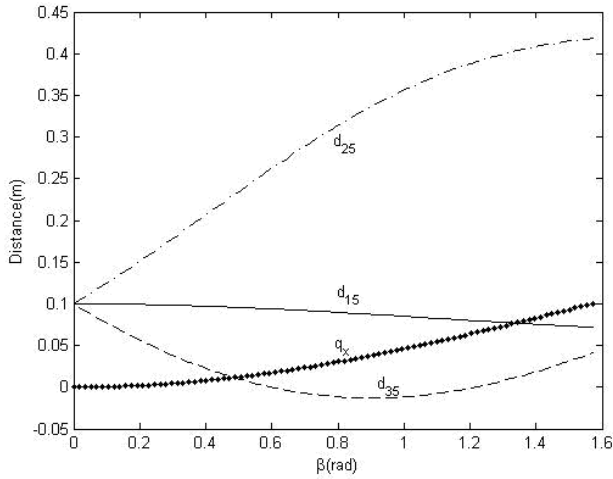
شکل های (۶)، (۷) و (۱۰) نشان دهنده اختلاف در مکان نقطه تکین و در مقدار نیروها در دو روش هستند، در حالی که در شکل (۱۱) هر دو روش بر هم منطبقند که علت آن خطای محاسباتی ناشی از توابع مثلثاتی در روش لاگرانژ، بویژه در ناحیه تکینگی است.



