

## بررسی پایداری بار غیرخطی کوره قوس الکتریکی در حضور منابع توان راکتیو

پگاه سقا<sup>(۱)</sup> - بهادر فانی<sup>(۲)</sup>

(۱) کارشناس ارشد - دانشکده مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات اصفهان

(۲) استادیار - دانشکده مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد نجف آباد

تاریخ پذیرش: زمستان ۱۳۹۳

تاریخ دریافت: تابستان ۱۳۹۲

**چکیده:** در این مقاله ابتدا به مدل کوره قوس الکتریکی پرداخته می‌شود. مدل به کار رفته در این مقاله یک مدل دینامیکی نمایش داده شده با یک معادله دیفرانسیل است. سپس، این مدل در کنار مدل سیستم قدرت که به صورت مدار معادل تونن در نظر گرفته شده قرار داده می‌شود و نقاط کار سیستم دینامیکی کل استخراج می‌گردد. با خطی‌سازی سیستم حول نقاط کار، ماتریس ژاکوبین سیستم استخراج گردیده و نوع پایداری نقاط تعادل مشخص می‌گردد. در ادامه معادله محدود شده به منیفولد مرکزی برای سیستم مورد نظر به دست خواهد آمد و از روی آن به بررسی اتفاقات ممکن در سیستم فوق در مقدار بحرانی پارامتر انشعاب پرداخته می‌گردد. در پایان نتایج تحلیلی را با نتایج شبیه‌سازی که به کمک نرم‌افزار Auto به دست آمده، مقایسه می‌گردد و در انتها به این نتیجه خواهیم رسید که با استفاده از روش تحلیلی تنها یک نوع از انشعابات این سیستم قدرت مشخص می‌گردد ولی با استفاده از نرم‌افزار Auto همه انشعابات موجود در سیستم قدرت فوق مشخص می‌شود.

**کلمات کلیدی:** کوره قوس الکتریکی، انشعاب، نرم‌افزار Auto.

### ۱- مقدمه

وقوع اختلالات بزرگی مثل خارج شدن یک خط انتقال مهم در شرایط بارگذاری زیاد، می‌تواند منجر به ناپایداری ولتاژ شود و به دنبال آن فروپاشی ولتاژ رخ دهد. همچنین، تغییر آهسته و مداوم نقطه کار سیستم، به واسطه افزایش بار می‌تواند باعث ناپایداری ولتاژ شود [۱ و ۲]. هنگامی که عامل ناپایداری ولتاژ، افزایش تدریجی بار باشد، تئوری انشعاب، نحوه فروپاشی ولتاژ را نشان می‌دهد.

هنگامی که بار سیستم به تدریج افزایش می‌یابد، نقطه تعادل سیستم و در پی آن مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین سیستم تغییر می‌کنند. گذر پارامتر انشعاب از مقدار انشعاب، باعث ناپایداری ولتاژ می‌گردد که در برخی حالت‌ها، این ناپایداری به صورت کاهش سریع و بدون نوسان اندازه ولتاژهاست. یکی از مهمترین نتایج به دست آمده از مطالعات انجام گرفته روی پدیده ناپایداری ولتاژ این است که این پدیده ارتباط نزدیکی با انشعاب در مدل‌های ریاضی توصیف‌کننده سیستم قدرت دارد. انشعاب عبارت است از تغییر کیفی در تصویر فاز یک سیستم دینامیکی و هنگامی رخ می‌دهد که یک پارامتر انشعاب به طور شبه

استاتیک تغییر کند [۳ و ۴]. انشعاب گره-زینی به عنوان عامل فروپاشی ولتاژ معرفی شده است. جنبه مهم این انشعاب، یکی شدن دو نقطه تعادل و سپس ناپدید شدن آن بر اثر تغییر پارامتر انشعاب است. در [۲] نقش وقوع انشعاب هاپف با اضافه شدن یکی از ادوات Facts و به طور خاص SVC و رخداد آن قبل از انشعاب گره-زینی بررسی شده است. نکته قابل توجه تأثیر SVC در اضافه شدن یک دینامیک جدید در سیستم قدرت است که در عین حال که باعث افزایش میزان توان انتقالی بر روی خطوط انتقال انرژی می‌گردد باعث پدیدار شدن انشعاب هاپف قبل از رخداد انشعاب گره-زینی نیز می‌گردد. در ضمن، در این حالت به دلیل کنترل ولتاژ توسط SVC ناپایداری زاویه‌ای روتور در نقطه انشعاب رخ می‌دهد. در دو دهه اخیر با پیشرفت سریع نیمه هادی‌ها در سطح ولتاژ و توان و نیز پیشرفت سیستم‌های کنترلی، جبران‌سازهای توان راکتیو مانند SVC, PASSIVE FILTER, STATCOM و UPFC با انعطاف‌پذیری و دامنه عملکرد بالا طراحی و ساخته شده‌اند و در شبکه‌های قدرت نصب گردیده‌اند.

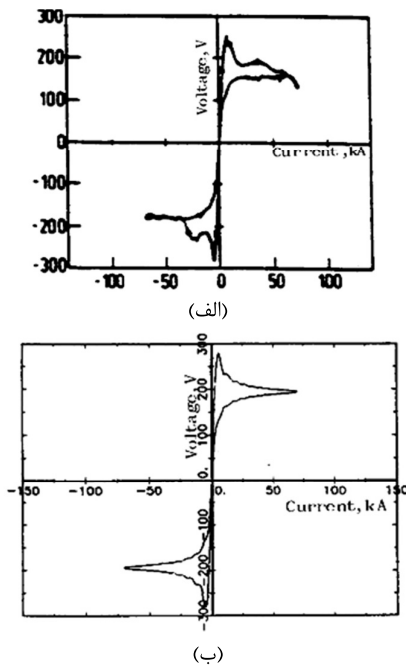
در ادامه این مقاله معادله محدود شده به منیفلد مرکزی برای سیستم فوق به دست آمده و از روی آن به بررسی سیستم در مقدار بحرانی پارامتر انشعاب پرداخته شده است و در انتها نتایج تحلیلی با نتایج حاصل از شبیه سازی که به کمک نرم افزار Auto به دست آمده است، مقایسه می شود.

