

ترکیب مسأله نامساوی ماتریسی خطی بهبود یافته با جایابی ساختارهای ویژه با استفاده از فیدبک استاتیکی و دینامیکی

امیر پرویز ولدبیگی^(۱) - علی خاکی صدیق^(۲) - سعید حسین نیا^(۳)

(۱) کارشناسی ارشد - دانشکده برق، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد نجف آباد

(۲) استاد - دانشکده برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر

(۳) استادیار - دانشکده برق، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد نجف آباد

تاریخ دریافت: تابستان ۱۳۸۹

تاریخ پذیرش: بهار ۱۳۹۰

خلاصه: در این مقاله روشی برای ترکیب مسئله جایابی ساختارهای ویژه با محدودیت H_∞ هنگامی که متغیرهای حالت قابل اندازه گیری نیستند پیشنهاد می گردد. در این وضعیت استفاده از فیدبک حالت مجاز نمی باشد، بنابراین از فیدبک خروجی استفاده می گردد. بر طبق نامساوی ماتریسی خطی بهبود یافته و روش پارامتری جایابی ساختار ویژه، روشی مبتنی بر یک نامساوی ماتریسی خطی ارائه می گردد. این نامساوی ماتریسی خطی به راحتی با استفاده از LMI toolbox یا YALMIP قابل حل می باشد. مثالی نیز برای بیان قابلیت این روش ارائه گردیده است.

کلمات کلیدی: جایابی ساختار ویژه، محدودیت H_∞ ، فیدبک خروجی، نامساوی ماتریسی خطی.

۱- مقدمه

با توجه به نتایج [۱] در مورد جایابی مقادیر ویژه و همچنین درجات آزادی مطرح شده در [۲] و [۳] با استفاده از فیدبک خروجی و فیدبک حالت برای سیستمهای خطی تغییر ناپذیر با زمان چند ورودی چند خروجی بسیاری از روشهای جایابی ساختار ویژه در دو دهه اخیر گسترش یافته اند [۱-۱۰]. همچنین مسئله جایابی ساختار ویژه، در طراحی سیستمهای کنترل چند متغیره گوناگونی مورد استفاده قرار گرفته است. از آن جمله می توان به طراحی کنترل کننده قابل شکل دهی مجدد [۱]، سیستمهای کنترل هلیکوپتر [۶]، سیستمهای کنترل موشک [۷] و کنترل مقاوم ماشینهای القایی اشاره نمود.

اکثر روشهای جایابی ساختارهای ویژه مبتنی بر عدم حساسیت مقادیر ویژه می باشند و روشهای معدودی به بررسی مسئله ترکیب جایابی ساختار ویژه با دیگر اهداف کنترلی پرداخته اند. در چند سال اخیر نتایجی برای چنین مسائلی بیان گردیده است. در [۸] طراحی کنترل کننده مقاوم با توجه به خصوصیات حوزه زمان و فرکانس مورد بررسی قرار گرفته است. در [۳] روشی جدید در طراحی کنترل کننده فیدبک حالت برای برآورده شدن اهداف کنترلی چند منظوره ارائه گردیده است.

اما از روش ارائه شده تنها در صورتی می توان استفاده نمود که کلیه متغیرهای حالت در اختیار باشند. در [۵] نیز روشی جدید برای ترکیب مسئله جایابی ساختار ویژه با محدودیت H_2 ارائه شده است.

در این مقاله ترکیب مسئله جایابی ساختار ویژه با محدودیت H_∞ در حالتی که متغیرهای حالت قابل اندازه گیری نیستند، بررسی می گردد. بر اساس روش پارامتری کردن جایابی ساختار ویژه ارائه شده در [۱] و همچنین مشخصات بهبود یافته نامساوی ماتریسی خطی [۴] روشی بر اساس یک نامساوی خطی ماتریسی ارائه می شود. بر اساس این روش کنترل کننده فیدبک خروجی به گونه ای طراحی می گردد، که محدودیت H_∞ مربوط به معیار کاهش اغتشاش را برآورده سازد. همچنین روش ارائه شده برای کنترل کننده دینامیکی تعمیم داده می شود تا بتوان از درجات آزادی موجود در کنترل کننده دینامیکی استفاده کرد.