شکل ۸. تغییر زاویه پایه و نقطه q نسبت به α

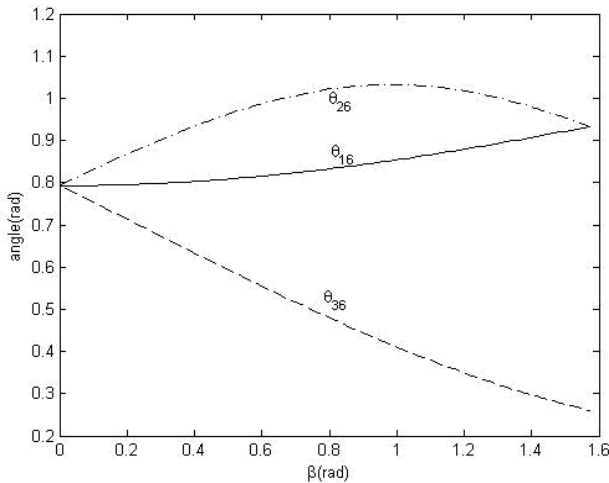


شکل ۹. تغییر مکانهای پایه و نقطه q نسبت به α

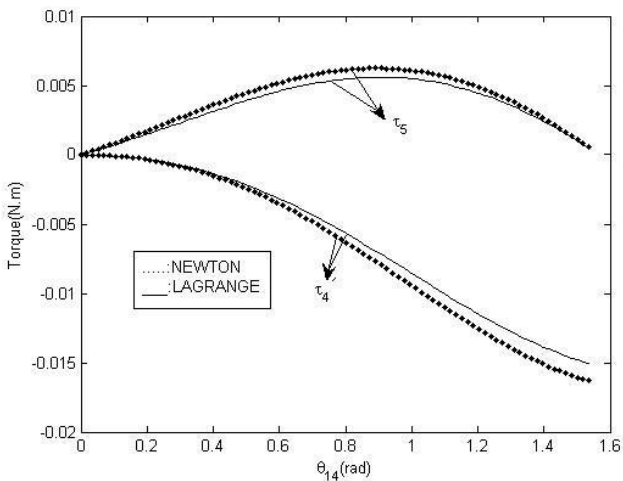


شکل ۱۴. تغییر مکانهای پایه و نقطه q نسبت به β

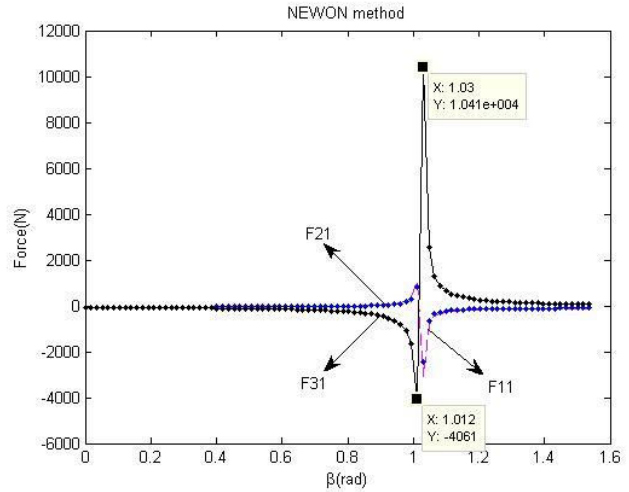
شکل‌های (۱۶) و (۱۷) بیانگر میزان نزدیکی نقاط روش نیوتن و لاگرانژ می‌باشند که برخلاف حالت ۸ مقادیر تکینگی اثر قابل توجهی بر اختلاف آنها ندارد و این به علت وضعیت هندسی حرکت می‌باشد. در هر دو حالت ۸ و ۹ میله‌ها به اندازه زاویه‌ای به مرکز اتصال کروی که نصف ضخامت میله را در بر می‌گیرد قبل از رسیدن به نقطه تکین متوقف می‌شوند.



شکل ۱۵. تغییر زاویه‌های θ_{k6} نسبت به β



شکل ۱۶. تغییر گشتاورها در ربات سری نسبت به θ_{14}



شکل ۱۲. تغییر نیروهای پایه نسبت به β با روش نیوتن

مانند قبل فرض می‌کنیم که سکوی متحرک مانعی برای دوران نیست و همچنین:

$$\theta_{13} = \dot{\theta}_{13} = \ddot{\theta}_{13} = \ddot{\theta}_{14} = 0$$

$$\dot{\theta}_{14} = 5 \text{ deg/s}$$

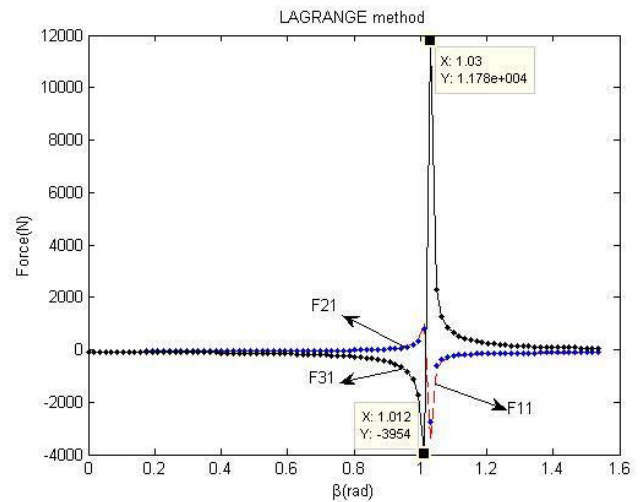
$\theta_{14} = \beta$ از صفر تا ۹۰ درجه دوران می‌کند.

$$\ddot{s}_{15} = 0$$

$$\dot{s}_{15} = \beta \text{ mm/s}$$

$$.q_z = 525.6 \text{ mm} \text{ و } \beta_{\max} \approx 57^\circ \approx 1 \text{ rad}$$

شکل نیروهای وارد بر عملگرها را برحسب β تا حدود ۹۰ درجه با دو روش نیوتن و لاگرانژ رسم می‌کنیم.



شکل ۱۳. تغییر نیروهای پایه نسبت به β با روش لاگرانژ

در این حالت شکل‌های (۱۲) و (۱۳) پرش ناگهانی نیرو و نقطه تکین را با دو روش نشان می‌دهند که هر دو روش برخلاف حالت ۸ یک نقطه را برای مجانب شدن مشخص می‌کنند ولی به علت خطای محاسباتی روش لاگرانژ دارای خطا بویژه در ناحیه تکین است.