## ۲- مدل کوره قوس الکتریکی

یکی از مدل های دینامیکی معتبر برای کوره های قوس الکتریکی بر اساس مراجع موجود از جمله مرجع [۱] به صورت زیر است:

$$k_1 r^n + k_2 r \frac{dr}{dt} = \frac{k_3}{r^{m+2}} i^2 \quad (1)$$

که در آن  $i$  جریان کوره،  $r$  شعاع قوس بر حسب سانتیمتر  $k_1$ ،  $k_2$  و  $k_3$  پارامترهایی است که به کوره مورد نظر و اینکه در کدام یک از مراحل ذوب هستیم بستگی دارد و باید شناسایی شود. ثوابت  $m$  و  $n$  اعداد صحیحی هستند که بین صفر تا دو می توانند تغییر کنند و بستگی به شرایط محیطی کوره مانند دمای کوره و دمای قوس دارند. این رابطه در مرجع [۱] بر اساس توازن توان الکتریکی داده شده به کوره قوس الکتریکی توسط شبکه قدرت و توان ذخیره شده در قوس و تلف شده به صورت حرارت به دست آمده است. در این مرجع مشخصه ولتاژ-جریان یک کوره قوس الکتریکی با ولتاژ حداکثر ۲۵۰ ولت و جریان حداکثر ۷۰ کیلو آمپر هم بر اساس نتایج اندازه گیری شده و هم با شبیه سازی کامپیوتری در شکل (۱) آورده شده است.



شکل (۱): مشخصه کوره قوس الکتریکی الف) اندازه گیری شده از یک کوره واقعی ب) شبیه سازی شده

Fig. (1): Characteristic of the electric arc furnace. (a). The real measure of a furnace, (b). Simulated

تأثیر این جبران کننده ها در بهبود پایداری و میرا کردن نوسانات سیستم های قدرت در مراجع متعددی نشان داده شده است. از طرف دیگر اضافه شدن اینگونه عناصر به سیستم قدرت باعث به وجود آمدن دینامیک های جدیدی در آن می گردد که به نوبه خود در بررسی های پایداری شبکه قدرت تأثیر می گذارد. یک نمونه آن تبدیل انشعاب گره-زینی به انشعاب هایف در محدوده کار پایدار سیستم است [۲۰]. بنابراین توجه به مدل دینامیکی آنها در روند تحلیل پایداری سیستم مورد نظر لازم است.

درجه پیچیدگی تحلیل پایداری سیستم های دینامیکی از جمله سیستم قدرت به سرعت با تغییر مدل های ریاضی سیستم از خطی تغییرناپذیر با زمان به خطی تغییرپذیر با زمان و غیرخطی افزایش می یابد. یکی از این عناصر، سیستم های کوره قوس الکتریکی به عنوان یکی از بزرگترین مصرف کننده های انرژی در شبکه قدرت می باشند. طبیعت این بارها غیرخطی و متغیر با زمان است [۶و۵]. به علت خاصیت غیرخطی، آنها منابع بزرگ تزریق هارمونیک ها به شبکه قدرت به شمار می آیند و از طرف دیگر طبیعت متغیر با زمان کوره ها که ناشی از تغییرات قوس در طول فرآیند ذوب است باعث نوسانات ولتاژ روی مصرف کننده های مجاور و همچنین روی عملکرد کوره قوس تأثیر نامطلوب می گذارد. همچنین تغییرات ولتاژ باعث می شود که کوره های قوس الکتریکی از کارکرد بهینه خود دور شوند [۷]. مدل سازی و بررسی عملکرد کوره های قوس با توجه به دو ویژگی غیرخطی مشخصه ولتاژ-جریان و متغیر با زمان بودن آنها، از دو منظر می تواند انجام گیرد. مراجع از این نقطه نظر به دو دسته تقسیم می شوند.

(۱) مراجعی که روی خواص غیرخطی کوره قوس الکتریکی متمرکز شده اند.

(۲) مراجعی که خواص متغیر با زمان بودن کوره های قوس را در نظر گرفته اند.

در [۸] در سال ۲۰۰۰، کوره قوس به صورت مقاومت غیرخطی کنترل شده با جریان مدل شده است. ویژگی کار انجام شده در این مقاله، وارد کردن سیستم کنترل کوره به مدل کوره است. در اینجا با توجه به حالت های کاری مختلف کوره قوس، مدل کوره یک مدل تطبیقی خواهد بود که در آن، نقاط کار مختلف کوره دخالت دارند. در [۹] در سال ۲۰۱۰ بر اساس مدل استاتیکی ارائه شده در مرجع ۷ و با در نظر گرفتن خاصیت تصادفی بودن طول قوس، روشی برای شناسایی پارامترهای مدل بر اساس الگوریتم ژنتیک ارائه شده است. کارایی روش پیشنهادی با استفاده از مقادیر واقعی ولتاژ و جریان اندازه گیری شده از دو کوره قوس مختلف نشان داده شده است.

در این مقاله در ابتدا به مدلسازی دینامیکی کوره قوس الکتریکی پرداخته شده است و مدل این کوره در کنار مدل سیستم قدرت در نظر گرفته میشود. نقاط کار سیستم شامل کوره با خطی سازی حول نقاط کار استخراج شده و نوع پایداری نقاط تعادل مشخص می شود.

### ۳- نقاط تعادل هذلولوی در سیستم‌های زمان-پیوسته

سیستم دینامیکی زمان-پیوسته زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n \quad (2)$$

که در آن  $f$  یکنواخت است. فرض کنید  $x_0 = 0$  یک نقطه تعادل سیستم (یعنی:  $f(x_0) = 0$ ) و  $A$  ماتریس ژاکوبین  $df/dx$  محاسبه شده در  $x_0$  باشد. همچنین فرض کنید  $n_+$  و  $n_-$  تعداد مقادیر ویژه  $A$  (تعداد قابل شمارش) به ترتیب با قسمت حقیقی منفی، صفر و مثبت باشد. اگر  $n_0 = 0$ ، نقطه تعادل هذلولوی نامیده می‌شود. به عبارت دیگر هیچ مقدار ویژه‌ای روی محور موهومی نباشد و اگر  $n_+ n_- \neq 0$ ، نقطه تعادل هذلولوی زینی نامیده می‌شود.