در این مقاله A^* نشان دهنده مزدوج ترانهاده ماتریس A می باشد. $P > 0$ یعنی اینکه P یک ماتریس معین مثبت است. استفاده از علامت $*$ برای ماتریسهای هرمیتی برای حالت ترانهاده مزدوج بلوک متناظر است. ($\text{Diag}(\dots)$ نشان دهنده ماتریسی بلوکی قطری است.

این مقاله به پنج بخش اصلی تقسیم می گردد. در بخش (۲) مسأله

از روش پارامتری کردن فیدبک خروجی. سیستم (۱) و مجموعه اعداد مزدوج مختلط $\Gamma = \{s_i, i=1,2,\dots,n\}$ معلوم می‌باشند. کنترل‌کننده فیدبک خروجی (۲) را چنان بیابید که محدودیتهای زیر صادق باشند:

$$(1) \det(V) \neq 0 \text{ همچنین برقرار باشد,} \\ (2) \text{ شاخص } H_\infty \text{ تضعیف اغتشاش زیر صادق باشد}$$

$$\|T_{zw}\|_\infty^2 < \gamma^2 \quad (7)$$

که T_{zw} نشان‌دهنده تابع تبدیل از w به Z در سیستم حلقه بسته (۳) می‌باشد. γ یک ثابت مثبت معلوم است.

۳- پارامتری کردن فیدبک خروجی با استفاده از SVD

سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (8)$$

که در آن $y \in R^m, u \in R^r, x \in R^n$ به ترتیب بردار حالت، بردار ورودی و بردار خروجی می‌باشند. ماتریسهای A, B, C ماتریسهایی با ابعاد مناسب می‌باشند. فیدبک خروجی زیر را به سیستم (۸) اعمال کنید.

$$u(t) = Ky(t) \quad (9)$$

در نتیجه ماتریس سیستم حلقه بسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} A_c &= A + BKC \\ A_{cl}V &= FV \end{aligned} \quad (10)$$

در این حالت نیز فرض کنید که سیستم حلقه بسته نامعیوب است و F نشان‌دهنده شکل جردن ماتریس حلقه بسته (۱۰) می‌باشد. F ماتریسی قطری است و عناصر روی قطر اصلی آن $s_i, i=1,2,\dots,n$ مقادیر ویژه مطلوب می‌باشند. همچنین در اینجا فرض بر این است که زوج (A, B) کنترل پذیر است. با بکار بردن SVD برای ماتریس $[B \ s_i I - A]$ رابطه زیر صادق است.

$$\Psi_i^c [B \ s_i I - A] \Phi_i^c = \begin{bmatrix} \sum_i^c & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

که در این رابطه Ψ_i^c و Φ_i^c ماتریسهای اورتوگونال با ابعاد مناسب هستند و \sum_i^c یک ماتریس قطری ناویژه است که عناصر روی قطر آن مقادیر استثنایی ماتریس $[B \ s_i I - A]$ می‌باشند. با قسمت بندی ماتریس Φ_i^c رابطه زیر برقرار است:

$$\Phi_i^c = \begin{bmatrix} * & D_i \\ * & N_i \end{bmatrix}, N_i \in R^{n \times r}, D_i \in R^{r \times r} \quad (12)$$

با توجه به مطالب فوق و نتایج مطرح شده در [۱] قضیه زیر برای پارامتری کردن فیدبک خروجی مطرح می‌گردد.

قضیه ۱: فرض کنید (A, B) کنترل‌پذیر است و $\text{rank}(C) = m$ و ماتریسهای $(\det(V) \neq 0) V \in C^{n \times n}$ و $K \in R^{r \times m}$ که در رابطه (۶) صدق می‌کنند، وجود دارند اگر و فقط اگر بردارهای پارامتر $f_i \in C^r, i=1,2,\dots,n$ وجود داشته باشند که در محدودیتهای زیر صدق کنند.

اصلی در این مقاله بیان می‌گردد. در بخش (۳) روش پارامتری کردن با استفاده از فیدبک خروجی مورد بررسی می‌گردد. بخش (۴) نتایج اصلی به دست آمده را بیان می‌کند. طراحی کنترل‌کننده دینامیکی در بخش (۵) بیان می‌شود و در بخش (۶) مثالی عددی برای نشان دادن تاثیر روش ارائه شده در مقاله بیان می‌گردد.

