

## توسعه و بهبود شاخص رتبه‌بندی در روش تاپسیس با داده‌های فازی تصویری

وحیده حجتی نجف‌آبادی<sup>۱</sup>، رضا مداحی<sup>۲</sup>

چکیده:

از زمانی که در سال ۱۹۶۵، پروفسور لطفی عسگرزاده مجموعه فازی را به جهان معرفی نمود، نظریه‌های جدید زیادی در مورد عدم دقت و عدم قطعیت به وجود آمدند. برخی از این نظریه‌ها، به عنوان یک توسعه فرعی از نظریه مجموعه‌های فازی، مفهومی جدید به نام مجموعه فازی تصویری را مطرح کردند. از طرف دیگر، یکی از روش‌هایی که بسیار در تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش تاپسیس نام دارد. در این مقاله، ابتدا روش تاپسیس در حضور داده‌های فازی تصویری، توضیح داده شده و سپس با استفاده از این روش، با هدف بهبود عملکرد آن، شاخصی جدید برای رتبه‌بندی، توسعه داده می‌شود. در ادامه، با استفاده از نرم‌افزار اکسل، جهت توضیح روش ارائه شده در این مقاله، مثالی حل می‌گردد. همچنین، با حل مثالی با اعداد فازی که در تعریف اعداد فازی تصویری در این تحقیق ارائه شده است، تغییرات لازم با استفاده از نرم‌افزار اکسل انجام شده و فاصله تا حالت ایدئال و ضد ایدئال محاسبه می‌گردد. در نهایت، رتبه‌بندی جدیدی مشخص می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تاپسیس، مجموعه فازی، مجموعه فازی شهودی، مجموعه فازی تصویری

### ۱- مقدمه

مجموعه فازی<sup>۳</sup> (FS) (Zadeh, 1965) برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسگرزاده، دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه ارائه شد. نظریه فازی، نظریه‌ای برای اقدام کردن در شرایط عدم قطعیت است. این نظریه، می‌تواند بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌هایی را که نامشخص و مبهم هستند، به شکل ریاضی درآورد و زمینه را

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد گروه ریاضی، واحد نجف‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف‌آباد، ایران

<sup>۲</sup> استادیار گروه ریاضی، واحد نجف‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف‌آباد، ایران

برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایطی که اطمینان وجود ندارد، فراهم آورد.

مفهوم مجموعه‌های فازی شهودی<sup>۱</sup> (IFS) برای اولین بار توسط کراسمیر آتاناسوف<sup>۲</sup> در سال ۱۹۸۳ مطرح گردید. سپس او به بررسی مفهوم مجموعه‌های فازی دوگانه پرداخت و روش‌های مختلفی برای توصیف این نوع از مجموعه‌ها ارائه کرد. همچنین، کاربردهای این نوع از مجموعه‌های فازی در حوزه تصمیم‌گیری چند معیاره و تحلیل پوششی داده‌ها نیز به طور کامل مورد بررسی قرار گرفت. این مقاله، یکی از مقالات پایه‌ای در حوزه مجموعه‌های فازی دوگانه است و تأثیر بسیاری در پژوهش‌های بعدی، در این حوزه داشته است (Atanassov, 1986). مجموعه فازی شهودی، در واقع نوع خاصی از مجموعه فازی است که به کمک آن می‌توان مفهومی را که به صورت نامحدود و بدون نیاز به تعریف دقیق و شفاف است، به صورت فازی تعریف کرد. به عبارت دیگر، در تعریف IFS اطلاعات منفی هم آمده است (Kreinovich, 2013).

اخیراً مجموعه فازی تعمیم‌یافته جدیدی به نام مجموعه فازی تصویری، توسط کانگ و کرینویچ<sup>۳</sup> پیشنهاد شده است (Kreinovich, 2014). کلمه «تصویر» در PFS به کلیت اشاره دارد؛ زیرا این مجموعه، پسوند مستقیم FS و IFS است (Son, 2016). به عبارت دیگر، PFS اطلاعات خنثی و منفی را در تعریف خود ادغام می‌کند، به طوری که وقتی مقدار(های) یک (هر دو) از آن درجه‌ها برابر با صفر است، به مجموعه (IFS (FS برمی‌گردد. در مقایسه با IFS، PFS درجه تردید را به دو بخش تقسیم می‌کند: درجه امتناع و درجه خنثی (Son, 2016). در ادامه مقاله، در قسمت‌های تعریف ۲ و مثال ۱ بحث می‌شود.

روش فازی تاپسیس برای اولین بار توسط هربرت سایمنز<sup>۴</sup> در دهه ۱۹۶۰ معرفی شد. او این روش را برای انتخاب بهترین گزینه‌ها در برنامه‌ریزی فضایی استفاده کرد. سپس در دهه ۱۹۸۰، جرج ه. تزو<sup>۵</sup> و دیگران این روش را به شکل فازی توسعه داده و

<sup>1</sup> Intuitive Fuzzy Sets

<sup>2</sup> Krassimir T. Atanassov

<sup>3</sup> Cuong&Kreinovich

<sup>4</sup> Herbert Simon

<sup>5</sup> George H. Tzou

آن را به عنوان روشی برای تصمیم‌گیری چندمعیاره در شرایط عدم قطعیت معرفی کردند. جهانشاهلو<sup>۱</sup> و همکاران، روش تاپسیس را به مسائل تصمیم‌گیری با داده‌های فازی گسترش دادند. در تحقیقات آنها، رتبه‌بندی هر جایگزین و وزن هر معیار اعداد فازی مثلثی بیان شده است (Jahanshahloo, 2006). از آن زمان به بعد، فازی تاپسیس، به عنوان یکی از مهمترین روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره در شرایط فازی، شناخته شده است. در روش تاپسیس فازی، مزیت تاپسیس با قابلیت تئوری مجموعه‌های فازی برای مدیریت عدم دقت و عدم قطعیت ترکیب می‌شود، به طوری که تصمیم مناسب در یک محیط فازی به دست می‌آید (Tzou, 1983).