در ادامه نقاط تعادل عمومی یک سیستم دینامیکی دو بعدی (سطح)  $\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2)^T \in R^2$  (3)

را بررسی خواهیم کرد که در آن  $f$  یکنواخت بوده و  $x = 0$  یک نقطه تعادل است:  $f(0) = 0$ . همچنین فرض کنید  $A = df(x)/dx|_{x=0}$  ماتریس ژاکوبین سیستم باشد. ماتریس  $A$  دارای دو مقدار ویژه  $\lambda_1, \lambda_2$  است که ریشه‌های معادله مشخصه  $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$  هستند. در این رابطه داریم:  $\sigma = tr A$  و  $\Delta = \det A$ .

$(n_+, n_-)$	Eigenvalues	Phase portrait	Stability
(0, 2)			stable
(1, 1)			unstable
(2, 0)			unstable

شکل (۲): طبقه‌بندی توپولوژیکی نقاط تعادل هذلولوی در سیستم‌های سطح  
Fig. (2): Topological classification of hyperbolic equilibria on the plane

در حقیقت سه دسته طبقه‌بندی توپولوژیکی برای نقاط تعادل هذلولوی در سیستم‌های سطح وجود دارند: گره‌ها یا کانون‌های پایدار، زینی و گره‌ها یا کانون‌های ناپایدار. همان طور که دیده شد گره‌ها و کانون‌ها (با پایداری‌های متناظر) هم‌ارز توپولوژیکی هستند و به راحتی با نگاه کردن به مقادیر ویژه قابل تشخیص هستند. نقاط تعادل پایدار دارای منیفلدهای پایدار دو بعدی و فاقد منیفلدهای ناپایدار هستند و عکس آن در مورد نقاط تعادل ناپایدار برقرار است. نقاط تعادل زینی دارای منیفلدهای پایدار و ناپایدار یک بعدی می‌باشند. مشخص است که به طور عمومی تنها در دو صورت شرط هذلولوی بودن نقطه تعادل می‌تواند نقض شود. اول اینکه برای بعضی از مقادیر پارامتر  $\alpha$  یک

مقدار ویژه حقیقی ساده به صفر نزدیک شود و داشته باشیم  $\lambda_1 = 0$  و دوم اینکه یک جفت مقدار ویژه مختلط ساده به محور موهومی نزدیک شود و داشته باشیم  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$  که در این صورت گفته می‌شود انشعاب رخ داده است.

### ۴- انشعابات و دیاگرام انشعاب

نظریه انشعاب یک ابزار بسیار مهم برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های غیر خطی است که از نظر کیفی می‌تواند رفتار دینامیکی سیستم را با تغییر پارامترها پیش‌بینی کند تغییر پارامترها باعث تغییر پایداری سیستم می‌شوند نقطه انشعاب نشان دهنده یک تغییر کیفی سیستم دینامیکی است. یک سیستم دینامیکی زمان-پیوسته که وابسته به پارامتر است را به ترتیب به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad (4)$$

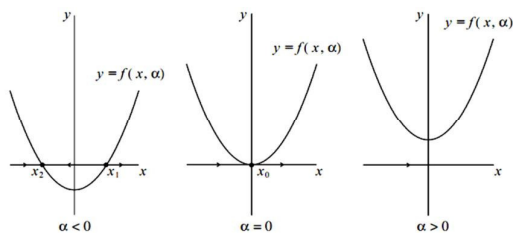
که در آن  $x \in R^n$  و  $\alpha \in R^m$  به ترتیب متغیرهای فاز و پارامترها هستند. نمای فاز سیستم را در نظر بگیرید. همین که پارامترهای سیستم تغییر بکنند، نمای فاز نیز تغییر می‌کند. انشعاب عبارت است از تغییر کیفی در نمای فاز یک سیستم دینامیکی و هنگامی رخ می‌دهد که یک پارامتر انشعاب به طور شبه استاتیک تغییر کند [۴].

### ۴-۱- انشعاب فولد یا گره زینی

سیستم زمان-پیوسته یک بعدی وابسته به پارامتر زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \alpha + x = f(x, \alpha) \quad (5)$$

این سیستم در  $\alpha = 0$  یک نقطه تعادل غیرهذلولوی  $x_0 = 0$  با مقدار ویژه  $\lambda_1 = 0$  دارد. رفتار سیستم برای تمامی مقادیر دیگر  $\alpha$  نیز مشخص است که در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل (۳): انشعاب فولد  
Fig. (3): Fold bifurcation

برای  $\alpha < 0$  در سیستم دو نقطه تعادل وجود دارد: سمت راست ناپایدار است. برای  $\alpha > 0$  در سیستم نقطه تعادلی وجود ندارد. زمانی که  $\alpha$  با شروع از مقدار منفی، صفر و سپس مثبت می‌شود، دو نقطه تعادل (پایدار و ناپایدار) با یکدیگر برخورد کرده، در  $\alpha = 0$  یک نقطه تعادل با  $\lambda = 0$  تشکیل داده و سپس ناپدید می‌شود. این انشعاب، انشعاب فولد نامیده می‌شود.

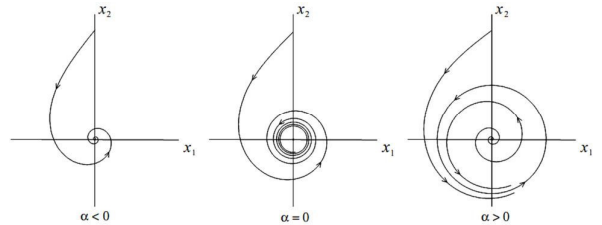
۲-۴- انشعاب هاپف

سیستم زمان-پیوسته دو بعدی وابسته به پارامتر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (6)$$

این سیستم برای تمام  $\alpha$  ها دارای نقطه تعادل  $x_1 = x_2 = 0$  با

ماتریس ژاکوبین  $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$  دارای مقادیر ویژه  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$  است.