۲- بیان مسئله

سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = C_2 x \end{cases} \quad (1)$$

که در آن $y \in R^m, z \in R^l, u \in R^r, w \in L_2^q[0, \infty), x \in R^n$ به ترتیب بردار حالت، بردار اغتشاش خارجی، بردار ورودی، ترکیب حالت (سیگنال تابع هدف) که باید تضعیف گردد و بردار خروجی می‌باشند. ماتریسهای $D_{12}, A, B_1, B_2, C_1, C_2$ ماتریسهای معلوم و حقیقی با ابعاد مناسب هستند. فرض کنید زوج ماتریسی (A, B) کنترل‌پذیر باشد. با اعمال فیدبک خروجی استاتیکی

$$U(t) = Ky(t) \quad (2)$$

به سیستم (۱) سیستم حلقه بسته به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{cl} x + B_1 w \\ z = (C_1 + D_{12} K C_2) x \\ y = C_2 x \end{cases} \quad (3)$$

$$A_{cl} = A + B_2 K C_2 A_{cl}$$

تعریف ۱: ماتریسهای نامعیوب ماتریسهایی هستند که مقادیر ویژه آنها دارای کمترین حساسیت به تغییر پارامترها می‌باشند. مقادیر ویژه این ماتریسها متمایز می‌باشند، در نتیجه شکل جردن این ماتریسها به صورت قطری می‌باشد. همچنین سیستم (۳) را نامعیوب گویند اگر ماتریس A_{cl} نامعیوب باشد.

برای به دست آوردن سیستم حلقه بسته نامعیوب، ماتریس قطری

$$J = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n) \quad (4)$$

را به عنوان شکل جردن ماتریس A_{cl} در نظر بگیرید که $s_i, i=1,2,\dots,n$ مجموعه‌ای از اعداد مزدوج مختلط هستند که به عنوان مقادیر ویژه مطلوب انتخاب شده‌اند. ماتریس بردارهای ویژه سمت راست به صورت V نمایش داده می‌شود. این ماتریس به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (5)$$

که $v_i, i=1,2,\dots,n$ بردارهای ویژه سمت راست می‌باشند. بنا به تعریف بردارهای ویژه رابطه زیر برقرار است:

$$(A + B_2 K C_2) = J V \quad (6)$$

بعد از مقدمات فوق مسئله اصلی در این مقاله حل مسئله زیر با توجه به روش پارامتری کردن فیدبک خروجی مطرح شده در [۱] است.

مسئله ۱: ترکیب جایابی ساختارهای ویژه با محدودیت H_∞ با استفاده

$$(1) \text{ اگر } s_i = \bar{s}_j \text{ آنگاه } f_i = \bar{f}_j$$

$$(2) \det[N_1 f_1 \ N_2 f_2 \ \dots \ N_n f_n] \neq 0$$

$$(3) \text{rank} \begin{bmatrix} C_2 N_1 f_1 & C_2 N_2 f_2 & \dots & C_2 N_n f_n \\ D_1 f_1 & D_2 f_2 & \dots & D_n f_n \end{bmatrix} = m$$

در صورتی که شرایط بالا برقرار باشد، ماتریس بهره فیدبک خروجی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$K = W(C_2 V)^T [(C_2 V)(C_2 V)^T]^{-1} \quad (19)$$

$$\Lambda = \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$N = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n] \in \mathbb{R}^{n \times nr} \quad (20)$$

$$D = [D_1 \ D_2 \ \dots \ D_n] \in \mathbb{R}^{r \times nr}$$

اثبات: بر طبق تعاریف بالا رابطه (۱۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$V = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n] \begin{bmatrix} f_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f_n \end{bmatrix} = N\Lambda \quad (21)$$

$$W = [D_1 \ D_2 \ \dots \ D_n] \begin{bmatrix} f_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f_n \end{bmatrix} = D\Lambda \quad (22)$$

آنگاه بهره فیدبک خروجی (۱۹) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K = D\Lambda (C_2 D\Lambda)^T [(C_2 D\Lambda)(C_2 D\Lambda)^T]^{-1} \quad (23)$$