روش تاپسیس<sup>۲</sup> یک روش تحلیلی چندمعیاره است که برای انتخاب بهترین گزینه از میان فهرست گزینه‌ها، استفاده می‌شود. در این روش، ابتدا ماتریسی از فهرست گزینه‌ها و معیارهای مشخص شده برای ارزیابی آنها تهیه می‌شود. سپس با استفاده از این ماتریس، برای هر گزینه، فاصله آن با بهترین و بدترین گزینه‌ها به روش اقلیدوسی محاسبه می‌گردد. در نهایت، امتیاز تاپسیس برای هر گزینه، به شکل فاصله گرفته شده از بهترین گزینه تقسیم بر مجموع فاصله‌ها محاسبه می‌شود (Hwang, 1981).

سرانجام، بوران<sup>۳</sup> و همکاران، روش تاپسیس را با مجموعه فازی شهودی ترکیب کردند تا بهترین گزینه را در یک محیط تصمیم‌گیری انتخاب کنند (Boran, 2009). آنها با استفاده از اعداد فازی شهودی، امتیاز هر گزینه و وزن هر معیار را بیان کردند. سپس، عدد فازی شهودی نرمال شده را محاسبه نمودند و در نهایت رتبه‌بندی را برای آن اعمال کردند.

در این تحقیق، ابتدا روش تاپسیس با داده‌های فازی تصویری، توضیح داده می‌شود. سپس شاخص رتبه‌بندی به منظور بهبود عملکرد، توسعه داده می‌شود؛ با ارایه مثال و تعریف بیان شده در (Son, 2016) و بیان روش R-S نرم در تصمیم‌گیری چندمعیاره<sup>۴</sup> (MCDM) در مسئله PFS (Gandotra, 2021) ماتریس  $[PFM]_{m \times n}$  با تعریف مجموعه فازی تصویری ساخته می‌شود و در ادامه، با طرح یک قضیه برای تبدیل یک

<sup>1</sup> G.R.Jahanshahloo

<sup>2</sup> TOPSIS

<sup>3</sup> F.E.Boran

<sup>4</sup> Multi-Criteria Decision-Making

فضای  $n$  بعدی به یک فضای دوبعدی و معرفی شاخص پیشنهادی (Sadabadi, 2022) ، قضیه را برای  $L^+ + L^- \simeq \frac{1}{2}$  اثبات نموده و همچنین مثال ارائه شده در مقاله (Gandotra, 2021) (به کمک نرم افزار اکسل، تحلیل و بررسی می‌گردد).

## ۲- ادبیات تحقیق

### ۲-۱ تعاریف پایه

مجموعه فازی، بر اساس تابع عضویت تعریف می‌شود که تصویر مجموعه، در بازه بسته صفر و یک است. هریک از اعضا، درجه عضویت دارند. اگر درجه عضویت یک عنصر از مجموعه، برابر با صفر (یا یک) باشد، آن عضو، کاملاً از مجموعه خارج (در مجموعه قرار دارد) است. اگر به صورت جزئی، شامل مجموعه فازی باشد، آن‌گاه درجه عضویت آن بین صفر و یک خواهد بود. چون مجموعه فازی، فقط مقادیرهای عضویت و عدم عضویت را نشان می‌دهد، تعریف تعمیم یافته‌ای وجود دارد که علاوه بر موارد ذکر شده، میزان عضویت ختشی را نیز می‌توان محاسبه نمود که در زیر، ارائه شده است.

#### تعریف ۱:

$A$  یک مجموعه فازی شهودی در یک مجموعه مرجع به صورت

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X\}$$

که در آن  $\mu_A(x)$  درجه عضویت هر عنصر و  $\nu_A(x)$  درجه عدم عضویت هر عنصر، معرفی شده است که محدودیت‌ها را برآورده می‌کند (Atanassov, 1986).

$$\mu_A(x), \nu_A(x) \in [0,1], \forall x \in X,$$

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \forall x \in X.$$

از آنجاکه مجموعه فازی شهودی، فقط مقادیرهای عضویت و عدم عضویت و ختشی را نشان می‌دهد، تعریف جامع و کاملی مطرح گردیده که علاوه بر موارد ذکر شده، میزان عضویت امتناع را نیز می‌توان محاسبه نمود که در زیر، تعریف شده است.

#### تعریف ۲:

یک مجموعه فازی تصویری در یک مجموعه غیر خالی  $X$

$$A = \{(x, \mu_A(x), \eta_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X\}$$

که در آن  $\mu_A(x)$  درجه مثبت هر عنصر  $x \in X$ ،  $\eta_A(x)$  درجه خنثی و  $\nu_A(x)$  درجه منفی است که محدودیت‌ها را برآورده می‌کند (Atanassov, 1986)

$$\mu_A(x), \eta_A(x), \nu_A(x) \in [0,1], \forall x \in X,$$

$$0 \leq \mu_A(x) + \eta_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \forall x \in X.$$

درجه امتناع یک عنصر به صورت  $\pi_A(x) = 1 - (\mu_A(x) + \eta_A(x) + \nu_A(x))$ ،  
 $\forall x \in X$  محاسبه می‌شود. در حالت PFS اگر  $\eta_A(x) = 0$  به مجموعه IFS برمی‌گردد و وقتی هر دو  $\eta_A(x) = \nu_A(x) = 0$ ، PFS به مجموعه FS برمی‌گردد (Son, 2016) برخی از ویژگی‌های عملیات PFS، ترکیب محدب PFS و غیره، همراه با اثبات را می‌توان در (Atanassov, 1986) دید.

در ادامه، مثال ۱ به منظور تفهیم دو تعریف مذکور، آورده می‌شود.