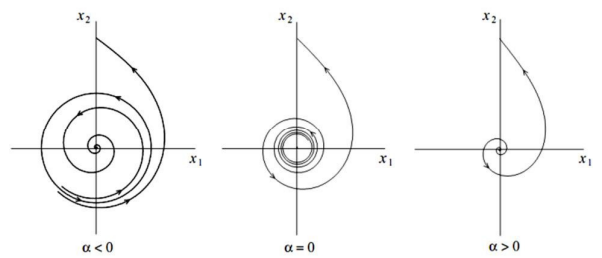


شکل (۴): انشعاب هاپف فوق بحرانی  
Fig. (4): Supercritical Hopf bifurcation

سیستم همیشه در مبدأ دارای نقطه تعادل است. برای  $\alpha < 0$  این نقطه تعادل یک کانون پایدار و برای  $\alpha > 0$  کانون ناپایدار است. در مقدار بحرانی پارامتر یعنی  $\alpha = 0$ ، نقطه تعادل به طور غیرخطی پایدار است.

سیستم با علامت مخالف برای عبارات غیرخطی زیر را نیز می توان به طور مشابه تحلیل کرد:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (7)$$



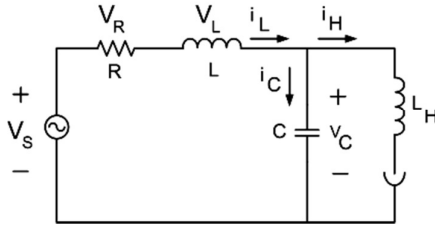
شکل (۵): انشعاب هاپف زیر بحرانی  
Fig. (5): Subcritical Hopf bifurcation

نقطه تعادل در مبدأ برای  $\alpha \neq 0$  پایداری یکسانی مانند سیستم (۴) دارد یعنی برای  $\alpha < 0$  پایدار و برای  $\alpha > 0$  ناپایدار است. در نقطه بحرانی  $\alpha = 0$ ، پایداری سیستم برخلاف پایداری سیستم (۴) می باشد و به صورت غیرخطی ناپایدار است. قابل توجه است که تشخیص نوع انشعاب هاپف از روی پایداری نقطه تعادل در مقدار بحرانی پارامتر انشعاب امکان پذیر است.

۴- تحلیل پایداری کوره قوس الکتریکی متصل به سیستم

قدرت

مدار معادل تکفاز شبکه قدرت سه فازی که برای تحلیل پایداری کوره قوس الکتریکی در نظر گرفته شده در شکل (۶) آمده است:



شکل (۶): کوره قوس الکتریکی به همراه مدار معادل تونن شبکه

Fig. (6): Electric arc furnaces by a Thevenin equivalent circuit network

که در آن  $V_s$  ولتاژ منبع معادل تونن شبکه،  $R$  و  $L$  به ترتیب مقاومت اهمی و اندوکتانس معادل تونن شبکه،  $C$  بانک خازنی،  $L_H$  اندوکتانس معادل کابل های اتصال قابل انعطاف، ترانسفورماتور کوره قوس الکتریکی و الکترودها می باشد. مقادیر پارامترها در جدول (۱) آورده شده است [۱۰].

Table (1): Electrical circuit parameters fig(6)

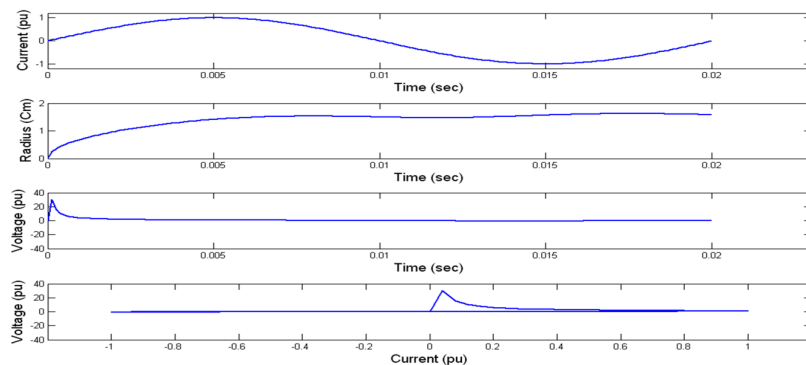
جدول (۱): پارامترهای مدار الکتریکی شکل (۶)

C	L	R	L <sub>H</sub>	V <sub>s</sub>	m	n	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>
0.1	0.1	0.1	0.1	1	2	2	0.08	0.005	3

اگر مدل کوره قوس الکتریکی را به تنهایی و با پارامترهای  $k_1$ ،  $k_2$  و  $k_3$  داده شده در جدول (۱) شبیه سازی کنیم، نتایج شکل (۷) حاصل می شود.

در ادامه به تحلیل پایداری این سیستم قدرت می پردازیم. با نوشتن معادلات KVL و KCL معادلات حالت این مدار الکتریکی به دست می آید:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \\ \dot{i}_H \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_H} & -\frac{k_3 r^{-(m+2)}}{L_H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_3 r^{-(m+3)} i_H}{k_2} & -\frac{k_1 r^{(n-2)}}{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \\ i_H \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_s \quad (8)$$



شکل (۷): شکل موج‌های جریان- شعاع قوس- ولتاژ و مشخصه ولتاژ-جریان کوره قوس الکتریکی

Fig.(7) : Current waveforms\_ arc Radius\_ Voltage and voltage characteristics\_ The current arc furnace

$$L(L) = \frac{1}{2\omega} \text{Re}(\langle p, C(q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B(q, E) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, G) \rangle) \quad (11)$$

اگر ضریب اول لیاپانف مثبت باشد انشعاب هاپف زیر بحرانی و اگر منفی باشد انشعاب هاپف فوق بحرانی می‌باشد. با استفاده از روش تصویر ضریب اول لیاپانف را به دست می‌آوریم (تصویر یک روش مفید برای محاسبه منیفلد مرکزی که ما را از تبدیل سیستم به پایه ویژه‌اش بی‌نیاز می‌کند در عوض، تنها بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه بحرانی ماتریس ژاکوبین  $A$  و ترانهاده آن یعنی  $A^T$  به کار می‌رود تا سیستم را بر روی فضای ویژه بحرانی و مؤلفه‌هایش تصویر کنیم). برای این کار ابتدا نقطه تعادل اول را که نقطه‌ای پایدار است به مبدأ منتقل می‌کنیم؛ معادلات حالت را در دستگاه جدید بازنویسی می‌کنیم.