با جایگزینی V به جای S در رابطه (۱۷)، سیستم حلقه بسته محدودیت H_∞ را برآورده می‌سازد اگر نامساوی ماتریس خطی زیر امکان پذیر باشد.

$$\begin{bmatrix} A_{cl}V + V^*A_{cl}^* & * & * & * \\ C_{cl}V & -I_1 & * & * \\ B_1^* & 0 & -\gamma_\infty^2 I_p & * \\ Y - V + \varepsilon V^*A_{cl}^* & \varepsilon V^*C_{cl}^* & 0 & -\varepsilon(V + V^*) \end{bmatrix} \quad (24)$$

با اعمال فیدبک خروجی (۲) به سیستم (۱) و با توجه به قضیه ۱ رابطه زیر صادق است.

$$(A + B_2 K C_2)V = J V \quad (25)$$

پس ماتریس سیستم حلقه بسته به صورت $A_{cl} = A + B_2 K C_2$ می‌باشد. همچنین $C_{cl} = C_1 + D_{12} K C_2$ در نتیجه رابطه به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$(26) \text{ از } \begin{bmatrix} VJ + (VJ)^* & * & * & * \\ C_1 V + D_{12} K C_2 V & -I_1 & * & * \\ B_1^* & 0 & -\gamma_\infty^2 I_p & * \\ Y - V + \varepsilon(VJ)^* & \varepsilon V^*(C_1 + D_{12} K C_2)^* & 0 & \varepsilon(V + V^*) \end{bmatrix} < 0$$

رابطه (۱۳) با جایگذاری C_2 به جای C مشخص است که $W = K C_2 V$ با جایگزینی V و W از روابط (۲۱)، (۲۲) و اینکه $C_1 V + D_{12} K C_2 V = C_1 N \Lambda + D_{12} W$

$$(1) \text{ اگر } s_i = \bar{s}_j \text{ آنگاه } f_i = \bar{f}_j$$

$$(2) \det[N_1 f_1 \ N_2 f_2 \ \dots \ N_n f_n] \neq 0$$

$$(3) \text{rank} \begin{bmatrix} C N_1 f_1 & C N_2 f_2 & \dots & C N_n f_n \\ D_1 f_1 & D_2 f_2 & \dots & D_n f_n \end{bmatrix} = m$$

در صورتی که شرایط فوق برقرار باشد، همه ماتریسهای $K \in \mathbb{R}^{r \times m}$ و $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($\det(V) \neq 0$) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$K = W(CV)^T [(CV)(CV)^T]^{-1} \quad (13)$$

$$W = KC V$$

$$\begin{cases} V = [N_1 f_1 & N_2 f_2 & \dots & N_n f_n] \\ W = [D_1 f_1 & D_2 f_2 & \dots & D_n f_n] \end{cases} \quad (14)$$

که N_i و D_i با توجه به روابط (۱۱) و (۱۲) به دست می‌آیند و خاص که $\text{rank}(C) = n$ است ماتریس بهره فیدبک خروجی به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$K = W(CV)^{-1} \quad (15)$$

۴- نتایج اصلی

برای حل مسئله ۱، نتیجه زیر که در [۴] به طور کامل تشریح گردیده است، بیان می‌شود.

سیستم تغییر ناپذیر با زمان (۱) و فیدبک حالت زیر را در نظر بگیرید $U(t) = Kx(t)$ (۱۶)

ماتریس‌های معین مثبت $Y \in H_n$ و $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ وجود دارند چنانکه

$$\begin{bmatrix} A_{cl}S + S^*A_{cl} & * & * & * \\ C_{cl}S & -I_1 & * & * \\ B_1^* & 0 & -\gamma_\infty^2 I_q & * \\ Y - S + \varepsilon S^*A_{cl}^* & \varepsilon S^*C_{cl}^* & 0 & -\varepsilon(S + S^*) \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

$$A_{cl} = (A + BK), C_{cl} = (C_1 + D_{12}K)$$

برای $\varepsilon > 0$ اگر و فقط اگر $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma_\infty$ توجه کنید که در (۹)، S یک متغیر اضافی است که توسط مشخصات نامساوی ماتریس خطی معرفی گردیده است.

با توجه به نتیجه فوق و قضیه ۱، قضیه زیر برای حل مسئله ۱ مطرح می‌گردد.