**مثال ۱.** در یک مرکز انتخاباتی محلی، شورا ۵۰۰ برگه رأی برای یک نامزد صادر می‌کند. نتایج رأی‌گیری به چهار گروه به همراه تعداد اوراق به نام‌های «رأی موافق» (۳۰۰)، «ممتنع» (۶۴)، «رأی مخالف» (۱۱۵) و «امتناع از رأی‌گیری» (۲۱) تقسیم شده است. گروه «ممتنع» به این معنی است که برگه رأی‌گیری، یک کاغذ سفید است که هر دو «موافق» و «مخالف» را برای نامزد رد می‌کند، اما همچنان رأی می‌دهد. گروه «امتناع از رأی دادن» یا استفاده از اوراق رأی‌گیری نامعتبر یا رأی ندادن است. این مثال در واقعیت هم اتفاق افتاد و IFS نتوانست آن را توصیف کند زیرا، عضویت خنثی (گروه «ممتنع») وجود ندارد. از طرف دیگر دقت کنید که در این مثال می‌توان از PFS برای فازی‌سازی مثال فوق استفاده کرده و تمام حالت‌های ممکن را در نظر گرفت؛ به این صورت که: میزان عضویت در رأی موافق را با  $\mu_A(x)$ ، میزان عضویت در رأی مخالف را با  $\nu_A(x)$ ، میزان عضویت در رأی ممتنع را با  $\eta_A(x)$  و در نهایت، میزان عضویت در امتناع از رأی دادن را با  $\pi_A(x)$  نمایش داد. در قسمت بعد، روش تاپسیس فازی به طور اجمالی معرفی می‌گردد.

### ۳- روش تاپسیس برای مجموعه فازی تصویری

تصمیم‌گیری چند معیاره، مجموعه روش‌هایی برای اولویت‌بندی بین چندین گزینه در حضور معیارهای مختلف است. مرسوم‌ترین مثالی که برای این روش زده می‌شود، انتخاب بهترین خودرو از بین خودروهای موجود با در نظر گرفتن معیارهایی مانند: مصرف سوخت، قیمت، امنیت، زیبایی و ... است؛ که معمولاً گزینه‌ها (در این مثال خودروها) در سطری یک ماتریس؛ معیارها (مصرف سوخت، قیمت و ...) در ستون‌های آن ماتریس و عملکرد هر گزینه در هر معیار در مولفه واقع در سطر آن گزینه و ستون آن معیار، نمایش داده می‌شود که به ماتریس مذکور، ماتریس تصمیم گفته می‌شود. واضح است زمانی ماتریس تصمیم قابل تشکیل است که عملکرد هر گزینه در هر معیار، موجود و قابل محاسبه کمی باشد. یکی از روش‌های تصمیم‌گیری چندگانه که برای اولویت‌بندی و رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده می‌شود، روش تاپسیس است. این روش، برای اولین بار در سال ۱۹۸۱ توسط هوانگ و یون<sup>۱</sup> (Hwang, 1981) ارائه شد. مبنای اصلی این روش، تعیین گزینه ایدئال (گزینه‌ای مجازی براساس داده‌های مشاهده شده از گزینه‌های موجود، که بهترین عملکرد را در هر معیار داشته باشد)، تعیین گزینه ضد ایدئال (گزینه‌ای مجازی براساس داده‌های مشاهده شده از گزینه‌های موجود که بدترین عملکرد را در هر معیار داشته باشد)، تعیین فاصله هر گزینه با گزینه‌های ایدئال و ضد ایدئال و در نهایت، ترکیب این دو فاصله به عنوان شاخص اصلی اولویت‌بندی گزینه‌ها است. برای مطالعه جزئیات این روش، به (Joshi, 2016) مراجعه شود. در روش تاپسیس معمولی، از یک ماتریس تصمیم استفاده می‌شود که شامل اعداد معمولی است و به تبع آن کلیه محاسبات، با استفاده از محاسبات عادی اعداد حقیقی صورت می‌گیرد.

در سال ۱۹۸۰ جورج ه. تزو و همکاران، روش تاپسیس را برای حالتی که اعداد ماتریس تصمیم، به صورت اعداد فازی باشند، توسعه دادند. از طرفی، اندیس‌نهایی در روش تاپسیس، دارای معایبی است که راه‌حلی برای بهبود آن توسط لای، لیو و هوانگ<sup>۲</sup> در سال ۱۹۹۴ ارائه شد. روش تاپسیس در حضور اعداد فازی تصویری، توسط

<sup>1</sup> K. Yoon & C. L. Hwang

<sup>2</sup> Y.J. Lai & T.Y. Liu & C.L. Hwang

چن<sup>۱</sup> در سال ۲۰۰۰ ارائه شد که همچنان اشکال موجود در اندیس نهایی روش تاپسیس که به منظور رتبه‌بندی استفاده می‌شود، همانند روش تاپسیس معمولی، را دارد. در این پژوهش، مشکل مذکور در روش تاپسیس در حضور اعداد فازی تصویری حل می‌گردد. در ادامه، ابتدا روش تاپسیس در حضور مجموعه فازی تصویری با استفاده از تحقیق سومان و نیراج گاندوترا<sup>۲</sup> بیان می‌شود.

#### ۴- روش شناسی

در نظر بگیرید گروهی کارشناس جمع شده‌اند تا در مورد  $\mu_{ij}$ ،  $\eta_{ij}$  و  $\nu_{ij}$  و جایگزینی با معیارهای دقیق، راهنمایی کنند. بنابراین، برای محاسبه هر کدام از موارد خواسته شده، کافی است متناسب با تعریف هر کدام و با توجه به مجموعه مرجع، قابل اندازه‌گیری باشد. به عنوان مثال: در صورت عدم اطمینان، یک مقدار مشخص ارائه دهند:  $Z_{neg}(i; j)$ . در صورت اطمینان از  $Z_{pos}(i; j)$  و برای محاسبه مقدار عضویت خنثی از  $Z_{new}(i; j)$  استفاده می‌کنند. اگر تعداد مجموعه مرجع را  $Z$  در نظر بگیریم، آنگاه  $\mu_{ij}$ ،  $\eta_{ij}$  و  $\nu_{ij}$  را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد (Luca, 1972):

$$\frac{Z_{pos}(i; j)}{Z}, \eta_{ij} = \frac{Z_{new}(i; j)}{Z}, \nu_{ij} = \frac{Z_{neg}(i; j)}{Z} \quad (4-1)$$

$$\mu_{ij} =$$

مرحله اول: ساخت ماتریس تصمیم فازی تصویری<sup>۳</sup> (PFDM)