$$i_L = I_L + i_{L0} \quad (12)$$

$$i_H = I_H + i_{H0} \quad (13)$$

$$v_C = V_C + v_{C0} \quad (14)$$

$$r = \mathfrak{R} + r_0 \quad (15)$$

$$i_L = \left(\frac{-R}{L}\right)(I_L + i_{L0}) + \left(\frac{-1}{L}\right)(V_C + v_{C0}) + \left(\frac{1}{L}\right)V_S \quad (16)$$

$$v_C = \left(\frac{1}{C}\right)(I_L + i_{L0}) + \left(\frac{-1}{C}\right)(I_H + i_{H0}) \quad (17)$$

$$i_H = \left(\frac{1}{L_H}\right)(V_C + v_{C0}) + \left(\frac{-k_3(\mathfrak{R} + r_0)^{-(m+2)}}{L_H}\right)(I_H + i_{H0}) \quad (18)$$

$$\mathfrak{R} = \left(\frac{k_3(\mathfrak{R} + r_0)^{-(m+3)}}{k_2}\right)(I_H + i_{H0})^2 + \left(\frac{-k_1}{k_2}\right)(\mathfrak{R} + r_0)^{(n-1)} \quad (19)$$

قدم بعدی پیدا کردن نقاط کار سیستم یا نقاط تعادل می‌باشد با جایگذاری پارامترهای مدار دو نقطه تعادل که مربوط به دو ریشه حقیقی و مثبت معادله فوق است، به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\text{Number1: } r_0 = 3.7625, i_{L0} = i_{H0} = 8.6979, v_{C0} = 0.1302 \quad (9)$$

$$\text{Number2: } r_0' = 0.4908, i_{L0}' = i_{H0}' = 0.0193, v_{C0}' = 0.9981 \quad (10)$$

با قرار دادن دو نقطه تعادل در معادله مشخصه  $|AI - A| = 0$  و حل این معادله مقادیر ویژه سیستم به دست می‌آید. در نقطه تعادل اول داریم:  $\lambda_4 = -96.1974$  و  $\lambda_{1,2} = -0.2386 \pm j14.1232$  و  $\lambda_3 = -0.4752$  با توجه به منفی بودن قسمت حقیقی تمامی مقادیر ویژه، این نقطه تعادل پایدار می‌باشد. در نقطه تعادل دوم داریم:

$$\lambda_4 = 25.264 \text{ و } \lambda_3 = -638.587 \text{ و } \lambda_{1,2} = -0.249 \pm j10.09$$

توجه به مثبت بودن قسمت حقیقی مقدار ویژه چهارم، این نقطه تعادل ناپایدار می‌باشد. حال اگر یکی از پارامترهای سیستم مثلاً  $L$  به عنوان پارامتر انشعاب در نظر گرفته شود، (البته سایر المانهای دیگر را نیز می‌توان به عنوان پارامتر انشعاب انتخاب نمود) با تغییر این پارامتر ملاحظه می‌شود که در  $L = L_0 = 0.46 \text{ pu}$ ، سیستم مورد نظر دارای یک جفت مقدار ویژه مزدوج مختلط روی محور موهومی با مقادیر  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0$  و  $\omega_0 = 11.02248 > 0$  است. دو مقدار ویژه دیگر به صورت ساده و با علامت منفی هستند:

$$\lambda_3 = -0.1694, \lambda_4 = -96.1974$$

ازای  $L = L_0$  انشعاب هاپف رخ می‌دهد. در ادامه معادله محدود شده به منیفلد مرکزی سیستم استخراج می‌گردد و نوع انشعاب هاپف (زیر بحرانی یا فوق بحرانی) رخ داده در سیستم تعیین می‌گردد.

#### ۵- استخراج معادله محدود شده به منیفلد مرکزی

محاسبه ضریب اول لیاپانف مناسب‌ترین راه تحلیل انشعاب هاپف در سیستم‌های  $n$  بعدی با  $n \geq 2$  است که از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \Rightarrow i_H = & \left( \frac{1}{L_H} \right) V_C + \left( \frac{-k_3 r_0^{-(m+2)}}{L_H} \right) I_H + \left( \frac{k_3(m+2)(r_0)^{-(m+3)} i_{H0}}{L_H} \right) \mathfrak{R} + \left( \frac{k_3(m+2)(r_0)^{-(m+3)}}{L_H} \right) \mathfrak{R} I_H + \left( \frac{-k_3(m+2)(m+3)(r_0)^{-(m+4)} i_{H0}}{2L_H} \right) \mathfrak{R}^2 + \\ & \left( \frac{-k_3(m+2)(m+3)(r_0)^{-(m+4)}}{2L_H} \right) \mathfrak{R}^2 I_H + \left( \frac{k_3(m+2)(m+3)(m+4)(r_0)^{-(m+5)} i_{H0}}{6L_H} \right) \mathfrak{R}^3 \\ & + \left( \frac{k_3(m+2)(m+3)(m+4)(r_0)^{-(m+5)}}{6L_H} \right) \mathfrak{R}^3 I_H + \left( \frac{k_3(m+2)(m+3)(m+4)(r_0)^{-(m+5)}}{6L_H} \right) \mathfrak{R}^3 I_H \\ & + \left( \frac{-k_3(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(r_0)^{-(m+6)} i_{H0}}{24L_H} \right) \mathfrak{R}^4 + \left( \frac{-k_3 r_0^{-(m+2)} i_{H0}}{L_H} \right) + \left( \frac{V_{C0}}{L_H} \right) + O(\mathfrak{R}^4 I_H + \mathfrak{R}^5) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathfrak{R} = & \left( \frac{2k_3 r_0^{-(m+3)} i_{H0}}{k_2} \right) I_H + \left( \frac{-k_3(m+3)(r_0)^{-(m+4)} i_{H0}^2 - k_1(n-1)r_0^{(n-2)}}{k_2} \right) \mathfrak{R} + \\ & \left( \frac{k_3 r_0^{-(m+3)}}{k_2} \right) I_H^2 + \left( \frac{-2k_3(m+3)(r_0)^{-(m+4)} i_{H0}}{k_2} \right) \mathfrak{R} I_H + \left( \frac{k_3(m+3)(m+4)(r_0)^{-(m+5)} i_{H0}^2 - k_1(n-1)(n-2)r_0^{(n-3)}}{2k_2} \right) \mathfrak{R}^2 + \\ & \left( \frac{-k_3(m+3)(r_0)^{-(m+4)}}{k_2} \right) \mathfrak{R} I_H^2 + \left( \frac{k_3(m+3)(m+4)(r_0)^{-(m+5)} i_{H0}}{k_2} \right) \mathfrak{R}^2 I_H + \left( \frac{-k_3(m+3)(m+4)(m+5)(r_0)^{-(m+6)} i_{H0}^2}{6k_2} \right) \mathfrak{R}^3 \\ & + \left( \frac{k_3(m+3)(m+4)(r_0)^{-(m+5)}}{2k_2} \right) \mathfrak{R}^2 I_H^2 + \left( \frac{-k_3(m+3)(m+4)(m+5)(r_0)^{-(m+6)} i_{H0}}{3k_2} \right) \mathfrak{R}^3 I_H \\ & + \left( \frac{k_3(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(r_0)^{-(m+7)} i_{H0}^2}{24k_2} \right) \mathfrak{R}^4 + \left( \frac{k_3 r_0^{-(m+3)} i_{H0}^2}{k_2} \right) + \left( \frac{-k_1 r_0^{(n-1)}}{k_2} \right) + O(\mathfrak{R}^3 I_H^2 + \mathfrak{R}^4 I_H + \mathfrak{R}^5) \end{aligned} \quad (21)$$

