

## **Dynamical Analysis and Finite-Time Fast Synchronization of a Novel Autonomous Hyper-Chaotic System**

**Javad Mostafae<sup>1</sup>, PhD Candidate, Saleh Mobayen<sup>2</sup>, Associate Professor, Behrouz Vaseghi<sup>3</sup>, Assistant Professor, Mohammad Vahedi<sup>1</sup>, Assistant Professor**

<sup>1</sup>Department of Electrical Engineering- Saveh Branch, Islamic Azad University, Saveh, Iran.

<sup>2</sup>Department of Electrical Engineering- University of Zanjan, Zanjan, Iran.

<sup>3</sup>Department of Electrical Engineering- Abhar Branch, Islamic Azad University, Abhar, Iran.

[javadmostafae1982@gmail.com](mailto:javadmostafae1982@gmail.com), [vahedi@iau-saveh.ac.ir](mailto:vahedi@iau-saveh.ac.ir), [mobayen@znu.ac.ir](mailto:mobayen@znu.ac.ir), [behrouz.vaseghi@gmail.com](mailto:behrouz.vaseghi@gmail.com)

### **Abstract**

This paper constructs a new complex hyper-chaotic system with attractive coexisting dynamic behaviors. We analyze the hyper-chaotic attractors, equilibrium points, Poincaré maps, Kaplan-York dimension, and Lyapunov exponent behaviors. The characteristics of hyper-chaotic systems include higher complexity, higher parametric resistance and sensitivity to very small changes in initial conditions. We prove that the introduced hyper-chaotic system is much more complex than the similar hyper-chaotic systems, that can suitable for use in encryption and secure communication. Next, the work describes a fast terminal sliding mode controller scheme for the fast synchronization and stability of the new complex hyper-chaotic system. It is shown that by applying uncertainty to the system, both steps of the sliding mode control have finite-time convergence properties. Next, a comparison will be made between a newly designed controller and a similar. Finally, using the MATLAB simulation, the results are confirmed for the new system. The results shown that the new hyper-chaotic system with many adsorbents is much more complex than similar systems, and the proposed controller has a faster convergence response than the similar controller.

**Keywords:** chaotic analysis, fast terminal sliding mode control, finite-time synchronization, new hyper-chaotic system

**Received:** 3 February 2021

**Revised:** 20 March 2021

**Accepted:** 25 March 2021

**Corresponding Author:** Dr. Saleh Mobayen

## تجزیه و تحلیل دینامیکی و همزمان سازی زمان محدود سریع با استفاده از سیستم فوق آشوبی جدید خودگردان

جواد مصطفایی<sup>۱</sup>، دانشجوی دکتری، صالح مبین<sup>۲</sup>، دانشیار، بهروز واثقی<sup>۳</sup>، استادیار، محمد واحدی<sup>۱</sup>، استادیار

۱- دانشکده مهندسی برق- واحد ساوه، دانشگاه آزاد اسلامی، ساوه، ایران

۲- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

۳- دانشکده مهندسی برق- واحد ابهر، دانشگاه آزاد اسلامی، ابهر، ایران

javadmstafaee1982@gmail.com, vahedi@iau-saveh.ac.ir, mobayen@znu.ac.ir, behrouz.vaseghi@gmail.com

**چکیده:** در این مقاله یک سیستم فوق آشوبی جدید پیچیده با رفتارهای جذاب معرفی خواهیم نمود. ما تجزیه و تحلیل‌های استاندارد سیستم‌های فوق آشوبی از جمله نمودار دوشاخگی، نقاط تعادل، نقشه پوانکاره، بعد کاپلان-یورک و نماهای لیاپانوف را انجام خواهیم داد. از خصوصیات سیستم‌های فوق آشوبی می‌توان به پیچیدگی بالاتر، مقاومت پارامتری بیشتر و حساسیت به تغییرات بسیار کوچک در شرایط اولیه اشاره کرد. در ادامه ثابت خواهیم نمود که سیستم معرفی شده بسیار پیچیده‌تر از سیستم‌های فوق آشوبی مشابه است که می‌تواند برای استفاده در رمزگذاری و پنهان‌سازی داده‌ها بسیار ارزشمند باشد. در مرحله بعدی، یک کنترل‌کننده مودلغزشی سریع برای همزمان‌سازی زمان محدود سیستم فوق آشوبی معرفی خواهیم نمود و پایداری کنترل‌کننده جدید را ثابت خواهیم کرد. نشان خواهیم داد با اعمال اغتشاش و نامعینی به سیستم، هر دو مرحله کنترل مودلغزشی دارای ویژگی‌های همگرایی زمان محدود هستند. سرانجام، مقایسه‌ای بین کنترل‌کننده جدید طراحی شده با کنترل‌کننده مشابه از لحاظ زمان همگرایی انجام خواهد شد. در پایان، نتایج با استفاده از نرم‌افزار متلب شبیه‌سازی و اثبات شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد سیستم فوق آشوبی جدید با جاذب‌های فراوان بسیار پیچیده‌تر از سیستم‌های مشابه بوده و کنترل‌کننده پیشنهادی نیز پاسخ همگرایی سریع‌تری را نسبت به کنترل‌کننده مشابه، دارا است.

**کلمات کلیدی:** تجزیه و تحلیل آشوبی، سیستم فوق آشوبی جدید، کنترل مودلغزشی سریع، همزمان‌سازی زمان محدود

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۱۴

تاریخ بازنگری مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۲۹

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱/۵

نویسنده مسئول: دکتر صالح مبین

نشانی نویسنده مسئول: زنجان- بلوار دانشگاه- دانشگاه زنجان- دانشکده مهندسی- گروه برق

## ۱- مقدمه

در دنیای امروز فناوری‌های ارتباطی از نیازهای اساسی انسان بوده و تصاویر به‌عنوان یکی از حامل‌های مهم اطلاعات هستند که نقش اساسی در حوزه‌های فناوری‌های ارتباطی دارند. یکی از مشکلاتی که در این حوزه وجود دارد، امنیت در شبکه‌های انتقال اطلاعات است. در حال حاضر انتقال اطلاعات در بسیاری از کاربردها به‌صورت معمول و از طریق اینترنت انجام می‌شود که می‌تواند امنیت انتقال اطلاعات را به خطر اندازد. انتقال اطلاعات در شبکه‌های معمول از جمله اینترنت خطراتی از جمله دسترسی آسان به اطلاعات را به همراه خواهد داشت که می‌تواند امنیت اطلاعات را به خطر بیندازد [۱،۲]. یکی از راه‌های افزایش امنیت در انتقال اطلاعات، رمزنگاری اطلاعات و تصاویر با استفاده از توابع آشوبی است [۳]. سیستم‌های آشوبی دارای تعدادی خصوصیات ذاتی از جمله پیچیدگی و نوسانات بالا، عدم قطعیت پارامتری و حساسیت شدید به تغییرات بسیار کوچک در شرایط اولیه هستند [۴]. با توجه به غیرقابل پیش‌بینی بودن رفتار سیستم‌های آشوبی، از این ویژگی بسیار مهم می‌توان در بسیاری از زمینه‌ها مانند رمزنگاری [۵]، رباتیک [۶]، شبکه‌های بیولوژیکی [۷]، ارتباطات امن [۸]، پردازش اطلاعات [۹]، علوم پزشکی [۱۰]، هوافضا [۱۱]، فیزیک [۱۲] و سایر حوزه‌ها استفاده نمود. در سال‌های اخیر سیستم‌های آشوبی زیادی معرفی شده‌اند که این سیستم‌ها به دلیل وجود تنها یک نمای لیاپانوف مثبت<sup>۱</sup> در مقایسه با سیستم‌های فوق آشوبی با دو یا بیشتر نمای لیاپانوف، از امنیت کمتری برخوردار هستند [۱۳،۱۴]. طبق تحقیقات انجام شده در این زمینه، محققان دریافته‌اند که هرچه سیستم پیچیده‌تر و دارای ابعاد بزرگ‌تری باشد، امنیت آن در انتقال اطلاعات امن آشوبی نیز بیشتر خواهد بود [۱۵]. دو دلیل برای این موضوع مطرح شده است که اولاً سیستم با ابعاد کم، پهنای باند کمتری دارد و با فیلتر می‌توان اطلاعات رمزنگاری شده را بازیابی نمود و ثانیاً هر چه سیستم مرتبه بالاتر باشد دینامیک آن غیرخطی‌تر و پیچیده‌تر خواهد بود. اولین سیستم فوق آشوبی در سال ۱۹۷۹ توسط راسلر با دو نمای لیاپانوف مثبت، معرفی شد [۱۶]. طراحی سیستم‌های آشوبی و فوق آشوبی همراه با تجزیه و تحلیل خصوصیات ذاتی آن‌ها و تجزیه و تحلیل پایداری این سیستم‌ها از جمله مطالعاتی است که در سال‌های اخیر در این زمینه انجام شده است. به‌طور مثال در مرجع [۱۷]، یک سیستم فوق آشوبی ۴ بعدی با نوسانات بالا معرفی شده و در ادامه جذابیت‌های سیستم با توجه به تغییر در نقاط تعادل، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. ثابت شده که هرچه سیستم نسبت به تغییر در شرایط اولیه حساسیت بیشتری نشان دهد، نوسانی‌تر خواهد بود. در مرجع [۱۸]، یک سیستم فوق آشوبی به‌منظور همزمان‌سازی و انتقال اطلاعات امن طراحی شده است. نماهای لیاپانوف سیستم با تغییر پارامترها ارزیابی شده و همگرایی نمایی سیستم با استفاده از نماهای لیاپانوف نشان داده شده است. ثابت شده هر چه سیستم فوق آشوبی دارای تعداد نماهای لیاپانوف مثبت بیشتر باشد، فوق آشوبی‌تر خواهد بود. در مرجع [۱۹]، با گسترش سیستم لورنز یک سیستم فوق آشوبی جذاب طراحی شده و تمام جاذب‌های پنهان سیستم مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و حالت‌های مختلف برای نمودار دوشاخگی<sup>۲</sup> و طیف لیاپانوف<sup>۳</sup> رسم شده است. یکی از ویژگی‌های این سیستم جدید، همزیستی جاذب‌های آن است.