قضیه ۲: سیستم (۱) معلوم است، همچنین زوج (A, B_2) کنترل پذیر است. کنترل کننده فیدبک خروجی وجود دارد اگر اسکالر $0 < \varepsilon < 1$ و ماتریسهای $Y > 0$ و Λ وجود داشته باشند که در رابطه زیر صدق کنند.

$$(18) \begin{bmatrix} N\Lambda + (N\Lambda)^* & * & * & * \\ C_1 N\Lambda + D_{12}\Lambda & -I_1 & * & * \\ B_1^* & 0 & -\gamma_\infty^2 I_q & * \\ Y - N\Lambda + \varepsilon(N\Lambda)^* & \varepsilon(C_1 N\Lambda + D_{12}\Lambda)^* & 0 & -\varepsilon(N\Lambda + (N\Lambda)^*) \end{bmatrix} < 0$$

که $J = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$ و همچنین شرایط زیر برقرار باشد

$$\begin{cases} \dot{x}_c = k_{11}x_c + k_{12}y \\ u = k_{21}x_c + k_{22}y \end{cases} \quad (29)$$

که $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ با ترکیب کنترل کننده فوق با معادله (۸)، سیستم حلقه بسته زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{21} \\ k_{12} & k_{11} \end{bmatrix} \tilde{y} \end{cases} \quad (30)$$

فرض کنید که

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

با توجه به تعاریف فوق رابطه (۳۰) به صورت زیر تبدیل می‌گردد

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u} \\ \bar{y} &= \bar{C}\bar{x}, \bar{K} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{21} \\ k_{12} & k_{11} \end{bmatrix} \\ \bar{u} &= \bar{K}\bar{y} \end{aligned} \quad (32)$$

از رابطه فوق آشکار است که مسأله طراحی کنترل کننده دینامیکی به مسأله کنترل کننده خروجی استاتیکی تبدیل می‌گردد، که در این حالت \bar{K} نقش یک کنترل کننده استاتیکی را دارد. تعداد مقادیر ویژه این کنترل کننده $n+n_c$ می‌باشد. با انتخاب مناسب n_c می‌توان کلیه مقادیر ویژه را جایابی نمود. از درجه آزادی موجود در این کنترل کننده در برآوردن دیگر اهداف کنترلی نیز، می‌توان استفاده نمود. برای حل مسأله ۱ با استفاده از کنترل کننده دینامیکی، معادله (۲۹) را با معادله (۱) ترکیب کرده و با جایگذاری و ساده سازی معادلات به راحتی می‌توان دید که سیستم افزوده زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & L_{n_c} \end{bmatrix}, \tilde{K} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{21} \\ K_{12} & K_{11} \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix}, \tilde{D}_{12} = \begin{bmatrix} D_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{C}_1 = [C_1 \ 0] \\ \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}_1 W + \tilde{B}_2 u \\ \tilde{z} = \tilde{C}_1 \tilde{x} + \tilde{D}_{12} u, \tilde{x} = [x \ x_c]^T \\ \tilde{y} = \tilde{C}_2 \tilde{x} \end{cases} \quad (33)$$

با جایگذاری ماتریسهای $\tilde{A}, \tilde{D}_{12}, \tilde{C}_2, \tilde{B}_1, \tilde{A}$ ماتریسهای $C_1, D_{12}, C_2, B_2, B_1, A$ ماتریسهای C, B ماتریسهای $C_1, D_{12}, C_2, B_2, B_1, A$ نامساوی ماتریس خطی (۲۸) را می‌توان بر اساس سیستم افزوده (۳۳) نوشت. برای سیستم افزوده فوق و کنترل کننده دینامیکی استفاده شده، رابطه (۲۸) به صورت زیر قابل بیان می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} NAJ + (NAJ)^* & * & * & * \\ C_1 NA + D_{12} W & -I_1 & * & * \\ B_1^* & 0 & -\gamma_\infty^2 I_p & * \\ Y - NA + \varepsilon(NAJ)^* & \varepsilon(C_1 NA + D_{12} W)^* & 0 & -\varepsilon(NA + (NA)^*) \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

همچنین $W = DA$ در نتیجه رابطه (۲۷) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} NAJ + (NAJ)^* & * & * & * \\ C_1 NA + D_{12} DA & -I_1 & * & * \\ B_1^* & 0 & -\gamma_\infty^2 I_q & * \\ Y - NA + \varepsilon(NAJ)^* & \varepsilon(C_1 NA + D_{12} DA)^* & 0 & \varepsilon(NA + (NA)^*) \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

و اثبات تکمیل می‌گردد.