$$B_3(x, y) = \left( \frac{k_3(m+2)(r_0)^{-(m+3)}}{L_H} \right) (x_3 y_4 + x_4 y_3) + \left( \frac{-k_3(m+2)(m+3)(r_0)^{-(m+4)} i_{H0}}{L_H} \right) (x_4 y_4) \quad (25)$$

$$B_4(x, y) = \left( \frac{2k_3 r_0^{-(m+3)}}{k_2} \right) (x_3 y_3) + \left( \frac{-2k_3(m+3)(r_0)^{-(m+4)} i_{H0}}{k_2} \right) (x_3 y_4 + x_4 y_3) + \left( \frac{k_3(m+3)(m+4)(r_0)^{-(m+5)} i_{H0}^2 - k_1(n-1)(n-2)r_0^{(n-3)}}{k_2} \right) (x_4 y_4) \quad (26)$$

همچنین برای  $C(x, y, z)$  داریم:

$$C_i(x, y, z) \Big|_{i=1,2,3,4} = \sum_{j,k,g=1}^4 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_g} \Big|_{\xi=0} x_j y_k z_g \quad (27)$$

با اعمال رابطه (27) بر روی روابط (16)، (17)، (20) و (21) داریم:

$$C(x, y, z) = [0 \quad 0 \quad C_3(x, y, z) \quad C_4(x, y, z)]^T \quad (28)$$

با توجه به اینکه در روابط (16) تا (19) تنها دو رابطه آخر یعنی روابط  $\mathfrak{R}$  و  $I_H$  دارای جملات غیرخطی می‌باشند، برای عبارات سمت راست این روابط بسط سری تیلور را می‌نویسیم که این روابط در معادلات (20) و (21) آورده شده است.

سپس توابع برداری چندخطی را طبق رابطه (22) به کار می‌بریم:

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad F(x) = \frac{1}{2} B(x, x) + \frac{1}{6} C(x, x, x) + O(\|x\|^4) \quad (22)$$

در رابطه (22)  $B(x, y)$  و  $C(x, y, z)$  توابع برداری چند خطی متقارن با متغیرهای  $x, y, z \in R^n$  به صورت زیر می‌باشند:

$$(\xi_1 = I_L, \quad \xi_2 = V_C, \quad \xi_3 = I_H, \quad \xi_4 = R) \quad (23)$$

$$B(x, y) \Big|_{i=1,2,3,4} = \frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\xi=0} x_j y_i \quad (23)$$

با اعمال رابطه (22) بر روی روابط (16)، (17)، (20) و (21) داریم:

$$B(x, y) = [0 \quad 0 \quad B_3(x, y) \quad B_4(x, y)]^T \quad (24)$$

$$B(q, E) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left( \frac{k_3(m+2)(r_0)^{-(m+3)}}{L_n} \right) (q, E_1 + q, E_1) + \left( \frac{-k_3(m+2)(m+3)(r_0)^{-(m+4)} i_{H0}}{L_n} \right) (q, E_1) \\ \left( \frac{2k_3 r_0^{-(m+3)}}{k_2} \right) (q, E_1) + \left( \frac{-2k_3(m+3)(r_0)^{-(m+4)} i_{H0}}{k_2} \right) (q, E_1 + q, E_1) + \\ \left( \frac{k_3(m+3)(m+4)(r_0)^{-(m+5)} i_{H0}^2 - k_3(n-1)(n-2)r_0^{-(n-3)}}{k_2} \right) (q, E_1) \end{bmatrix} \quad (38)$$

همچنین با تعریف  $G$  به صورت رابطه (۳۹) که در آن  $I$  ماتریس واحد از مرتبه چهار است، و همچنین با استفاده از رابطه (۲۴) به رابطه (۴۰) خواهیم رسید.