در سال‌های اخیر سیستم‌های فوق آشوبی زیادی با استفاده از توابع مختلف از جمله توابع نمایی، تابع علامت، توابع مثلثاتی و توابع هذلولی ساخته شده‌اند [۲۰-۲۲]. ویژگی‌های مشترک همه این سیستم‌ها در مقایسه با سیستم‌های فوق آشوبی معمولی، نوسان بیشتر آن‌ها و حساسیت آن‌ها به شرایط اولیه است. رمزگشایی برای گیرنده غیرمجاز بدون دانستن شرایط اولیه و پارامترهای سیستم کار سخت و دشواری است. یکی از راه‌های افزایش امنیت در ارتباطات آشوبی، استفاده از سیستم‌های فوق آشوبی پیچیده است. بنابراین، هرچه ساختار سیستم پیچیده‌تر و تعداد پارامترهای آن بیشتر باشد، رمزگشایی آن دشوارتر خواهد بود. بر این اساس در این مقاله یک سیستم فوق آشوبی بسیار پیچیده برای افزایش امنیت در شبکه‌های انتقال اطلاعات استفاده خواهیم نمود.

در یک سیستم ارتباطی امن آشوبی، برای اطمینان از انتقال امن اطلاعات، باید از سیستم‌های مشابهی در گیرنده و فرستنده ایجاد شده و برای داشتن یک انتقال کامل و موفق، سیستم‌های آشوبی گیرنده و فرستنده باید همزمان شوند. همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبی و فوق آشوبی یکی از رویکردهای کنترل است که سال‌هاست مورد توجه محققان قرار گرفته است. برای این منظور از یک تکنیک کنترل مناسب برای انتقال سیستم‌های گیرنده و فرستنده استفاده می‌شود. در سال‌های اخیر، از روش‌ها

و کنترل‌کننده‌های مختلفی برای همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبی استفاده شده است از جمله کنترل فیدبک خروجی<sup>۴</sup> [۲۳]، کنترل تطبیقی<sup>۵</sup> [۲۴]، کنترل غیرفعال<sup>۶</sup> [۲۵]، کنترل بهینه<sup>۷</sup> [۲۶]، کنترل متناسب-انتگرال-گیر-مشترک‌گیر<sup>۸</sup> (PID) [۲۷]، کنترل برگشتی تطبیقی<sup>۹</sup> [۲۸]، کنترل خطی<sup>۱۰</sup> [۲۹]، شبکه عصبی<sup>۱۱</sup> [۳۰]، کنترل پیش‌بین<sup>۱۲</sup> [۳۱]، کنترل اتفاقی<sup>۱۳</sup> [۳۲]، کنترل بازگشت به عقب<sup>۱۴</sup> [۳۳]، کنترل مودلغزشی<sup>۱۵</sup> [۳۴] و کنترل مودلغزشی ترمینال<sup>۱۶</sup> [۳۵].

از آنجاکه زمان نقش اساسی در انتقال اطلاعات دارد، اطمینان از انتقال اطلاعات در سریع‌ترین زمان ممکن بسیار مهم است. در میان روش‌های موجود، کنترل مودلغزشی دارای ویژگی‌های خاصی از جمله مقاومت در برابر عدم قطعیت پارامتری، طراحی ساده، پاسخ‌گذاری مناسب، کاهش حساسیت به نامعینی‌های محدود و سادگی اجرا است [۳۶]. اگرچه این کنترل‌کننده بسیار محبوب و کارآمد است، اما این روش یک اشکال اساسی به نام پدیده وزوز<sup>۱۷</sup> دارد. پدیده وزوز در عمل، یک پدیده بسیار نامطلوب است زیرا می‌تواند باعث افزایش مصرف انرژی، استهلاک مکانیکی در سیستم‌ها و محرک‌ها شده و عملکرد کنترل‌کننده را با اختلال مواجه نماید. تحقیقات زیادی برای حل مشکلات کنترل‌کننده مودلغزشی انجام شده است، در مرجع [۳۷] برای از بین بردن پدیده وزوز و دستیابی به عملکرد بالا در حضور اغتشاشات و نامعینی‌ها، یک کنترل جدید با ترکیب کنترل‌کننده PID و کنترل‌کننده مودلغزشی معرفی شده است. در مرجع [۳۸]، از یک کنترل‌کننده مودلغزشی قوی و بدون چترینگ برای کنترل و ردیابی یک وسیله نقلیه از راه دور با سه درجه آزادی با حضور عدم قطعیت در سیستم استفاده شده است. کنترل‌کننده جدید توانسته در حضور عدم قطعیت و نامعینی، ضمن حفظ پایداری و ردیابی دقیق، وزوز را تا حد امکان کاهش دهد.

در سال‌های اخیر کنترل‌کننده‌های قدرتمند جدیدی با توانایی محدود کردن زمان و از بین بردن اثرات مخرب بر روی سیستم‌ها و محرک‌ها به نام کنترل مودلغزشی ترمینال معرفی شده‌اند. در مقایسه با کنترل‌کننده مودلغزشی معمولی، این کنترل‌کننده یک ترم غیرخطی در عملکرد سطح لغزش برای بهبود و اطمینان از همگرایی حالت‌های سیستم به یک مسیر مشخص در زمان محدود ارائه می‌دهد. از جمله مزایای این کنترل‌کننده می‌توان به پاسخ دینامیکی سریع، همگرایی زمان محدود و دقت ردیابی بالا اشاره کرد [۳۹]. بر این اساس، در این مقاله از یک کنترل‌کننده مودلغزشی ترمینال به منظور همزمان‌سازی و انتقال اطلاعات در سریع‌ترین زمان استفاده خواهیم نمود. نوآوری‌های این مقاله شامل موارد زیر هستند:

- طراحی و ساخت یک سیستم فوق آشوبی ۴ بعدی جدید پیچیده به منظور افزایش امنیت در انتقال اطلاعات.
- ساخت یک کنترل‌کننده جدید مودلغزشی ترمینال و اثبات پایداری کنترل‌کننده با استفاده از تابع لیاپانوف.
- تکنیک همزمان‌سازی آشوبی با وارد کردن عدم قطعیت در سیستم برای انتقال اطلاعات امن در سریع‌ترین زمان ممکن.
- سایر بخش‌های این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲ مدل دینامیکی سیستم فوق آشوبی پیچیده و مزایا و ویژگی‌های آن را ارائه خواهیم داد. در بخش ۳ خصوصیات اساسی و رفتارهای پویا سیستم فوق آشوبی مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهند گرفت. بخش ۴ مسئله همزمان‌سازی زمان محدود سیستم فوق آشوبی فرموله شده و کنترل‌کننده مودلغزشی ترمینال برای همزمان‌سازی زمان محدود طراحی و اثبات خواهد شد. در بخش ۵، مسائل مربوط به همزمان‌سازی و مقایسه کنترل‌کننده و شبیه‌سازی‌های عددی برای تأیید روش‌ها انجام خواهد شد. سرانجام، در بخش ۶ نتیجه‌گیری از بخش‌های قبلی را ارائه خواهیم داد.