بر طبق قضیه ۲ الگوریتم زیر برای حل مسئله ۱ پیشنهاد می‌گردد. الگوریتم ۱

N_i و D_i را از رابطه (۱۲) محاسبه کنید

ماتریسهای N و D را از روابط (۲۱) و (۲۲) محاسبه نمایید

نامساوی ماتریس خطی (۲۷) در صورت امکان پذیری بر حسب متغیرهای Y و Λ را در نظر گرفتن محدودیتهای (۱)، (۲) و (۳) حل کنید.

با استفاده از Y و Λ ماتریس K را محاسبه کنید

در صورتی که نامساوی ماتریس خطی (۲) امکان پذیر نباشد مسئله ۱ جواب ندارد.

تذکر ۱: روش پیشنهادی در این مقاله برای سیستمهای تک ورودی تک خروجی مناسب نیست، زیرا جایابی قطب در سیستمهای تک ورودی تک خروجی منحصر به فرد است همچنین این روش نباید با روش جایابی قطب ناحیه‌ای اشتباه گرفته شود. در روش جایابی قطب ناحیه‌ای مکان دقیق قطبها مشخص نمی‌گردد.

تذکر ۲: با توجه به الگوریتم ۱ مشخص است که پارامترهای $f_i \in C^r, (i=1,2,\dots,n)$ ، پارامترهای طراحی می‌باشند. این پارامترها را می‌توان به گونه‌ای طراحی نمود که علاوه بر برآوردن شاخص H_∞ تضعیف اغتشاش، شاخصهای عملکرد دیگری را نیز برآورده سازد.

۵- طراحی کنترل کننده دینامیکی

برای سیستم کنترل پذیر (۸) اگر فرض شود که ماتریسهای C, B رتبه کامل باشند، آنگاه $\max(m,r)$ مقدار ویژه و بردارهای ویژه متناظرشان را با استفاده از کنترل کننده فیدبک خروجی استاتیکی به شکل (۹) می‌توان جایابی نمود. در حالت کلی ممکن است هدف جایابی مقادیر ویژه با تعداد بیشتر از $\max(m,r)$ باشد. در این صورت نمی‌توان از کنترل کننده فیدبک خروجی استاتیکی استفاده کرد [۱۱]. برای رفع این مشکل ایده کنترل کننده دینامیکی مطرح گردید. کنترل کننده دینامیکی زیر را در نظر بگیرید

با اعمال قضیه ۲ برای $\varepsilon=0.01$ و $\gamma=1$ بهره فیدبک خروجی K و ماتریس پارامتر Λ به صورت زیر به دست می‌آیند.

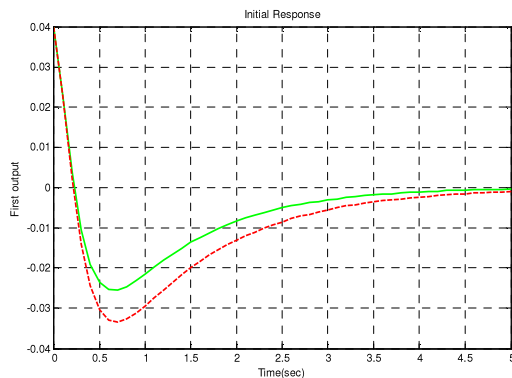
$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.4189 & 0 & 0 \\ 2.2537 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1947 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1779 \\ 0 & 0 & 0.6173 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.0294 & -0.3369 & 0.2182 \\ 1.7119 & 0.2092 & 0.2126 \end{bmatrix} \quad (40)$$