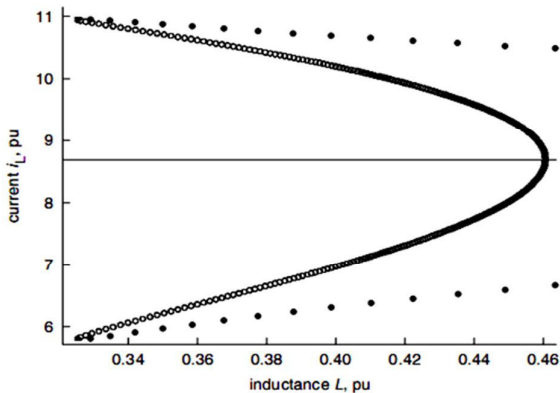
$$G = (2j\omega_0 I - A)^{-1} B(q, q) = [G_1 \quad G_2 \quad G_3 \quad G_4]^T \quad (39)$$

$$B(\bar{q}, G) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left( \frac{k_3(m+2)(r_0)^{-(m+3)}}{L_n} \right) (\bar{q}, G_1 + \bar{q}, G_1) + \left( \frac{-k_3(m+2)(m+3)(r_0)^{-(m+4)} i_{H0}}{L_n} \right) (\bar{q}, G_1) \\ \left( \frac{2k_3 r_0^{-(m+3)}}{k_2} \right) (\bar{q}, G_1) + \left( \frac{-2k_3(m+3)(r_0)^{-(m+4)} i_{H0}}{k_2} \right) (\bar{q}, G_1 + \bar{q}, G_1) + \\ \left( \frac{k_3(m+3)(m+4)(r_0)^{-(m+5)} i_{H0}^2 - k_3(n-1)(n-2)r_0^{-(n-3)}}{k_2} \right) (\bar{q}, G_1) \end{bmatrix} \quad (40)$$

برنامه کامپیوتری محاسبه ضریب اول لیاپانف با استفاده از نرم افزار Matlab نوشته شده که با استفاده از این برنامه  $L_1$  به صورت رابطه (۴۱) خواهد بود:

$$L_1(L_0) = 1.573278639726965 \times 10^{-5} > 0 \quad (41)$$

با توجه به مثبت بودن این مقدار نتیجه می شود که انشعاب هاپف رخ داده از نوع زیر بحرانی می باشد. تا قبل از رخ دادن انشعاب هاپف در اطراف نقطه تعادل سیکل حد ناپایدار داریم. این سیکل حد ناپایدار ناحیه جذب نقطه تعادل را مشخص می کند. با توجه به مثبت بودن این مقدار نتیجه می شود که انشعاب هاپف رخ داده از نوع زیر بحرانی می باشد. تا قبل از رخ دادن انشعاب هاپف در اطراف نقطه تعادل سیکل حد ناپایدار داریم.



شکل (۸): دیاگرام انشعاب  
Fig. (8): Bifurcation diagram

$$C_3(x, y, z) = \left( \frac{-k_3(m+2)(m+3)(r_0)^{-(m+4)}}{L_H} \right) (x_3, y_3, z_4 + x_4, y_3, z_4 + x_4, y_4, z_3) + \left( \frac{k_3(m+2)(m+3)(m+4)(r_0)^{-(m+5)} i_{H0}}{L_H} \right) (x_4, y_4, z_4) \quad (29)$$

$$C_4(x, y, z) = \left( \frac{-2k_3(m+3)(r_0)^{-(m+4)}}{k_2} \right) (x_3, y_3, z_4 + x_3, y_4, z_3 + x_4, y_3, z_3) + \left( \frac{2k_3(m+3)(m+4)(r_0)^{-(m+5)} i_{H0}}{k_2} \right) (x_3, y_4, z_4 + x_4, y_3, z_4 + x_4, y_4, z_3) + \left( \frac{-k_3(m+3)(m+4)(m+5)(r_0)^{-(m+6)} i_{H0}^2}{k_2} \right) (x_4, y_4, z_4) \quad (30)$$

در ادامه ماتریس ژاکوبین را حول نقطه تعادل اول به دست می آوریم، سپس بردارهای ویژه مربوط به مقدار ویژه  $\lambda = j\omega_0$  را محاسبه می کنیم:

$$Aq = j\omega q, \quad q = [q \quad q \quad q \quad q]^T \quad (31)$$

بردارهای ویژه الحاقی مربوط به مقدار ویژه  $\lambda = -j\omega_0$  را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$A^T p' = -j\omega_0 p', \quad p' = [p'_1 \quad p'_2 \quad p'_3 \quad p'_4]^T \quad (32)$$

حال بردارهای ویژه به دست آمده را نرمالیزه می کنیم:

$$N = \langle p', q \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{p}'_i q_i = 1 \quad (33)$$

همچنین:

$$\text{If } P = \frac{1}{N} p' \Rightarrow \langle p, q \rangle = \langle \frac{1}{N} p', q \rangle = \frac{1}{N} \langle p', q \rangle = 1 \quad (34)$$

بنابراین:

$$\Rightarrow p = \frac{1}{N} [p'_1 \quad p'_2 \quad p'_3 \quad p'_4]^T \quad (35)$$

با استفاده از رابطه (۲۴)  $B(q, q)$  و  $B(q, \bar{q})$  را محاسبه می کنیم همچنین با استفاده از رابطه (۲۸) داریم:

$$C(q, q, \bar{q}) = [0 \quad 0 \quad C(q, q, \bar{q}) \quad C(q, q, \bar{q})] \quad (36)$$

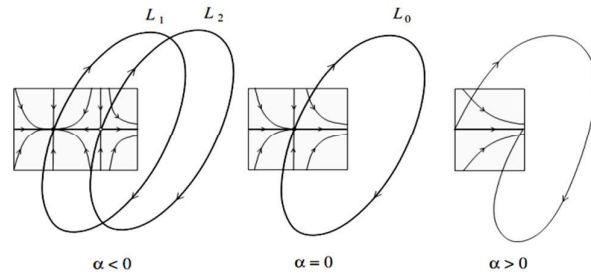
با تعریف  $E$  به عنوان قسمتی از ضریب اول لیاپانوف به صورت رابطه (۳۷) و همچنین با استفاده از رابطه (۲۴) به رابطه (۳۸) خواهیم رسید:

$$E = A^{-1} B(q, \bar{q}) = [E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad E_4]^T \quad (37)$$