## ۲- مدل سیستم فوق آشوبی ۴ بعدی جدید پیچیده

مدل دینامیکی سیستم فوق آشوبی جدید طراحی شده به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} dx_1(\tau)/d\tau &= a_1(x_2 - x_1) - a_2x_4 - a_3x_3^2 - a_4x_2x_3 + a_4f_1(x_{1,2,3,4}) \\ dx_2(\tau)/d\tau &= a_5x_2 + a_6x_4 - a_1x_1^2 - a_7x_2x_3 - a_8x_1x_2 - x_1x_2x_3 - a_9f_2(x_3) \\ dx_3(\tau)/d\tau &= -a_2x_3 + a_{10}x_1^2 + x_1x_2x_3 - a_1f_3(x_{1,2,4}) \\ dx_4(\tau)/d\tau &= -a_{11}x_1 + a_9x_3 + a_7x_1x_2x_3 + a_8x_1x_2 + a_{10}x_2x_3x_4 + a_{12}x_1x_3x_4 + a_{12}f_4(x_{1,2,3,4}) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_{1,2,3,4}) &= \tanh(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\
 f_2(x_3) &= e^{x_3} \\
 f_3(x_{1,2,4}) &= e^{(x_1+x_2+x_4)} \\
 f_4(x_{1,2,3,4}) &= e^{(x_1+x_2+x_3+x_4)}
 \end{aligned} \tag{۲}$$

و  $x_i$  برای  $i$  برابر ۱ الی ۴ حالت‌های سیستم و  $a_i$  برای  $i$  برابر ۱ الی ۱۲ پارامترهای مثبت سیستم (۱) هستند و برابرند با:

$$a_1 = 15.5, a_2 = 3.85, a_3 = 16.9, a_4 = 8.2, a_5 = 0.255, a_6 = 23.45, \tag{۳}$$

$$a_7 = 10.629, a_8 = 3.85, a_9 = 7.799, a_{10} = 5.5, a_{11} = 13.2, a_{12} = 19.5,$$

و شرایط اولیه سیستم برابر است با:

$$x_1(\tau_0) = -4.23, x_2(\tau_0) = -73.75, x_3(\tau_0) = 1.57, x_4(\tau_0) = 2.64 \tag{۴}$$

سیستم (۱) با شرایط و معادلات بیان شده رفتار فوق آشوبی خواهد داشت. یکی از الزامات سیستم‌های فوق آشوبی این است که باید حداقل چهار بعد و یک اصطلاح غیرخطی داشته باشند تا بتوانند رفتار فوق آشوبی داشته باشند و افزایش این پارامترها سیستم را پیچیده تر می‌کند [۳۹]. جدول (۱) توپولوژی سیستم فوق آشوبی طراحی شده را در مقایسه با سیستم‌های مشابه ارائه می‌دهد.

Table (1): The topology of a designed hyper-chaotic system compared to similar systems  
 جدول (۱): توپولوژی سیستم فوق آشوبی طراحی شده در مقایسه با سیستم‌های مشابه

مرجع	تعداد توابع خاص	تعداد پارامترهای غیرخطی	تعداد کل پارامترها	تعداد کل ترم‌ها	نوع سیستم
[۴۰]، ۲۰۱۹	۱	۳	۵	۸	سیستم فوق آشوبی ممرستيو جديد
[۴۱]، ۲۰۱۸	۲	۵	۴	۱۰	سیستم چندوجهی فوق آشوبی جديد
[۴۲]، ۲۰۱۹	۳	۳	۲	۱۲	سیستم فوق آشوبی ممرستيو جديد
[۴۳]، ۲۰۱۲	۲	۴	۲	۹	سیستم فوق آشوبی جديد
[۴۴]، ۲۰۱۹	۱	۱	۶	۸	سیستم فوق سریع جديد
[۴۵]، ۲۰۱۹	۲	۲	۷	۱۰	سیستم فوق سریع ممرستيو جديد
[۴۶]، ۲۰۱۶	۳	۳	۴	۹	سیستم فوق آشوبی جديد
[۴۷]، ۲۰۱۹	۹	۹	۳	۱۳	سیستم فوق آشوبی جديد
[۴۸]، ۲۰۱۹	۱	۱	۴	۹	سیستم فوق آشوبی خودگردان جديد
سیستم (۱)	۷	۱۶	۱۲	۲۴	سیستم فوق آشوبی جديد پیچیده

همان‌طور که مشخص است، سیستم فوق آشوبی جدید نسبت به سایر سیستم‌های مشابه تعداد معادلات، توابع غیرخطی و توابع خاص بیشتری دارد. منظور از توابع خاص توابع مثلثاتی، توابع هذلولی<sup>۱۸</sup> و تابع نمایی<sup>۱۹</sup> است.

### ۳- خصوصیات اساسی و رفتارهای پویا سیستم فوق آشوبی

در این بخش خصوصیات طبیعی سیستم فوق آشوبی جدید مانند جاذب‌های آشوبی<sup>۲۰</sup>، طیف فرکانس<sup>۲۱</sup>، نقاط تعادل<sup>۲۲</sup>، نماهای لیاپانوف، بعد کاپلن-پورک<sup>۲۳</sup>، مقادیر ویژه<sup>۲۴</sup>، نقشه پوانکاره و نمودار دوشاخگی ارائه می‌شود.

#### ۳-۱- تجزیه و تحلیل نقاط تعادل و مقادیر ویژه

یکی از پارامترهای مهم در مطالعه سیستم‌های دینامیکی، نقاط تعادل سیستم است. تجزیه و تحلیل این نقاط برای انتخاب شرایط اولیه سیستم فوق آشوبی، ضروری است [۴۹]. با تنظیم معادلات دیفرانسیل (۱) به صفر خواهیم داشت:

$$Q^* = [-0.7102, -19.1191, 5.2011, 21.0658] \tag{۵}$$

هنگامی که مقادیر پارامتر به صورت (۳) در نظر گرفته شوند، ماتریس خطی سازی سیستم در نقطه تعادل (۵) برابر است با:

$$J = \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \Big|_{Q^*} = \begin{pmatrix} -7 & -19 & -11 & 4 \\ 195 & -49 & -1226 & 4 \\ -138 & -34 & 13 & 23 \\ 13178 & 12746 & 9831 & 11567 \end{pmatrix} \quad (6)$$

مطابق با معادله (۶)، مقادیر ویژه سیستم به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} [\Delta(s) &= s^4 + A_1s^3 + A_2s^2 + A_3s + A_4] \\ A_1 &= (a_1 + a_2 - a_5 - a_{12}) \\ A_2 &= (-a_6a_{12} - a_1a_5 + a_1a_2 - a_2a_5 - a_1a_{12} + a_5a_{12} - a_2a_{12} + a_2a_5a_{12}) \\ A_3 &= (-a_1a_6a_{12} - a_2a_6a_{12} - a_1a_2a_5 + a_1a_5a_{12} - a_1a_2a_{12}) \\ A_4 &= (a_1a_2a_6a_{12} + a_1a_2a_5a_{12} - a_1a_2a_9a_{11} + a_1a_2a_9a_{12} - a_1^2a_9a_{11} + a_1^2a_9a_{12}) \end{aligned} \quad (7)$$

بنابراین مقادیر ویژه سیستم برابرند با:

$$s_1 = -149, s_2 = 11558, s_{3,4} = 56 \pm j120 \quad (8)$$

بنابراین نقطه تعادل (۵) یک نقطه تعادل زینی ناپایدار است. جدول (۲) شرایط پایداری سیستم را به ازای تغییرات در پارامتر  $a_4$  را نشان می‌دهد.