مرحله اولیه رویکرد تاپسیس، مربوط به ساخت ماتریس تصمیم است؛ بنابراین، مسئله تصمیم‌گیری چندمعیاره با استفاده از اعداد فازی تصویری را می‌توان با ماتریس تصمیم فازی تصویری  $[PFM]m \times n$  نشان داد. (Luca, 1972) برای  $C_2, \dots, C_n$

$$C_1 \quad C_n$$

<sup>1</sup> C.T. Chen

<sup>2</sup> Suman & Neeraj Gandotra

<sup>3</sup> Picture Fuzzy Decision Matrix

$$= \begin{bmatrix} (\mu_{11}, \eta_{11}, \nu_{11}) & (\mu_{12}, \eta_{12}, \nu_{12}) & \cdots & (\mu_{1n}, \eta_{1n}, \nu_{1n}) \\ (\mu_{21}, \eta_{21}, \nu_{21}) & (\mu_{22}, \eta_{22}, \nu_{22}) & \cdots & (\mu_{2n}, \eta_{2n}, \nu_{2n}) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ (\mu_{m1}, \eta_{m1}, \nu_{m1}) & (\mu_{m2}, \eta_{m2}, \nu_{m2}) & \cdots & (\mu_{mn}, \eta_{mn}, \nu_{mn}) \end{bmatrix}$$

$[PFM]_{m \times n}$

مرحله دوم: محاسبه وزن برای معیارهای از پیش تعریف شده

محاسبه وزن در این مرحله، با استفاده از اطلاعات ارائه شده در (Gandotra, 2021) انجام شده است.

$$W_j = \frac{1-e_j}{n-\sum_{j=1}^n e_j} \quad (j=1,2,\dots,n)$$

$$= \frac{R \times S}{R-S} \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} [(\mu_{ij}^S + \delta_{ij}^S + \nu_{ij}^S + \pi_{ij}^S)^{\frac{1}{S}} - (\mu_{ij}^R + \delta_{ij}^R + \nu_{ij}^R + \pi_{ij}^R)^{\frac{1}{R}}]$$

به شرطی که  $R, S > 0$  یا  $R > 1$  و  $0 < S < 1$  یا  $S > 1$  و  $0 < R < 1$  باشد.

مرحله سوم: تشکیل ایدئال مثبت و ایدئال منفی

با توجه به PFS ها و روش تاپسیس، گزینه ایدئال مثبت<sup>۱</sup>  $(A^+)$  و گزینه ایدئال منفی<sup>۲</sup>  $(A^-)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم (Luca, 1972):

$$A^+ = (A_1^+, A_2^+, \dots, A_n^+) ; \quad (3-4)$$

$$A^- = (A_1^-, A_2^-, \dots, A_n^-) , \quad (4-4)$$

برای اینکه گزینه ایدئال مثبت و گزینه ایدئال منفی با تعریف مجموعه اعداد فازی تصویری مطابقت داشته باشد، لازم است در صورتی که مجموع درجه عضویت مثبت، خنثی و منفی بیشتر از یک شود، باید هر درجه عضویت، به مجموع درجات عضویت گفته شده، تقسیم شود؛ بنابراین تعریف ۲ تعمیم داده شده و نیاز است تعریف  $A^+$  و  $A^-$  اصلاح شود:

<sup>1</sup> Positive Ideal Selection

<sup>2</sup> Negative Ideal Selection



تعریف ۳:

$$A_j^+ = \begin{cases} \left( \underset{i}{\max}(\dot{\mu}_{ij}), \underset{i}{\min}(\dot{\eta}_{ij}), \underset{i}{\min}(\dot{\nu}_{ij}) \right) ; \text{ اگر } \sum_{j=1}^n (\mu_{ij} + \eta_{ij} + \nu_{ij}) \leq 1 \\ \left( \frac{\underset{i}{\max}(\dot{\mu}_{ij})}{\sum \mu_{ij} + \eta_{ij} + \nu_{ij}}, \frac{\underset{i}{\min}(\dot{\eta}_{ij})}{\sum \mu_{ij} + \eta_{ij} + \nu_{ij}}, \frac{\underset{i}{\min}(\dot{\nu}_{ij})}{\sum \mu_{ij} + \eta_{ij} + \nu_{ij}} \right) ; \text{ اگر } \sum_{j=1}^n (\mu_{ij} + \eta_{ij} + \nu_{ij}) > 1 \end{cases}$$

$$A_j^- = \begin{cases} \left( \underset{i}{\max}(\dot{\mu}_{ij}), \underset{i}{\min}(\dot{\eta}_{ij}), \underset{i}{\min}(\dot{\nu}_{ij}) \right) ; \text{ اگر } \sum_{j=1}^n (\mu_{ij} + \eta_{ij} + \nu_{ij}) \leq 1 \\ \left( \frac{\underset{i}{\max}(\dot{\mu}_{ij})}{\sum \mu_{ij} + \eta_{ij} + \nu_{ij}}, \frac{\underset{i}{\min}(\dot{\eta}_{ij})}{\sum \mu_{ij} + \eta_{ij} + \nu_{ij}}, \frac{\underset{i}{\min}(\dot{\nu}_{ij})}{\sum \mu_{ij} + \eta_{ij} + \nu_{ij}} \right) ; \text{ اگر } \sum_{j=1}^n (\mu_{ij} + \eta_{ij} + \nu_{ij}) > 1 \end{cases}$$

و همچنین تعریف می‌شود:

$$- \eta_{ij}^+ - \nu_{ij}^+ ; \quad \pi_{ij}^- = 1 - \mu_{ij}^- - \eta_{ij}^- - \nu_{ij}^- ; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5-4)$$

$$\pi_{ij}^+ = 1 - \mu_{ij}^+$$

مرحله سوم: محاسبه فاصله از PIS ( $A^+$ ) و NIS ( $A^-$ )