شکل‌های (۱۴) و (۱۵) نشان می‌دهند که در این نقطه، شکل d_{35} و

θ_{26} ، تغییر جهت می‌دهند (نقطه اکسترمم).

spindle platform of a serial-parallel machine tool", 2003, International Journal of Machine Tools & Manufacture, 43 (2003) 1561–1569.

[9] Pond G., Carretero J. A., "Architecture optimisation of three 3-PRS variants for parallel kinematic machining", Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2007.

[10] Wang L., Xi F., Zhang D., "A parallel robotic attachment and its remote manipulation", Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 22 (2006) 515–525.

[11] Bi, Z. M., Lang S. Y. T., "Joint workspace of parallel kinematic machines", Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2007.

[12] Perez A., McCarthy J. M., "Geometric design of RRP, RPR and PRR serial chains", Mechanism and machine theory, 40 (2005) 1294–1311.

[13] Craig J. J., "Introduction to robotics: Mechanics and control (Second Edition)", Addison Wesley Longman, 1989.

[14] D'souza A. F., Grag V. K., "Advanced Dynamics: Modeling and Analysis", Prentice Hall, 1984.

[15] Lung-Wen Tsai L. W., "Robot analysis: The mechanics of serial and parallel manipulators", John Wiley & Sons, INC. 1999.

[16] Baruh H., "Analytical dynamics", McGraw-Hill Publisher, 1999.

پی نوشت: فرم کلی معادلات دینامیکی

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{d}_{k5}} - (m_1 \frac{\partial \bar{r}_{gk1}}{\partial d_{k5}} + m_2 \frac{\partial \bar{r}_{gk2}}{\partial d_{k5}}) \cdot \bar{g} = F_{k1} + \lambda_k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial d_{k5}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_x} - (m_3 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g3}}{\partial q_x} + m_4 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g4}}{\partial q_x} + m_5 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g5}}{\partial q_x} + m_6 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g6}}{\partial q_x}) =$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial q_x} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial q_x} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial q_x} + \lambda_5 \frac{\partial \Gamma_5}{\partial q_x}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_y} - (m_3 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g3}}{\partial q_y} + m_4 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g4}}{\partial q_y} + m_5 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g5}}{\partial q_y} + m_6 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g6}}{\partial q_y}) =$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial q_y} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial q_y} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial q_y} + \lambda_6 \frac{\partial \Gamma_6}{\partial q_y}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_z} - (m_3 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g3}}{\partial q_z} + m_4 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g4}}{\partial q_z} + m_5 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g5}}{\partial q_z} + m_6 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g6}}{\partial q_z}) =$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial q_z} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial q_z} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial q_z} + \lambda_6 \frac{\partial \Gamma_6}{\partial q_z}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\alpha}} - (m_3 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g3}}{\partial \alpha} + m_4 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g4}}{\partial \alpha} + m_5 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g5}}{\partial \alpha} + m_6 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g6}}{\partial \alpha}) =$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \alpha} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \alpha} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \alpha} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \alpha} + \lambda_5 \frac{\partial \Gamma_5}{\partial \alpha}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\beta}} - (m_3 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g3}}{\partial \beta} + m_4 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g4}}{\partial \beta} + m_5 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g5}}{\partial \beta} + m_6 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g6}}{\partial \beta}) =$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \beta} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \beta} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \beta} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \beta} + \lambda_5 \frac{\partial \Gamma_5}{\partial \beta} + \lambda_6 \frac{\partial \Gamma_6}{\partial \beta}$$