Table (2): Investigating the stability of equilibrium points of the hyper-chaotic system with changes in the fourth parameter

جدول (۲): بررسی پایداری نقاط تعادل سیستم فوق آشوبی با تغییرات پارامتر چهارم

پارامتر $a_4$	مقادیر ویژه	نقاط تعادل	پایداری
۱۵/۶	(-۸۸ -۵۴ ۱-ج۲۴ ۱+ج۲۴)	(-۰/۶۱۷۵ -۵/۲۱۴۲ ۳/۰۸۲۵ ۶/۸۵۰۷)	ناپایدار
۱۵/۷	(۸۳۶ -۶۵ ۳-ج۳۶ ۳+ج۳۶)	(-۱/۴۹ -۴/۹۱۲ ۳/۴۷۹۴ ۶/۸۵۰۷)	ناپایدار
۱۵/۹	(-۸۵ -۵۰ -ج۲۳ ج۲۳)	(-۰/۶۳۳۶ -۵/۰۲۵۵ ۳/۰۳۳۴ ۱/۲۵۱۹)	طبیعی
۱۵/۹۵	(۷۹۰ -۸۵ ۱-ج۳۲ ۱+ج۳۲)	(-۱/۵۳۹۷ -۴/۶۹۷۴ ۳/۴۱۴۴ ۶/۶۹۸۵)	ناپایدار
۱۶/۱	(-۸۳ -۴۷ -ج۲۳ ج۲۳)	(-۰/۶۴۴۶ -۴/۹۰۱۸ ۳/۰۰۰۳ ۱/۲۶۷)	طبیعی
۱۶/۴	(۷۲۲ -۴۷ -ج۲۳ ج۲۳)	(-۱/۶۵۹۷ -۴/۲۹۶۵ ۳/۲۷۷۷۷ ۶/۴۶۹۸)	ناپایدار
۱۶/۴۵	(-۷۹ -۴۲ -۱-ج۱۶ -۱+ج۱۶)	(-۰/۶۶۷۵ -۴/۶۵۷۲ ۲/۹۴۱۲ ۱/۲۹۴۳)	پایدار
۱۶/۵	(-۷۹ -۴۱ -ج۲۰ ج۲۰)	(-۰/۶۶۷۵ -۴/۶۵۷۲ ۲/۹۳۲۶ -۱/۲۹۸۳)	طبیعی
۱۶/۶	(۷۰۰ -۴۰ -۱-ج۱۹ -۱+ج۱۹)	(-۱/۷۴۹۹ -۴/۰۸۶۸ ۳/۱۹۳۳ ۶/۴۰۵۷)	ناپایدار
۱۶/۶۵	(-۷۵ -۴۰ -۱-ج۱۹ -۱+ج۱۹)	(-۶/۷۶۵۹ -۴/۵۶۵۶ ۲/۹۰۶۴ ۱/۳۱۰۶)	پایدار

نتایج نشان می‌دهد که این سیستم با تغییرات بسیار کم در شرایط اولیه، رفتار کاملاً متفاوتی خواهد داشت. به طور مثال  $a_4$  برابر ۱۶/۶، ۱۶/۵ و ۱۶/۴۵ سیستم فوق آشوبی به ترتیب پایدار، طبیعی و ناپایدار خواهد شد.

### ۳-۲- تجزیه و تحلیل جاذب آشوبی و طیف فرکانسی

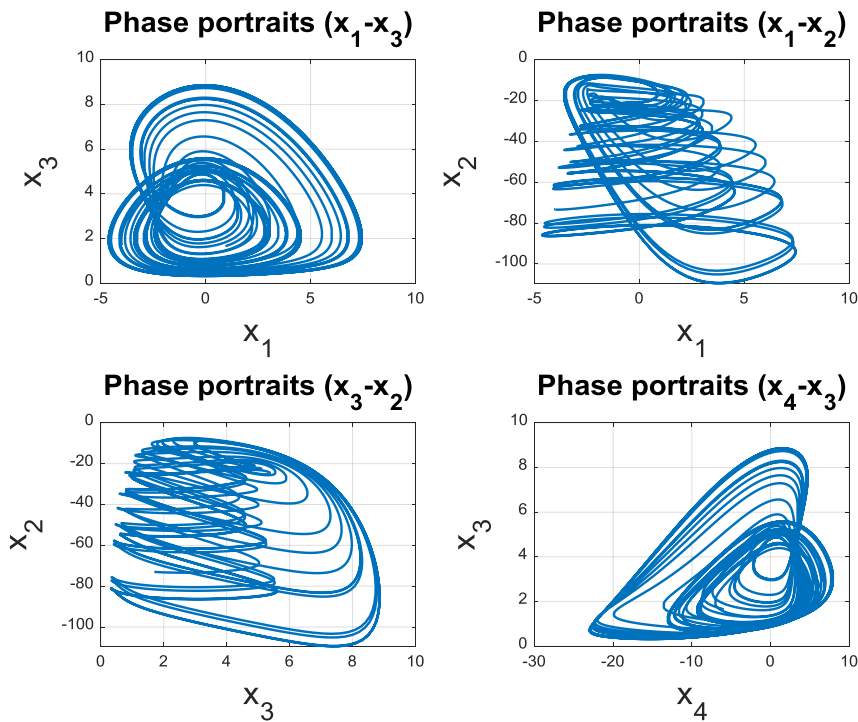
و اگرایی<sup>۲۶</sup> سیستم فوق آشوبی (۱) به صورت زیر است:

$$\nabla V = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = -a_1 + a_5 - a_9 - a_2 + a_{12} = 15.5 + 0.255 - 8 - 4 + 19.75 = 23.505 > 0 \quad (9)$$

بنابراین، سرعت همگرایی سیستم فوق آشوبی به سمت جاذبه‌های آن برابر است با:

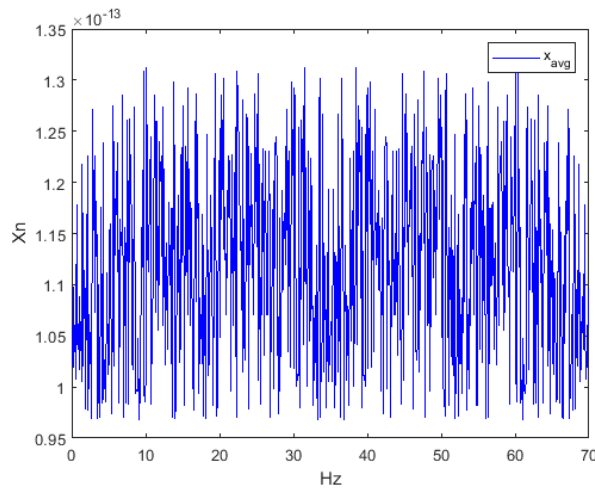
$$e^{-(a_1 + a_5 - a_9 - a_2 + a_{12})\tau} \quad (10)$$

بنابراین، هرچه زمان به سمت بی‌نهایت می‌رود، سیستم فوق آشوبی (۱) محدودتر شده و بر روی یک جاذب، مستقر می‌شود [۵۰]. در شکل (۱) نمودارهای صفحه فاز سیستم فوق آشوبی (۱) نشان داده شده است. شاخص دیگر برای تأیید رفتار آشوبی سیستم‌ها، نوسانات طیف فرکانس بالای آن‌ها است. شکل (۲) طیف فرکانسی سیستم فوق آشوبی جدید را نمایش می‌دهد. هرچه نوسانات فرکانس بالا بیشتر باشد، پیچیدگی و سرعت سیگنال نیز بیشتر خواهد بود.