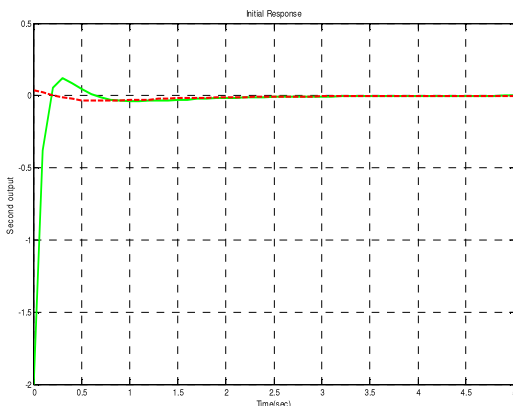
با استفاده از کنترل‌کننده فوق مقادیر ویژه به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1.0009 \\ \lambda_2 &= -5.002 \\ \lambda_3 &= -10.0011 \end{aligned} \quad (41)$$

پاسخ سیستم به برای حالت اولیه $x(0)=[0.04 \ -1 \ 0]^T$ در شکلهای (۳-۱) نشان داده شده است.



شکل (۱): پاسخ اولیه خروجی اول
Fig. 1: Initial first output response



شکل (۲): پاسخ اولیه خروجی دوم
Fig. 2: Initial second output response

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}\tilde{A}\tilde{J}+(\tilde{N}\tilde{A}\tilde{J})^* & * & * & * \\ \tilde{C}_1\tilde{N}\tilde{A}+\tilde{D}_{12}\tilde{D}\tilde{A} & -I_{q+n_c} & * & * \\ \tilde{B}_1^* & 0 & -\gamma_\infty^2 I_{q+n_c} & * \\ \tilde{Y}-\tilde{N}\tilde{A}+\varepsilon(\tilde{N}\tilde{A}\tilde{J})^* & \varepsilon(\tilde{C}_1\tilde{N}\tilde{A}+\tilde{D}_{12}\tilde{D}\tilde{A})^* & 0 & -\varepsilon(\tilde{N}\tilde{A}+(\tilde{N}\tilde{A})^*) \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

که ماتریسهای $\tilde{N}, \tilde{D}, \tilde{A}$ از روابط مشابه روابط (۲۱) و (۲۲) برای سیستم افزوده (۳۳) به دست می‌آیند.

با توجه به درجه آزادی موجود در کنترل‌کننده دینامیکی (با انتخاب n_c) می‌توان کنترل‌کننده دینامیکی را به نحوی تعیین نمود که علاوه بر برآوردن شرایط مسئله ۱ دیگر اهداف کنترلی مورد نظر را نیز برآورده سازد.

۶- مثال عددی

برای بررسی الگوریتم پیشنهادی برای حل مسئله ۱ مثال زیر بیان می‌گردد. دینامیکهای خطی شده مرتبه ۳ یک هواپیمای کوچک را که به صورت زیر بیان شده‌اند، در نظر بگیرید [۱۰]. فرض کنید سیستم دارای ۴۰% نامعینی در درایه‌های $A(2,2), A(1,1)$ می‌باشد. آنگاه این نامعینی ساختاری را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + Bu(t) \quad (35)$$

$$y(t) = C_2 x(t) \quad (36)$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.228 & 0.059 & -0.998 \\ -34.9 & -1.516 & 0.872 \\ 18.69 & 0.0379 & -0.564 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.0037 & 0.0395 \\ 21.3 & 21.3 \\ 0.504 & -8.29 \end{bmatrix}$$

$$\hat{H} = [0.4 A(1,1), 0, 0]^T, E_a = [1, 0, 0], L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|\Delta(t)\| < 1, \Delta A(t) = \hat{H}\Delta(t)E_a$$

بردار حالت و بردار ورودی به صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$x = \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (37)$$

که β زاویه لغزش کناری، p نرخ پیچش، r نرخ دوران حول محور قائم هواپیما و δ_a زاویه انحراف قسمت متحرک بال هواپیما، δ_r زاویه انحراف باله عقب می‌باشند.