محاسبه فاصله از گزینه ایدئال مثبت و گزینه ایدئال منفی، به شرح زیر انجام می‌شود [۴]:

$$\left( |\mu_{ij} - \mu_{ij}^+| + |\nu_{ij} - \nu_{ij}^+| + |\eta_{ij} - \eta_{ij}^+| + |\pi_{ij} - \pi_{ij}^+| \right) \quad (4-6)$$

$$A_i L(A^+) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n W_j$$

$$\left( |\mu_{ij} - \mu_{ij}^-| + |\nu_{ij} - \nu_{ij}^-| + |\eta_{ij} - \eta_{ij}^-| + |\pi_{ij} - \pi_{ij}^-| \right) \quad (4-7)$$

$$A_i L(A^-) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n W_j$$

مرحله چهارم: محاسبه شاخص نهایی رتبه‌بندی

برای مشخص شدن مقدار شاخص نهایی رتبه‌بندی، نیاز به  $L_i^+$  و  $L_i^-$  داریم تا در رابطه

زیر قرار دهیم:

$$CC_i = \frac{L_i^-}{(L_i^+ + L_i^-)} , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

## مرحله پنجم: رتبه‌بندی

با توجه به شاخص نهایی رتبه‌بندی، ترتیب رتبه‌بندی همه گزینه‌ها، مشخص می‌شود. همان‌طور که خواهیم دید، در بیشتر موارد، تاپسیس فازی، مجموع فواصل PIS و NIS برای همه گزینه‌ها تقریباً یکسان است. از این جهت، تاپسیس فازی فقط فاصله تا NIS را در ترتیب رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده می‌کند و فاصله تا PIS را به طور هم‌زمان در نظر نمی‌گیرد. در ادامه، این اشکال از نظر ریاضی بیان می‌شود. مجموع فواصل از PIS و NIS برای هر جایگزین، تقریباً برابر با تعداد اصلی مجموعه معیارها یعنی  $n$  است. اگرچه شاخص شباهت در مرحله ۴ به خوبی کار می‌کند، اما فاصله تا PIS را در نظر نمی‌گیرد. در ادامه، نشان خواهیم داد که مجموع فواصل PIS و NIS برای هر جایگزین، تقریباً برابر  $\frac{1}{2}$  است.

در ادامه، قضیه مطرح شده در مقاله هادی<sup>۱</sup> و همکاران (Sadabadi, 2022) که به این

صورت است  $L^+ + L^- \leq (\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}) n$  را برای  $n \leq L^+ + L^- \simeq \frac{1}{2}$  اثبات می‌کنیم.

**قضیه:** فرض کنید  $L^+ = \sum_{j=1}^n L(A_j, A^+)$  و  $L^- = \sum_{j=1}^n L(A_j, A^-)$  باشد، در این صورت

$$L^+ + L^- \simeq \frac{1}{2}$$

اثبات:

$$\begin{aligned} L^+ + L^- &= \sum_{j=1}^n L(A_j^+, A_j) + \sum_{j=1}^n L(A_j^-, A_j) = \\ &= \frac{1}{2} \sum W_j (|\mu_{ij}^+ - \mu_{ij}| + |v_{ij}^+ - v_{ij}| + |\eta_{ij}^+ - \eta_{ij}| + |\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}|) + \\ &= \frac{1}{2} \sum W_j (|\mu_{ij}^- - \mu_{ij}| + |v_{ij}^- - v_{ij}| + |\eta_{ij}^- - \eta_{ij}| + |\pi_{ij}^- - \pi_{ij}|) = \\ &= \frac{1}{2} \sum W_j (|\mu_{ij}^+ - \mu_{ij}| + |\mu_{ij}^- - \mu_{ij}| + \dots + |\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}| + |\pi_{ij}^- - \pi_{ij}|) \end{aligned}$$

طبق نامساوی مثلث داریم:

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

بنابراین:

<sup>1</sup> A. Hadi-Vencheh

$$\begin{aligned}
 &\geq \frac{1}{2} \sum W_j (|\mu_{ij}^+ - \mu_{ij}^-| + |\eta_{ij}^+ - \eta_{ij}^-| + |v_{ij}^+ - v_{ij}^-| + |\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}^-|) \\
 &\geq \frac{1}{2} \sum W_j (|\mu_{ij}^+ - \mu_{ij}^- + \eta_{ij}^+ - \eta_{ij}^- + v_{ij}^+ - v_{ij}^- + \pi_{ij}^+ - \pi_{ij}^-|) \\
 &\geq \frac{1}{2} \sum W_j (|\mu_{ij}^+ + \eta_{ij}^+ + v_{ij}^+ + \pi_{ij}^+ - (\mu_{ij}^- + \eta_{ij}^- + v_{ij}^- + \pi_{ij}^-)|) \\
 &\geq \frac{1}{2} \sum W_j |(\mu_{ij}^+ + \eta_{ij}^+ + v_{ij}^+ + \pi_{ij}^+)|
 \end{aligned}$$

و طبق تعریف می‌توان گفت:

$$\mu_{ij} + \eta_{ij} + v_{ij} + \pi_{ij} = 1$$

می‌دانیم:  $\sum W_j = 1$  ؛ پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\geq \frac{1}{2} \sum W_j = \frac{1}{2}$$