شکل (۱): نمودار صفحه فاز سیستم فوق آشوبی جدید (۱)

Figure (1): Phase portraits diagram of a new hyper-chaotic system



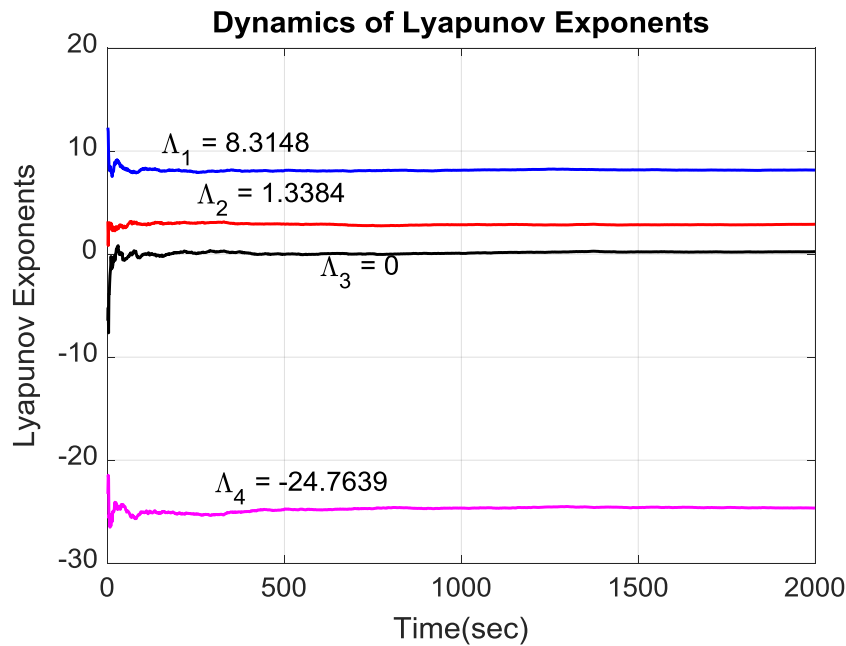
شکل (۲): طیف فرکانسی سیستم فوق آشوبی جدید (۱)

Figure (2): Frequency spectrum of the new hyper-chaotic system

### ۳-۳- بعد کاپلن-یورک و نمای لیپانوف

واگرایی و همگرایی حالت‌های یک سیستم غیرخطی، با نمایش نماهای لیپانوف آن‌ها تعیین می‌شود. در صورت مثبت بودن نماهای لیپانوف، سیستم رفتار آشوبی خواهد داشت و اگر سیستم دو یا چند نمای لیپانوف داشته باشد، فوق آشوبی خواهد بود. نماهای لیپانوف سیستم فوق آشوبی جدید با شرایط اولیه (۴) در شکل (۳) نمایش داده شده‌اند و از نظر عددی برابرند با:

$$\Lambda_1 = 8.3148, \Lambda_2 = 1.3384, \Lambda_3 = 0, \Lambda_4 = -24.7639 \quad (11)$$



شکل (۳): نماهای لیاپانوف سیستم فوق آشوبی جدید (۱)  
Figure (3): Dynamics of Lyapunov of the novel hyper-chaotic system

با توجه به مقادیر به دست آمده برای نماهای لیاپانوف، بعد کاپلن-یورک سیستم فوق آشوبی طراحی شده جدید به صورت زیر تعریف شده و به دست می‌آید [۵۱]:

$$D_{KY} = 1 + \frac{\sum_{i=1}^l \Lambda_i}{|\Lambda_{l+1}|} = 3 + \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}{|\Lambda_4|} = 3.4494 \quad (12)$$

for:  $\Lambda_{1,2} > 0, \Lambda_3 = 0, \Lambda_4 < 0$

جدول (۳) بعد کاپلن-یورک سیستم فوق آشوبی جدید را از نظر عددی، با تعدادی از سیستم‌های فوق آشوبی ۴ بعدی مشابه (دستگاه‌هایی که دارای توابع نمایی، لگاریتمی، مثلثاتی و هذلولی هستند) مقایسه می‌کند تا بهترین عملکرد سیستم را تعیین کند.

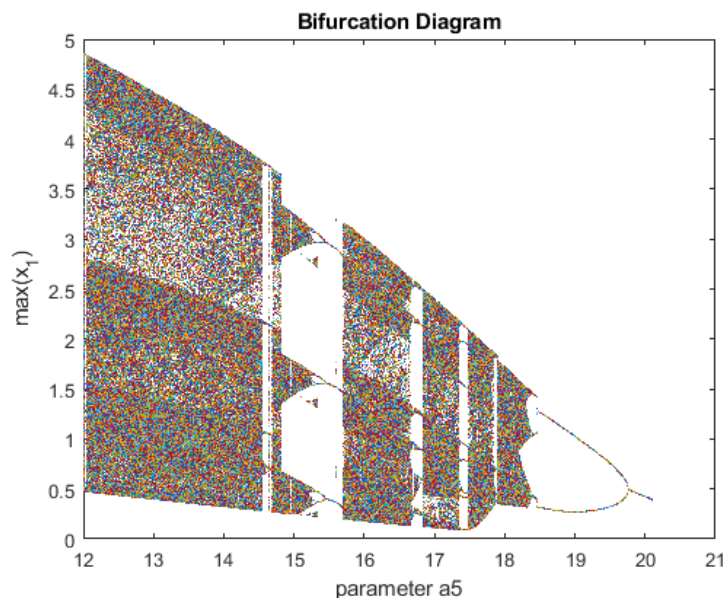
Table (3): Numerical values of the Kaplan-York dimension of the new hyper-chaotic system compared to similar systems  
جدول (۳): مقادیر عددی بعد کاپلن-یورک سیستم فوق آشوبی جدید در مقایسه با سیستم‌های فوق آشوبی مشابه

سیستم	نمای لیاپانوف اول	نمای لیاپانوف دوم	نمای لیاپانوف سوم	نمای لیاپانوف چهارم	بعد کاپلن-یورک
سیستم (۱)، [۵۱]	۱۳/۴۶۳	۳/۴۷۸	۰	-۶۱/۲۳۱	۳/۲۷۸۶
سیستم (۲)، [۵۲]	۰/۱۵۷	۰	-۰/۲۴۵	-۰/۹۱۳	۲/۶۴۰۸
سیستم (۳)، [۵۳]	۰/۰۶۴	۰/۰۳۳	۰	-۱/۲۵	۳/۰۸۹
سیستم (۴)، [۵۴]	۰/۱۵۱۵	۰/۰۱۱۲	۰	۰/۶۶۲۳	۳/۰۹۷۹
سیستم (۵)، [۵۵]	۰/۱۳۲	۰/۰۳۵	۰	-۱/۲۵	۳/۱۳
سیستم (۶)، [۵۲]	۰/۱۵۵۵	۰/۰۳۳۰	۰	-۰/۶۱۰۰	۳/۱۱۷۱
سیستم (۷)، [۵۶]	۰/۱۹۰۶	۰/۰۴۵۰	۰/۰۰۰۲	-۰/۵۲۴۸	۳/۱۵۴۵
سیستم (۸)، [۵۷]	۱۳/۶۷۸۳۷	۰/۰۴۰۵۸	۰	-۴۵/۶۴۶۶	۳/۳۰۰۵۵
سیستم (۹)، [۵۸]	۰/۱۴۸۵	۰/۰۳۹۲	۰	-۱/۳۳۸	۳/۱۴۰۲
مقاله حاضر	۸/۳۱۴۸	۱/۳۳۸۴	۰	-۲۴/۷۶۳۹	۳/۴۴۹۴