همان طور که ملاحظه می‌گردد به ازای پارامتر انشعاب  $\alpha < 0$  دو سیکل حد داریم، یکی پایدار و دیگری ناپایدار. در واقع در سیکل حد پایدار تمامی ضرب‌کننده‌ها داخل دایره واحد قرار دارند و در سیکل حد ناپایدار حداقل یکی از آنها در بیرون از دایره واحد قرار دارند. در نقطه انشعاب دو سیکل حد به هم رسیده و در هم ادغام می‌گردند. در این حالت مسیرهای فاز از یک سو به سمت سیکل حد همگرا شده و از سوی دیگر از آن دور می‌گردند. در  $\alpha > 0$  سیکل‌های حد از بین می‌روند. در شکل (۸) این انشعاب در  $L = 0.3251900570 pu$  رخ داده است. در کمتر از این مقدار سیکل حدی وجود ندارد و در پارامتر انشعاب بیشتر از این مقدار دو سیکل حد داریم. مقادیر حداکثر و حداقل سیکل حدی ناپایدار با دایره‌های توخالی و برای سیکل حد پایدار با دایره‌های توپر نشان داده شده است. اگر شرایط اولیه سیستم در ناحیه بین دو سیکل حد قرار گیرند، جذب سیکل حد پایدار می‌گردند.

### ۶- نتیجه گیری

در این مقاله پایداری بار دینامیکی غیرخطی کوره قوس الکتریکی متصل به سیستم قدرت در حضور منبع تولید توان راکتیو بانک خازنی با استفاده از تئوری انشعابات مورد بررسی قرار گرفت. و همچنین روابط تحلیلی بررسی انشعابات گره - زینی و هاپف در مورد سیستم‌های مدل شده با درجه  $n$  استخراج گردید. در این مقاله ابتدا به روش تحلیلی انشعابات سیستم قدرت شامل یک کوره قوس الکتریکی استخراج گردید و سپس نتایج کار با خروجی نرم‌افزار AUTO مقایسه شد و نتایج زیر حاصل گردید. با استفاده از روش تحلیلی تنها یک نوع از انشعابات این سیستم قدرت مشخص گردید ولی با کمک نرم‌افزار Auto همه انشعابات ممکن در سیکل‌های حدی به وجود آمده (با تغییر پارامتر) مشخص گردید.



شکل (۹): انشعاب فولد در سیکل‌های حدی  
Fig. (9): Fold bifurcation of limit cycles

این سیکل حد ناپایدار ناحیه جذب نقطه تعادل را مشخص می‌کند. با نزدیک شدن به نقطه انشعاب دامنه سیکل حد کوچک‌تر شده و ناحیه جذب محدودتر می‌گردد؛ تا اینکه در نقطه انشعاب سیکل حد و نقطه تعادل در هم ادغام می‌گردد و سیکل حد از بین می‌رود. در این حالت همگرایی نقطه تعادل به کندی صورت می‌گیرد. در این قسمت، سیستم قدرت مورد نظر (شکل (۶)) با استفاده از نرم افزار Auto مورد بررسی قرار می‌گیرد تا مقایسه‌ای بین نتایج به دست آید و همچنین انشعابات احتمالی در سیکل حدها با تغییر پارامتر انشعاب استخراج گردد. خروجی این برنامه در شکل (۸) آمده است.

همان طور که ملاحظه می‌گردد نقطه کار پایدار سیستم برای جریان  $i_L$  برابر  $8.6979 pu$  به ازای  $L$  کمتر از  $L_0 = 0.46065 pu$  است. در  $L = L_0 = 0.46065 pu$  یک جفت مقدار ویژه مزدوج مختلط روی محور موهومی قرار می‌گیرند و انشعاب هاپف رخ می‌دهد. مقادیر حداکثر و حداقل سیکل‌های حد ناپایدار با دایره‌های توخالی نشان داده شده است. نواحی بین خط ممتد و مقادیر حداکثر و حداقل سیکل‌های حد ناپایدار، نواحی جذب نقاط تعادل سیستم را مشخص می‌کنند. اتفاق جالب در این دیاگرام رخداد انشعاب فولد در مدارهای تناوبی (سیکل حد) است. دیاگرام کلی این انشعاب در شکل (۹) آورده شده است.

### References

- [1] M. Gulshan Hamadani, Voltage stability of power systems, printing, publishing Astan Quds Razavi, 2007.
- [2] W. Gu, F. Milano, P. Jiang, G. Tang, "Hopf bifurcation induced by SVC controllers: A didactic example", Int. J. Electric Power System Research, Vol. 77, pp. 234-240, 2007.
- [3] T.A. Kuznetsov, "Elements of applied bifurcation theory", Second edition, Springer, 1998.
- [4] S. Wiggins, "Introduction to applied nonlinear dynamical systems", Second edition, Springer, 2003.
- [5] H. Samet, "Modeling and prediction of dynamic reactive power control algorithm used in electric arc furnaces with the aim of SVC", School of Electrical and Computer Engineering, Isfahan University of Technology, PhD Thesis in Electrical Engineering, 2008.
- [6] F. Chen, K.B. Athreya, V.V. Sastry, S.S. Venkata, "Function space valued markov model for electric arc furnace", IEEE Trans. Power Sys., Vol. 19, No. 2, pp. 826-833, May 2004.
- [7] G.C. Montanari, M. Loggini, A. Cavallini, L. Pitti, D. Zaninelli, "Arc-furnace model for the study of flicker compensation in electrical networks", IEEE Trans. Power Deliv., Vol. 9, No. 4, pp.2026-2036, 1994.
- [8] S.M. Mousavi Agah, S.H. Hosseinian, N. Askarian Abyaneh Moaddabi, "Parameter identification of arc furnace based on stochastic nature of arc length using two-step optimization technique", IEEE Trans. Power Deliv., Vol. 25, No. 4, pp. 2859-2867, Oct.
- [9] T. Zheng, E.B. Makram, "An adaptive arc furnace model", IEEE Trans. Power Del., Vol. 15, No. 3, Jul. 2000.
- [10] M.A. Gómez-Martínez, A. Medina, C.R. Fuerte-Esquivel, "AC arc furnace stability analysis based on bifurcation theory", IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib., Vol. 153, No. 4, pp. 463-468, July 2006.