در ادامه اثبات برای کران بالا  $L^+ + L^-$  (برای معیار مثبت)

$$\text{Max } |\mu_{ij}^+ - \mu_{ij}^-| + |v_{ij}^+ - v_{ij}^-| + |\eta_{ij}^+ - \eta_{ij}^-| + |\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}^-|$$

$$\text{S.t. } \mu_{ij} + \eta_{ij} + v_{ij} + \pi_{ij} = 1$$

$$\bullet \leq \mu_{ij} \leq 1$$

$$\bullet \leq \eta_{ij} \leq 1$$

$$\bullet \leq v_{ij} \leq 1$$

$$\bullet \leq \pi_{ij} \leq 1$$

$$\text{Max } \{(\mu_{ij}^+ - \mu_{ij}^-) + (\eta_{ij}^+ - \eta_{ij}^-) + (v_{ij}^+ - v_{ij}^-) + |\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}^-|\} =$$

$$\mu_{ij}^+ - \eta_{ij}^+ - v_{ij}^+ + \text{Max } (-\mu_{ij}^- \eta_{ij}^- + v_{ij}^-) + |\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}^-| =$$

$$\mu_{ij}^+ + \mu_{ij}^+ + \pi_{ij}^+ - 1 + \text{Max } (-\mu_{ij}^- - \pi_{ij}^- + 1 - \mu_{ij}^-) + |\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}^-| =$$

$$2 \mu_{ij}^+ + \pi_{ij}^+ - 1 + \text{Max } -\pi_{ij}^- (-2\mu_{ij}^- + 1) + |\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}^-| =$$

$$2 \mu_{ij}^+ + \pi_{ij}^+ - 2 \text{Max } (\mu_{ij}^-) - \text{Max } (\pi_{ij}^-) + \text{Max } |\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}^-| =$$

$$\pi_{ij}^+ + \text{Max } |\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}^-| - \text{Max } (\pi_{ij}^-) =$$

$$\pi_{ij}^+ + \text{Max } |\pi_{ij}^+ - \pi_{ij}^-| \{-\pi_{ij}^-\} =$$

$$\text{S.t: } \bullet \leq \pi_{ij} \leq 1$$

$$\text{If } \pi_{ij}^+ \geq \pi_{ij}^- \Rightarrow 2 \pi_{ij}^+ - 2 \text{Max } (\pi_{ij}^-) = 2(\pi_{ij}^+ - \text{Max } \pi_{ij}^-)$$

$$\text{If } \pi_{ij}^+ \leq \pi_{ij}^- \Rightarrow 2 \pi_{ij}^+$$

از آنجا که  $\pi_{ij}$  اعداد بسیار کوچکی هستند، با توجه به تعریف ۱ می‌توان گفت  $(\pi_{ij}^+ - \text{Max } \pi_{ij}) \leq \frac{1}{4}$  در نهایت خواهد شد. بسیار کوچک خواهد شد. در نهایت  $(\pi_{ij}^+ - \text{Max } \pi_{ij}) \leq \frac{1}{4}$  در نظر می‌گیریم. بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$2(\pi_{ij}^+ - \text{Max } \pi_{ij}) \leq \frac{1}{2}$$

و در ادامه:

$$\text{Max } \{ |\mu_{ij}^- - \mu_{ij}| + |\eta_{ij}^- - \eta_{ij}| + |v_{ij}^- - v_{ij}| + |\pi_{ij}^- - \pi_{ij}| \}$$

$$\text{S.t. } \mu_{ij} + \eta_{ij} + v_{ij} + \pi_{ij} = 1$$

$$0 \leq \mu_{ij} \leq 1$$

$$0 \leq \eta_{ij} \leq 1$$

$$0 \leq v_{ij} \leq 1$$

$$0 \leq \pi_{ij} \leq 1$$

می‌دانیم  $|a - b| = |b - a|$  است. بنابراین:

$$\text{Max } \{ (\mu_{ij} - \mu_{ij}^-) + (\eta_{ij}^- - \eta_{ij}) + (v_{ij}^- - v_{ij}) + |\pi_{ij}^- - \pi_{ij}| \} =$$

$$-\mu_{ij}^- + \eta_{ij}^- + v_{ij}^- + \text{Max } \{ -(\mu_{ij} + \eta_{ij} + v_{ij}) \} + \text{Max } |\pi_{ij}^- - \pi_{ij}| =$$

می‌دانیم  $\max \{-f\} = -\min \{f\}$ ؛ بنابراین:

$$-\mu_{ij}^- + \eta_{ij}^- + v_{ij}^- - \text{Min } \{ -\mu_{ij} + \eta_{ij} + v_{ij} \} + \text{Max } |\pi_{ij}^- - \pi_{ij}| =$$

$$\mu_{ij}^- - \eta_{ij}^- - v_{ij}^- + \text{Max } |\pi_{ij}^- - \pi_{ij}| =$$

$$\text{If } \pi_{ij}^- \geq \pi_{ij} \Rightarrow \pi_{ij}^- - \text{Max } (\pi_{ij}) \leq \pi_{ij}^- \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{If } \pi_{ij}^- \leq \pi_{ij} \Rightarrow -\pi_{ij}^- + \text{Max } (\pi_{ij}) \leq \text{Max } (\pi_{ij}) \leq \frac{1}{2}$$

$$-\text{Min } (\eta_{ij}) = + \text{Max } (-\eta_{ij}) = -\text{Max } \eta_{ij} = -\eta_{ij}^-$$

این روند اثبات، برای معیار منفی نیز قابل اثبات است. در پایان می‌توان نتیجه گرفت:

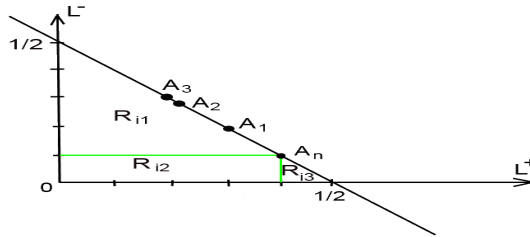
$$L^+ + L^- \simeq \frac{1}{2}$$

از آنجا که در (Sadabadi, 2022) داریم  $L_i^+ \simeq +L_i^-$  و طبق قضیه ارایه شده

در این تحقیق می‌توان به جای  $n$  از  $\frac{1}{2}$  استفاده کرد. بنابراین داریم:

$$+L^- \simeq \frac{1}{2}$$

$L^+$



شکل ۱: نمودار مساحت ناحیه‌ها

پس به طور کلی، برای هر  $A_n$  روی خط  $L_i^+ \simeq +L_i^- \frac{1}{2}$ ؛ سه ناحیه وجود دارد (Sadabadi, 2022) و مساحت ناحیه‌ها به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$S_i^+ = \frac{(\frac{1}{2}-L_i^-)L_i^+}{2} = \frac{1}{2} L_i^{+2} \quad (L_i^+ + L_i^- = \frac{1}{2}) \quad (5-1)$$

$$S_i^- = \frac{(\frac{1}{2}-L_i^+)L_i^-}{2} = \frac{1}{2} L_i^{-2} \quad (L_i^+ + L_i^- = \frac{1}{2}) \quad (5-2)$$

و به این صورت ارزش‌گذاری می‌شود.

$$SI_i = \frac{1}{2} \left( \frac{S_i^-}{S_{max}^-} + \frac{S_{min}^+}{S_i^+} \right) \quad (5-3)$$

که  $S_{min}^+$  معرف کمترین مقدار از بین  $S_i^+$  ها است و  $S_{max}^-$  معرف بیشترین مقدار از بین  $S_i^-$  ها است.