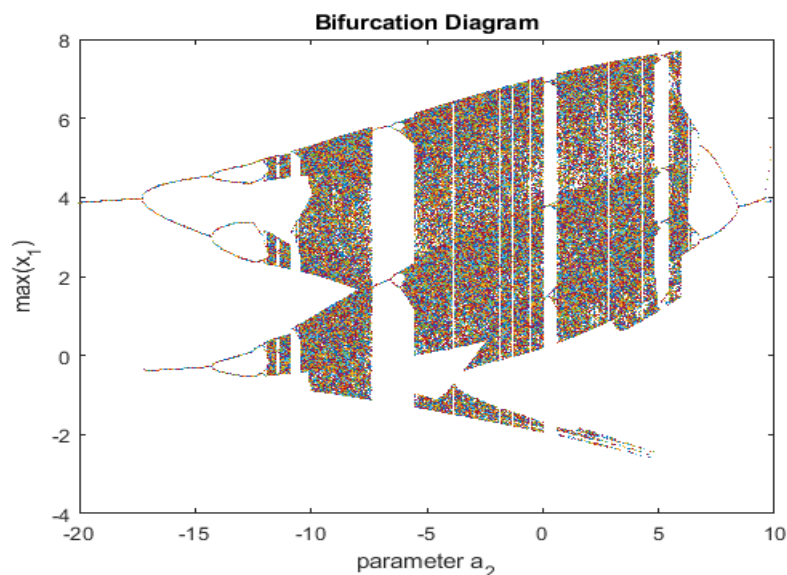


### ۳-۴- نمودارهای دوشاخگی

برای بررسی وابستگی پارامترهای سیستم فوق آشوبی جدید، از ترسیم و تحلیل نمودارهای دوشاخگی استفاده می‌شود. نمودارهای دوشاخگی سیستم فوق آشوبی ۴ بعدی جدید در شکل (۴) و (۵) نمایش داده شده‌اند. این سیستم با دو برابر شدن دوره معمول، وارد نوسانات آشوبی می‌شود. نمودارهای دوشاخگی، رفتار سیستم را با توجه به تغییر در پارامترهای سیستم نشان می‌دهند و رفتارهای جاذب سیستم را توضیح می‌دهند [۵۹].



شکل (۴): نمودار دوشاخگی سیستم فوق آشوبی جدید (۱) در  $(a_5, x_1)$ ,  $a_5 \in (12, 21)$   
Figure (4): Bifurcation diagrams of the new system in  $(a_5, x_1)$ ,  $a_5 \in (12, 21)$



شکل (۵): نمودار دوشاخگی سیستم فوق آشوبی جدید (۱) در  $(a_5, x_1)$ ,  $a_5 \in (-20, 10)$   
Figure (5): Bifurcation diagrams of the new system in  $(a_5, x_1)$ ,  $a_5 \in (-20, 10)$

وقتی پارامتر  $a_2$  در این محدوده باشد [شکل (۵) را ببینید]، سیستم رفتارهای پیچیده‌ای مانند فوق آشوبی، آشوبی، دوره‌ای<sup>۲۷</sup> و شبه دوره‌ای<sup>۲۸</sup> خواهد داشت. این تغییرات رفتاری، متناسب با تغییرات نماهای لیاپانوف در شکل (۶) نشان داده شده است. رفتارهای دینامیکی سیستم (۱) با تغییر در پارامتر دوم، شامل موارد زیر است:

(۱) هنگامی که  $a_2 \in (-2, 5]$ ، نماهای لیاپانوف سیستم (۱) در  $a_2$  برابر ۴ عبارتند از:  $۸/۱۱۰۵$ ،  $۱/۸۹۲۳$ ،  $۰$  و  $-۲۷/۴۲۴۹$ ۔ در این حالت، سیستم (۱) رفتار فوق آشوبی داشته و نمودارهای یک‌بعدی و سه‌بعدی سیستم در شکل (۶) نشان داده شده‌اند.

(۲) هنگامی که  $a_2 \in (-5, -2]$ ، نماهای لیاپانوف سیستم (۱) در  $a_2$  برابر ۴ عبارتند از:  $۴/۳۱۱۷$ ،  $۰$ ،  $-۸/۸۰۱$  و  $-۹/۰۶$ ۔ در این حالت، سیستم (۱) رفتار آشوبی داشته و نمودارهای یک‌بعدی و سه‌بعدی سیستم در شکل (۶) نشان داده شده‌اند.

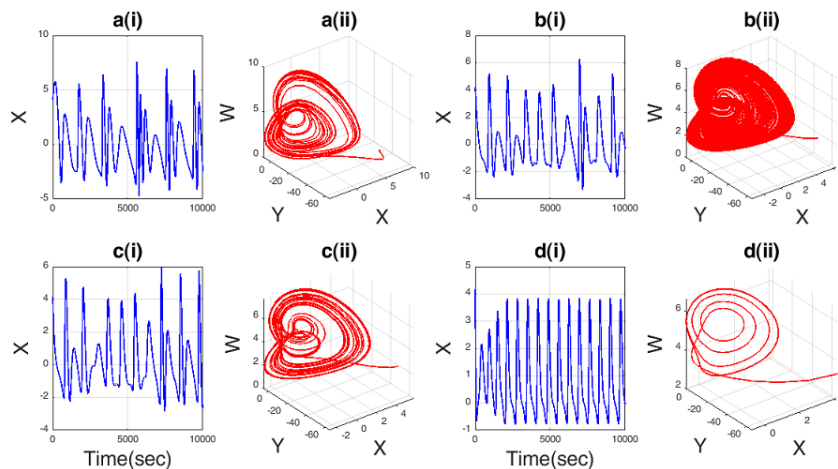
(۳) هنگامی که  $a_2 \in (-10, -5]$ ، نماهای لیاپانوف سیستم (۱) در  $a_2$  برابر  $-۶/۵$  عبارتند از:  $۳/۰۱۰۵$ ،  $۰$ ،  $-۶/۲۶$  و  $-۷/۰۳۸۷$ ۔ در این حالت، سیستم (۱) رفتار آشوبی داشته و نمودارهای یک‌بعدی و سه‌بعدی سیستم در شکل (۶) نشان داده شده‌اند.

(۴) هنگامی که  $a_2 \in (-16, -10]$  و  $a_2 \in (-22, -17]$  نماهای لیاپانوف سیستم (۱) در  $a_2$  برابر  $-۱۵/۵$  عبارتند از:  $-۱۷/۲۵۶$ ،  $-۱۸/۳۸$ ،  $۰$  و  $۰$ ۔ در این حالت، سیستم (۱) رفتار دوره‌ای داشته و نمودارهای یک‌بعدی و سه‌بعدی سیستم در شکل (۶) نشان داده شده‌اند. این رفتارها در جدول (۴) نمایش داده شده‌اند.

Table (4): Dynamic behaviors of the new hyper-chaotic system with changes in Lyapunov Exponent and the second parameter

جدول (۴): رفتارهای دینامیکی سیستم فوق آشوبی جدید با تغییرات نماهای لیاپانوف و پارامتر دوم

پارامتر دوم	نماهای لیاپانوف	رفتارهای دینامیکی
$[-۲, ۵]$	$(+, +, -, -, 0, 0)$	فوق آشوبی
$[-۵, -۲]$	$(+, -, -, -, 0, 0)$	آشوبی
$[-۱۰, -۵]$	$(+, -, -, -, 0, 0)$	آشوبی
$[-۱۶, -۱۰]$	$(0, -, -, -, 0, 0)$	دوره‌ای
$[-۱۷, -۲۲]$	$(0, 0, -, -, 0, 0)$	شبه دوره‌ای

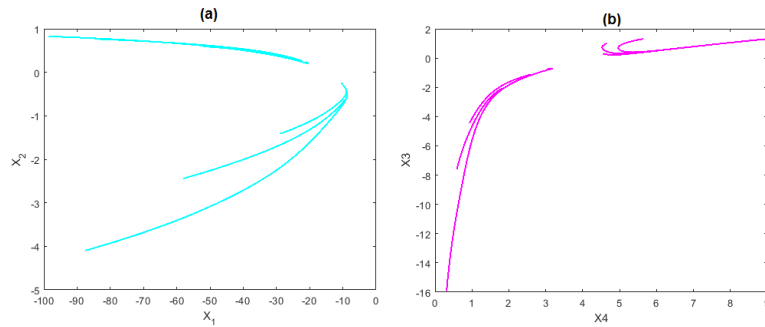


شکل (۶): سری‌های زمانی (i) و نمودارهای صفحه فاز (ii) سیستم (۱) با تغییرات در پارامتر دوم

Figure (6): Time series (i) and Phase portraits (ii) of the new system by changing the second parameter

### ۳-۵- نمودار پوانکاره

برای مطالعه عملکرد و رفتار سیستم‌های دینامیکی پیوسته، مشابه سیستم پیشنهادی (۱)، می‌توانیم از نقشه پوانکاره، یکی از محبوب‌ترین موضوعات در تحلیل دینامیک غیرخطی، استفاده کنیم. شکل (۷) نقشه‌های پوانکاره سیستم فوق آشوبی جدید را نمایش می‌دهد. مطابق با شکل، مجموعه منظم از نقاط نشان داده شده در نقشه‌های پوانکاره، نشانه رفتار آشوبی سیستم است.