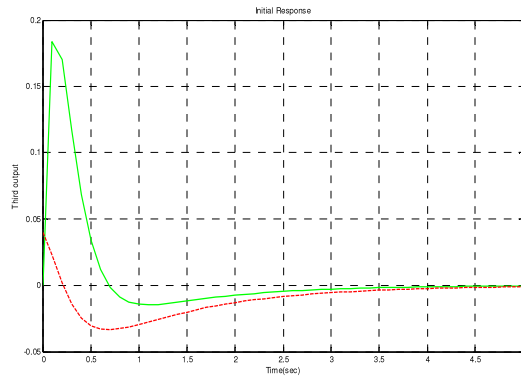
هدف، طراحی کنترل‌کننده فیدبک خروجی است به شرطی که $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ ضرایب ماتریسی رابطه (۱) به صورت $(A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}) = (A, \hat{H}, B, E_a, L, 0)$ تعریف می‌گردند. کلیه محاسبات توسط Matlab و Se Dumi 1.1 [۹] و YALMIP [۹] انجام گرفته است. همچنین مجموعه مقادیر ویژه مطلوب به صورت زیر انتخاب می‌شوند.

$$\Gamma = \{-1, -5, -10\} \quad (38)$$

نمودارهای دیگر مربوط به سیستم نامی با کنترل کننده فیدبک خروجی K می باشند.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله ترکیب مسأله جایابی ساختار ویژه با محدودیت H_∞ در نظر گرفته شده است. بر طبق مشخصات تعمیم یافته نامساوی ماتریسی خطی و روش پارامتری جایابی ساختار ویژه با استفاده از فیدبک خروجی، روشی ارائه گردید تا بتوان کنترل کننده فیدبک خروجی را به نحوی تعیین نمود که محدودیت H_∞ برآورده شود. با توجه به محدودیتهای موجود در استفاده از فیدبک خروجی استاتیکی روش طراحی کنترل کننده دینامیکی نیز تشریح شد. همچنین مثالی برای نشان دادن کارایی این روش ارائه گردید.



شکل (۳): پاسخ اولیه خروجی سوم

Fig. 3: Initial third output response

در شکل‌های (۱-۳) نمودارهایی که با خطچین رسم شده‌اند نشان‌دهنده سیستم با نامعینی و کنترل کننده فیدبک خروجی K می باشد و

مراجع

- [1] A. Esna Ashari, A. Khaki Sedigh, M.J. Yazdanpanah, "Output feedback reconfigurable controller design using eigenstructure assignment: Post fault order change", ICCA, Budapest, Hungary, pp.474-479, 2005.
- [2] G.R. Duan, "Parametric eigenstructure assignment via output feedback based on singular value decompositions", IEE Proc-Cont. Theo. Appl., Vol.150, No.1, pp.93-100, 2003.
- [3] L. He, Y.M. Fu, G.R. Duan, "Multiobjective control synthesis based on parametric eigenstructure assignment", Inte. Conf. on Cont., Automation, Robotics and Vision Kungming China, pp.1838-1841, 2004.
- [4] T. Shimomura, M. Takahashi, T. Fujii, "Extended state-space control design with parameter-dependent lyapunov functions", Proc. of the 40th IEEE Conf. on Deci. and Cont. Orlando, Florida USA, pp.2157-2162, 2001.
- [5] P. Apkarian, H.D. Tuan, J. Bernussou, "Continuous-time analysis, eigenstructure assignement and H_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations", IEEE Trans. Auto. Cont., Vol.46, No.12, 2001
- [6] M.A. Manness, D.J.M. Smiths, "Aspects of multivariable flight control law design for helicopters using eigenstructure assignment", J. Amer Helicopter Soc., pp.18-22, 1992.
- [7] K.M. Sobel, J.A. Cloutier, "Eigenstructure assignment for the extended medium range air-to-air missile", J. Of Guid. Cont. and Dyna., Vol.15, pp.529-531, 1992.
- [8] G.P. Liu, G.R. Duan, R.J. Patton, "Mixed time and frequency-domain robust eigenstructure assignment", Inte. J. of Sys. Sci., Vol.31, No.1, pp.63-71, 2000.
- [9] J. Löfberg, "A toolbox for modeling and optimization in Matlab", Proc. of the CACSD Conf., Taipei, Taiwan. Available from <http://control.ee.ethz.ch/~jolef/yalmip.php>.
- [10] A. Satoh, K. Sugimoto, "Partial eigenstructure assignment approach for robust flight control", AIAA J. of Guid., Cont. and Dyn., Vol.27, pp.145-150, 2004.
- [11] A.P. Valadbeygi, "Reconfigurable controller design using eigenstructure assignment and robust control", Msc Thesis, Elec. Engi. Depa., Islamic Azad University Najafabad Branch., 2011.