برای درک بهتر و تحلیل مراحل روش‌شناسی، در ادامه، مثال مقاله (Gandotra,

2021)

مجدد با تعریف ۳ به کمک نرم‌افزار اکسل حل می‌شود.

**مثال ۲.** فرض کنید نمونه‌ای از انتخابات ایالتی در هند که می‌خواهند وزیر ارشد خود را انتخاب کنند که مشکلات آنها را درک کرده و آنها را به روش بهتری حل کند. اجازه دهید از چهار حزب مختلف:

(۱) حزب بهارتیا جاناتا (BJP) (۲) حزب کنگره (۳) حزب (AAP) Aam Aadmi

۴) حزب کمونیست هند ۴ نامزد به عنوان چهار گزینه جایگزین در نظر بگیریم ( $A_4$ )،  $A_1, A_2, A_3$  که در آن شهروندان این ایالت، می‌خواهند وزیر ارشد خود را انتخاب کنند. یک نظرسنجی، توسط کانالی رسانه‌ای از ۱۰۰۰ نفر از ساکنان، انجام شد. ۴ ویژگی به عنوان معیار در نظر می‌گیریم: ۱- توانایی برقراری ارتباط با تشکیلات ۲- توانایی در برابر فساد ۳- اعتبار خوب ۴- درک صحیح از مسایل داخلی ( $C_1, C_2, C_3, C_4$ )  
روش تعیین  $\mu_{ij}$ ،  $\eta_{ij}$  و  $\nu_{ij}$  به شرح زیر است:

اگر انتخاب تصادفی، به عنوان حجم نمونه از بین ۱۰۰۰ نفر در نظر گرفته شود که در آن ۶۹۰ نفر بر اساس معیار  $C_1$  به نفع کامل حزب  $A_1$  هستند؛ ۹۰ نفر دچار سردرگمی هستند و ۲۰ نفر مخالف با حزب  $A_1$  هستند.

$$\eta_{ij} = \frac{Z_{new}(i,j)}{Z} \quad \text{و} \quad \nu_{ij} = \frac{Z_{neg}(i,j)}{Z} \quad \text{و} \quad Z = 1000 \quad \text{و} \quad C_1 \text{ بر اساس معیار } A_1$$

$$\text{پس } \mu_{ij} = \frac{Z_{pos}(i,j)}{Z} \quad \text{و} \quad \text{برابر است با:}$$

$$\mu_{ij} = \frac{690}{1000} = 0/69 \quad \text{و} \quad \eta_{ij} = \frac{90}{1000} = 0/09 \quad \text{و} \quad \nu_{ij} = \frac{20}{1000} = 0/02$$

بنابراین، می‌توان سایر ورودی‌های ماتریس را نیز پیدا کرد (Gandotra, 2021).

جدول ۱: ماتریس تصمیم

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$A_1$	0.69,0.09,0.02	0.52,0.24,0.16	0.07,0.79,0.03	0.70,0.12,0.04
$A_2$	0.34,0.54,0.11	0.04,0.72,0.13	0.63,0.14,0.08	0.73,0.10,0.14
$A_3$	0.62,0.16,0.04	0.03,0.75,0.10	0.58,0.26,0.05	0.53,0.11,0.23
$A_4$	0.55,0.08,0.21	0.05,0.77,0.06	0.13,0.74,0.07	0.65,0.06,0.08

از آنجاکه داده‌های جدول ۲ با توجه به مثالی که در منبع (Gandotra, 2021) حل شده است، با تعریف یک مجموعه فازی تصویری منطبق نیست، لازم است که از تعریف ۳ استفاده کرده و نتیجه در جدول زیر ارائه شده است.

جدول ۲: اندازه هر ایدئال مثبت و منفی

$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
-------	-------	-------	-------

$A^+$	0.69,0.08,0.02	0.52,0.24,0.26	0.63,0.14,0.03	0.73,0.06,0.04
$A^-$	0.34,0.54,0.21	0.03,0.77,0.16	0.07,0.79,0.08	0.53,0.12,0.23

اندازه‌گیری فاصله هر جایگزین از  $PIS(A^+)$  (گزینه ایدئال مثبت) و  $NIS(A^-)$  (گزینه ایدئال منفی) به شرح زیر است.

جدول ۳: اندازه هر گزینه از ایدئال مثبت و منفی

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$A_iL(A^+)$	0.233375	0.317790	0.268269	0.411274
$A_iL(A^-)$	0.332262	0.237754	0.252630	0.203034

برای محاسبه رتبه‌بندی در جدول ۴، از رابطه (۳-۵) استفاده شده است:

جدول ۴: رتبه‌بندی

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$SI_i$	4.397	2.372	3.375	1.416
Ranking	1	3	2	4

### مطالعه مقایسه‌ای با روش‌های موجود تحت PFS

با مطالعه‌ای که بر روی چند مقاله انجام شد، نتایج زیر برای مثال ۲ بدست آمده است:

جدول ۵: مقایسه

روش‌های موجود	نتایج موجود	رتبه‌بندی	بهترین گزینه	نتایج روش پیشنهادی	رتبه‌بندی	بهترین گزینه
(Son, 2016)	$L_1 = 0.4872$	1	$A_1$	$L_1 = 0.5989$	1	$A_1$
	$L_2 = 0.4611$	2		$L_2 = 0.4821$	3	
	$L_3 = 0.3011$	4		$L_3 = 0.4959$	2	
	$L_4 = 0.3128$	3		$L_4 = 0.3239$	4	
(Wei, 2016)	$L_1 = 0.5041$	1	$A_1$	$L_1 = 0.5989$	1	$A_1$
	$L_2 = 0.3492$	3		$L_2 = 0.4821$	3	
	$L_3 = 0.3941$	2		$L_3 = 0.4959$	2	
	$L_4 = 0.3291$	4		$L_4 = 0.3239$	4	
(Joshi,2020)	$L_1 = 0.4532$	1	$A_1$	$L_1 = 0.5989$	1	$A_1$

	$L_2 = 0.3814$	3		$L_2 = 0.4821$	3
	$L_3 = 0.2621$	4		$L_3 = 0.4959$	2
	$L_4 = 0.4121$	2		$L_4 = 0.3239$	4
Suman	$L_1 = 0.3321$	1	$A_1$	$L_1 = 0.5989$	1 $A_1$
	$L_2 = 0.2593$	3		$L_2 = 0.4821$	3
	$L_3 = 0.2667$	2		$L_3 = 0.4959$	2
	$L_4 = 0.1759$	4		$L_4 = 0.3239$	4

با مطالعه مقایسه‌ای که با روش‌های موجود مربوط به هر مقاله، انجام شده است، درجه نزدیکی نسبی متفاوتی به دست می‌آید که با جایگزین کردن روش پیشنهادی، همه نتایج، به صورت یکسانی در می‌آید.

### ۶- نتیجه‌گیری

مجموعه‌های فازی تصویری به حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره (MCDM) می‌پردازد؛ بنابراین؛ در تحقیق حاضر، تصویر جدید R-S محاسبه جزئیات و اندازه‌گیری تعمیم R-S مطالعه شده توسط جوشی و کومار ([Joshi & Kumar, 2016](#)) با استفاده از معیارهای پذیرفته شده برای آنتروپی فازی تحت PFSs بوده است.

علاوه بر این، مجموع فواصل PIS و NIS در رابطه  $L_i^+ + L_i^- \leq n(\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}})$   $n \leq$  توسط هادی و سعدآبادی ([Sadabadi, 2022](#)) از یک فضای  $n$  بعدی به یک فضای دوبعدی تبدیل شد و در این تحقیق، این مقدار ثابت برای  $\frac{1}{2}$   $L_i^+ + L_i^- \simeq \frac{1}{2}$  اثبات شد. مزیت روش پیشنهادی در این است که کاهش ابعاد مساله MCDM از  $n$  بعد به دو بعد، رتبه‌بندی را آسان می‌کند. در واقع، یک شاخص مشابهت جدید در محدوده فاصله  $(L_i^+, L_i^-)$  از فازی‌سازی استفاده می‌کند.

علاوه بر این، با حل یک مثال با اعداد فازی که در تعریف اعداد فازی تصویری در این تحقیق ارائه شد، تغییرات لازم به کمک نرم‌افزار اکسل انجام شد و فاصله تا ایدئال و ضد ایدئال محاسبه گردید. در نهایت، رتبه‌بندی جدید مشخص شد.

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.»



## References:

- Atanasoff, K.T. (1986). Intuitive Fuzzy Sets Fuzzy Sets and Systems, 20, 87-96.
- Boran, S. G. (2009). A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with TOPSIS method. Expert Systems with Applications, 36(8), 11363-11368, <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2009.03.039>.
- Gandotra, S. N. (2021). Use of (R,S)-Norm concept and TOPSIS approach under picture fuzzy environment for application in multi criteria decision making issues. Materials Today: Proceedings, 307, <https://doi.org/10.10.16/j.matpr.2021.03.307>.
- Hwang, K. Y. (1981). Methods for multiple attribute decision making. Mult. attrib. Decis. Mak., 58-191, [https://doi.org/10.1007/978-3-642-48318-9\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-48318-9_3).
- Jahanshahloo, F. H. (2006). Extension of the TOPSIS method for decision-making problems with fuzzy data. Applied Mathematics and Computation, 181(2), 1544-1551, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.02.057>.
- Joshi, R. (2020). A new decision making method using R-soft concept and VIKOR approach in fuzzy image environment. Expert System Appl., 147, <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.113228>.
- Joshi, R., Kumar, S. (2016). (R-S)- norm information measure and a relation between coding and questionnaire theory, open Syst. Inf. Dyn., 23, <https://doi.org/10.1142/S1230161216500153>.
- Krinovich, B. C. (2014) Visualize fuzzy sets. J. Comput Science and Cybernetics, 409-416, <https://doi.org/10.15625/1813-9663/30/4/5032>.
- Krinovich, B.C. (2013). New image-concept fuzzy sets for computational intelligence problems. Departmental Technical Reports, 809, 1-6, [https://scholarworks.utep.edu/cs\\_techrep/809](https://scholarworks.utep.edu/cs_techrep/809).
- Luca, S. T. (1972). A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. Inf. Control, 301-312.
- Sadabadi, A. H.-V. (2022). An Improved Fuzzy TOPSIS Method With a New Ranking Index. World Scientific, 615-641, <https://doi.org/10.1142/S0219622021500620>.
- Son, (2016) Generalized Image Distance Measurement and Applications to Fuzzy Image Clustering ELSEVIER, 284-295, <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2016.05.009>.

- 
- Tzou, G. H. (1983). Fuzzy Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications. Fuzzy Sets and Systems, 11.
  - Wei, G. (2016). Peacture fuzzy cross-entropy for multiple attribute decision making problems. J. Bus. Econ. Manag, 15, 491-502, <https://doi.org/10.3846/16111699.2016.1197147>.
  - Zadeh. (1965). Fuzzy sets. inf. control, 338-353, [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X).

---

#### COPYRIGHTS

© 2023 by the authors. Licensee Advances in Modern Management Engineering Journal. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