شکل (۷): نقشه پوانکاره سیستم فوق آشوبی جدید (۱) در (الف)  $x_1-x_2$  و (ب)  $x_3-x_4$   
Figure (7): Poincaré map of the new hyper-chaotic system

#### ۴- همزمان سازی زمان محدود سریع

در این قسمت فرمول بندی و نتایج اصلی همزمان سازی زمان محدود بیان می شود.

#### ۴-۱- فرمول بندی همزمان سازی زمان محدود

در این بخش، همزمان سازی زمان محدود سریع و قضیه های آن بین دو سیستم جدید و فوق آشوبی با پارامترها و شرایط اولیه مختلف ارائه شده است. در این مرحله، با استفاده از سیستم فوق آشوبی (۱) و با تغییر در شرایط اولیه و پارامترهای سیستم فوق آشوبی جدید، هر دو سیستم گیرنده و فرستنده برای همزمان سازی زمان محدود ساخته می شوند. سیستم فرستنده با معادلات (۱۳) و شرایط اولیه و پارامترهای (۱۴) به صورت زیر تعریف می شود:

$$dx_{im}(\tau)/d\tau = \begin{pmatrix} -a_{1m} & a_{1m} - a_{4m}x_{3m} & -a_{3m}x_{3m} & -a_{2m} \\ -a_{1m}x_{1m} - a_{8m}x_{2m} & -x_{1m}x_{3m} + a_{5m} & -a_{7m} & -a_{6m} \\ a_{1m}x_{1m} & x_{1m}x_{3m} & -a_{2m} & 0 \\ -a_{11m} + a_{8m}x_{2m} & a_{10m}x_{3m}x_{4m} & a_{9m} + a_{7m}x_{1m}x_{2m} & a_{12m}x_{1m}x_{3m} \end{pmatrix} x_{im} \quad (13)$$

$$+ \begin{pmatrix} a_4 \tanh(x_{1m} + x_{2m} + x_{3m} + x_{4m}) \\ -a_{9m}e^{(x_{3m})} \\ -a_{1m}e^{(x_{1m} + x_{2m} + x_{4m})} \\ a_{12m}e^{(x_{1m} + x_{2m} + x_{3m} + x_{4m})} \end{pmatrix} \quad (\text{for } i=1, \dots, 4)$$

$$a_{jm} = (15, 4, 16, 8, 0.25, 23, 10, 3, 8.12, 5, 13, 20) \quad (j=1, \dots, 12) \quad (14)$$

$$x_{im}(0) = (3.68, -21, 4.47, 10)$$

به طور مشابه برای سیستم گیرنده با معادلات (۱۵) و پارامترها و شرایط اولیه (۱۶) خواهیم داشت:

$$dx_{is}(\tau)/d\tau = \begin{pmatrix} -a_{1s} & a_{1s} - a_{4s}x_{3s} & -a_{3s}x_{3s} & -a_{2s} \\ -a_{1s}x_{1s} - a_{8s}x_{2s} & -x_{1s}x_{3s} + a_{5s} & -a_{7s} & -a_{6s} \\ a_{1s}x_{1s} & x_{1s}x_{3s} & -a_{2s} & 0 \\ -a_{11s} + a_{8s}x_{2s} & a_{10s}x_{3s}x_{4s} & a_{9s} + a_{7s}x_{1s}x_{2s} & a_{12s}x_{1s}x_{3s} \end{pmatrix} x_{is} \quad (15)$$

$$+ \begin{pmatrix} a_4 \tanh(x_{1s} + x_{2s} + x_{3s} + x_{4s}) \\ -a_{9m}e^{(x_{3s})} \\ -a_{1s}e^{(x_{1s} + x_{2s} + x_{4s})} \\ a_{12s}e^{(x_{1s} + x_{2s} + x_{3s} + x_{4s})} \end{pmatrix} + g_i(x(\tau))v(\tau) + d_i(\tau) \quad (\text{for } i=1, \dots, 4)$$

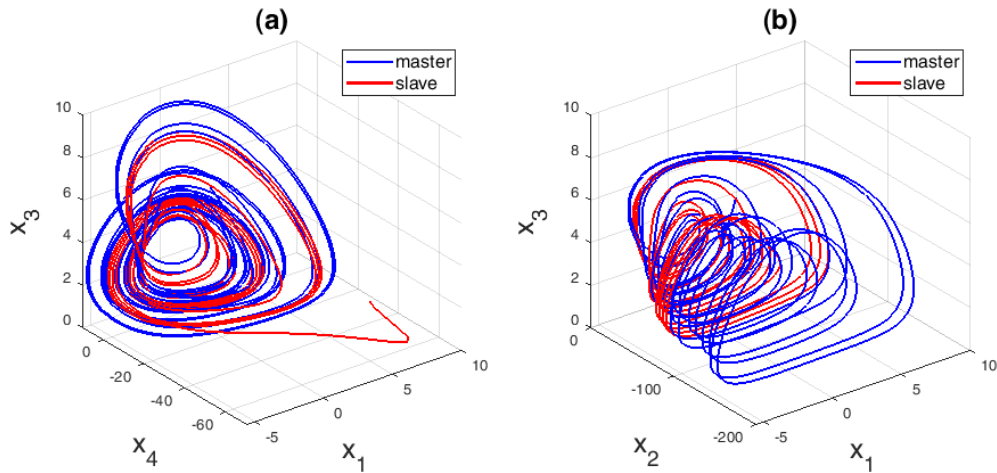
$$a_{jm} = (14.2, 3.5, 15.1, 9.6, 0.2, 20.7, 11.8, 1.7, 8, 6.3, 12.7, 22) \quad (j=1, \dots, 12) \quad (16)$$

$$x_{im}(0) = (13, -30, 6, 7)$$

که در آن متغیرهای حالت سیستم های (۱۳) و (۱۵)،  $d_i(\tau)$ ، مجموع نامعینی های سیستم،  $g_i(x(\tau))$  بهره های کنترل کننده و  $v(\tau) = v_1, \dots, v_4$  سیگنال های غیرخطی برای همزمان سازی سیستم های گیرنده و فرستنده هستند.

$$d_i(\tau) = \begin{pmatrix} \sin(\tau)+1.5 \\ 2\sin(6\tau)-1 \\ 3\sin(2\tau)+0.1 \\ 4\sin(4\tau)+0.5 \end{pmatrix} \quad (17)$$

سیستم فرستنده (۱۳) و سیستم گیرنده (۱۵) با پارامترها و شرایط اولیه (۱۴) و (۱۶) و با اعمال ترم نامعینی (۱۷) در حالت سه‌بعدی بدون اعمال کنترل‌کننده در شکل (۸) نشان داده شده‌اند.



شکل (۸): نمودارهای صفحه فاز سیستم‌های گیرنده (۱۵) و فرستنده (۱۳)

Figure (8): Phase portrait diagrams of master and slave systems

**فرض (۱):** برای همزمان‌سازی زمان محدود سریع با توجه به سیستم‌های گیرنده و فرستنده، خطا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_i = x_{is} - x_{im} \quad (i=1, \dots, 5) \quad (18)$$

**فرض (۲):** به‌طور کلی، محدودیت‌های موجود در نامعینی‌ها و اغتشاشات را به صورت زیر در نظر خواهیم گرفت:

$$|f(x(\tau))| \leq \alpha_1, \quad |d(\tau)| \leq \alpha_2 \quad (19)$$

که در آن آلفاها ثابت‌های ناشناخته مثبت هستند.

**فرض (۳):** فرض کنید  $y_i(\tau) = x_i(\tau)$  بنابراین:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e_i(\tau) = 0 \quad (20)$$

**تعریف (۱) [۶۰]:** سیستم‌های فرستنده و گیرنده (۱۳) و (۱۵) می‌توانند در زمان محدود همزمان شوند اگر  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\text{error}(\tau)\| = 0$

و  $\|\text{error}(\tau)\| = 0$  برای جایی که  $\tau \geq 0$  و  $\text{error}(\tau) = [\text{error}_i]^T$  و  $T = T \|\text{error}(\tau)\| > 0$

به عبارت دیگر اگر حد خطای زمانی  $\tau$  در زمان محدود  $T$  به صفر میل کند، همزمان‌سازی زمان محدود را خواهیم داشت.