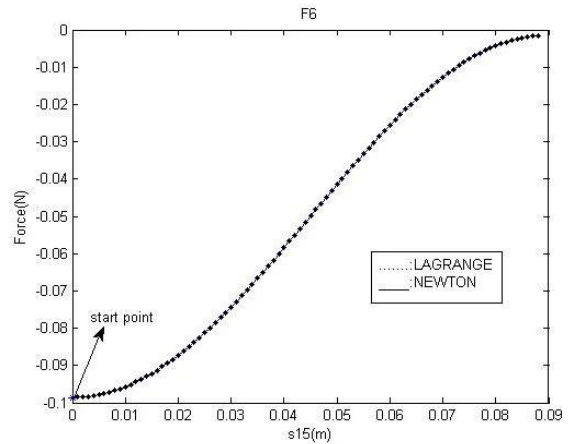
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\gamma}} - (m_3 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g3}}{\partial \gamma} + m_4 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g4}}{\partial \gamma} + m_5 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g5}}{\partial \gamma} + m_6 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g6}}{\partial \gamma}) =$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \gamma} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \gamma} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \gamma} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \gamma} + \lambda_5 \frac{\partial \Gamma_5}{\partial \gamma} + \lambda_6 \frac{\partial \Gamma_6}{\partial \gamma}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_{13}} - (m_4 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g4}}{\partial \theta_{13}} + m_5 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g5}}{\partial \theta_{13}} + m_6 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g6}}{\partial \theta_{13}}) = T_4$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_{14}} - (m_5 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g5}}{\partial \theta_{14}} + m_6 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g6}}{\partial \theta_{14}}) = T_5$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{s}_{15}} - m_6 \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{r}_{g6}}{\partial s_{15}} = F_6$$



شکل ۱۷. تغییر نیروی F_6 نسبت به s_{15}

۱۰. نتیجه گیری

۱. ماتریس دناویت هارتبرگ می تواند ابزاری خوب برای درک و تحلیل حرکت هر نوع ربات باشد و درکنار رایانه با حافظه و سرعت بالا و روشهای محاسبات عددی مناسب که بتوان جوابهای اضافی را حذف کرد، سینماتیک و دینامیک هر جزء را بدست می آورد.

۲. به علت مشکل بودن حل سینماتیک مستقیم ربات موازی و معکوس ربات سری، برای راحتی کار با این گونه ربات هیبرید بهتر است از ربات موازی استفاده شود که سکوی متحرک حرکت خطی داشته و در جهت فضادهی واستحکام بخشی بکار رود و یا اینکه کارکرد سری و موازی از نظر زمانی استقلال داشته باشند.

۳. شکلهای نیرو و گشتاور نشان می دهند که روش لاگرانژ در پیدا کردن نقاط تکین و مقدار نیرو دارای خطای زیاد می باشد که علت آن خطای محاسباتی است.

۴. در پایان روشی عمومی برای سینماتیک رباتهای موازی و هیبرید با استفاده از روش لاگرانژ بدون استفاده از ماتریس ژاکوبین بدست آمد.

مراجع

- [1] Merlet J. P. "Parallel robots", Springer publisher, 2006.
- [2] Lee S., Kim S., "Efficient inverse kinematics for serial connections of serial and parallel manipulators", Proceedings of the IEEE/RSJ International conference on intelligent robots and systems Yokohama, Japan, 1993.
- [3] Shahinpoor M. "Kinematics of a parallel-series (hybrid) manipulator", Jour. Rob. Sys, 9 (1992) 17-36.
- [4] Waldron K. J., Raghavan M. and Roth B., "Kinematics of a hybrid series-parallel manipulator system", 1989, Trans. ASME J. Mech. Trans. and Auto. Des, 111 (1989) 211-215.
- [5] Li Y., Xu Q., "Kinematic analysis of a 3-PRS parallel manipulator", Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2006.
- [6] Zhang D., Xi F., Mechefske C. M., Lang S. Y. T., "Analysis of parallel kinematic machine with kinetostatic modelling method", Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 20 (2004) 151–165.
- [7] Tsai M. S., Shiao T. N., Tsai Y. J., Chang T. H., "Direct kinematic analysis of a 3-PRS parallel mechanism", Mechanism and Machine Theory, 38(2003)71–83.
- [8] Fan K. C., Wang H., Zhao J. W., Chang T. H., "Sensitivity analysis of the 3-PRS parallel kinematic