**تعریف (۲) [۶۱]:** سیستم‌های فرستنده (۱۳) و گیرنده (۱۵) در زمان محدود همزمان می‌شوند اگر برای کنترل‌کننده  $U_p(\tau)$

یک ثابت  $T > 0$  وجود داشته باشد به طوری که:

$$\lim_{\tau \rightarrow T} |x_{is}(\tau) - x_{im}(\tau)| = 0 \quad (21)$$

جایی که  $x_{im}(\tau)$  معادلات مربوط به سیستم فرستنده (۱۳) و  $x_{is}(\tau)$  معادلات مربوط به سیستم فرستنده (۱۵) هستند.

#### ۲-۴- نتایج اصلی برای همزمان‌سازی زمان محدود

سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(\tau) = f(x(\tau), \tau) + g(x(\tau), \tau)u(\tau) + d(x(\tau), \tau). \quad (22)$$

جایی که  $x(\tau) = [x_s(\tau), x_m(\tau)]^T$  معادلات حالت،  $u(\tau)$  ورودی کنترل،  $g(x(\tau))$  گین کنترلی و  $f(x(\tau))$  توابع غیرخطی و  $d(x(\tau))$

$\tau$  مجموع نامعینی‌ها و اغتشاشات سیستم هستند که طبق فرض (۲) محدود هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$d(x(\tau)) = \Delta f(x(\tau)) + \Delta g(x(\tau))u(\tau) + d_1(\tau) \quad (23)$$

با محاسبه حد بالای  $d(x(\tau))$  خواهیم داشت:

$$\|d(x(\tau))\| \leq \|\Delta f(x(\tau))\| + \|\Delta g(x(\tau))\| \|u(\tau)\| + \|d_1(\tau)\| \quad (24)$$

با توجه به فرضیات زیر:

$$\|\Delta f(x(\tau))\| \leq \alpha \theta (\|x(\tau)\|), \|\Delta g(x(\tau))\| \leq \beta v (\|x(\tau)\|), \|d_1(\tau)\| \leq \Theta_1 \quad (25)$$

می توان حد بالای  $d(x(\tau))$  را به صورت زیر نوشت:

$$\|d(x(\tau))\| \leq \alpha \theta (\|x(\tau)\|) + \beta v (\|x(\tau)\|) U_m + \Theta_1 \quad (26)$$

مجموع توابع غیرخطی معادله (26) را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\alpha \theta (\|x(\tau)\|) + \beta v (\|x(\tau)\|) U_m = \Theta_2 \Psi_3 (\|x(\tau)\|) \quad (27)$$

بنابراین حد بالای  $d(x(\tau))$  در معادله (26) را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\|d(x(\tau))\| \leq \Theta_2 \Psi_3 (\|x(\tau)\|) + \Theta_1 \quad (28)$$

جایی که سای و دلتا ثابت های مثبت نامعلوم و  $\|x(\tau)\|$  مجموع ترم های غیرخطی هستند.

هدف کنترلی این است که سیستم غیرخطی (22) مسیرهای سیستم مرجع  $x_{im}(\tau)$  را ردیابی کند، بنابراین، خطاهای ردیابی را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$e_i(\tau) = x_{is}(\tau) - x_{im}(\tau) \quad (i=1, \dots, 4) \quad (29)$$

**فرض (4):** توابع غیرخطی  $d(x(\tau), \tau)$  و  $g(x(\tau), \tau)$  و  $f(x(\tau), \tau)$  متغیر با زمان هستند. سطح لغزش<sup>29</sup> را برای سیستم (22) به صورت زیر تعریف می کنیم [62]:

$$\delta(\tau) = \tanh^2 \left( \int_0^t \xi \dot{e}(\tau) d\tau + \int_0^t \xi (f(x(\tau)) + \dot{x}_m(\tau)) d\tau \right) \quad (30)$$

جایی که زتا متعلق به  $R^{i*1}$  ثابت های مثبت دلخواه هستند. با ترکیب معادلات (22) و (29) و جایگذاری در معادله (30)، مشتق زمانی سطح لغزش به صورت زیر به دست می آید:

$$\dot{\delta}(\tau) = (\xi \dot{e}(\tau) + \xi e(\tau)) \operatorname{sech}^4(\tanh(\delta)) \quad (31)$$

**قضیه (1) [63]:** معادله خطای (29) را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن مشتق سطح لغزش با معادله (31)، حالت های سیستم در زمان محدود به مبدأ همگرا شده و همزمان سازی زمان محدود را خواهیم داشت.

**قضیه (2):** معادلات کلی (22) را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن معادله خطا (29)، کنترل کننده مودلغزشی ترمینال سریع به صورت زیر تعریف می شود:

$$u(\tau) = (\xi B)^{-1} \left( \xi \dot{x}_m(\tau) - \psi_1 \delta(\tau) - \operatorname{sign}(\delta(\tau)) (\psi_2 + \Theta_1 \|\xi\| + \Theta_2 \|\xi\| \|\psi_3 e^{-\|x_{im}\|} \right) \quad (32)$$

جایی که  $B$  بهره های کنترلی و دلتاها به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\dot{\Theta}_1 = k_1 \|\delta\| \|\xi\| \operatorname{sech}^4(\tanh(\delta)) \quad (33)$$

$$\dot{\Theta}_2 = k_2 \|\delta\| \|\xi\| \|\psi_3 e^{-\|x_{im}\|} \operatorname{sech}^4(\tanh(\delta))$$

**اثبات:** قبل از تحلیل پایداری نشان خواهیم داد کنترل کننده پیشنهادی (32) محدود است. با فرض

$$p(\tau) = \int_0^t \xi \dot{e}(\tau) d\tau + \int_0^t \xi (f(x(\tau)) + \dot{x}_m(\tau)) d\tau \quad (34)$$

و محدود بودن سطح لغزش خواهیم داشت:

$$\|\delta(\tau)\| = \sqrt{\|\delta_1(\tau)\|^2 + \|\delta_2(\tau)\|^2 + \dots + \|\delta_m(\tau)\|^2} = \sqrt{\|\tanh^2(p_1(\tau))\|^2 + \|\tanh^2(p_2(\tau))\|^2 + \dots + \|\tanh^2(p_m(\tau))\|^2} \quad (35)$$

با توجه به اینکه برای  $i$  های از یک تا  $m$   $|\tanh^2(p_i(\tau))|$  کوچکتر یا مساوی یک می باشد، بنابراین حد بالای سطح لغزش برابر است با:

$$\text{with } \|\delta(\tau)\| \leq \sqrt{1+1+\dots+1} = \sqrt{m} \Rightarrow \|\operatorname{sign}(\delta(\tau))\| \leq \sqrt{m} \quad (36)$$

از طرف دیگر، با توجه به تعریف تابع علامت در معادله (۳۶)، می‌توان حد بالای قانون کنترلی طراحی شده (۳۲) را به صورت زیر به دست آورد:

$$\|u(\tau)\| \leq \|(\xi B)^{-1}\| \left\| \left( \xi \dot{x}_m(\tau) - \psi_1 \delta(\tau) - \text{sign}(\delta(\tau)) (\psi_2 + \Theta_1 \|\xi\| + \Theta_2 \|\xi\| \psi_3 e^{-\|\xi\| x_m(\tau)}) \right) \right\| \quad (37)$$

حد بالا در معادله (۳۷) را می‌توان محدود و به صورت زیر تعریف کرد:

$$\Theta_1 \|\xi\| + \Theta_2 \|\xi\| \psi_3 e^{-\|\xi\| x_m} \leq \Theta_1 H + \Theta_2 HW = H(\Theta_1 + \Theta_2 W) \quad (38)$$

با در نظر گرفتن معادلات (۳۵) و (۳۶) و مثبت بودن تمام پارامترها حد بالای کنترل کننده برابر خواهد بود با:

$$\|u(\tau)\| \leq \|(\xi B)^{-1}\| \left\| \left( \xi \dot{x}_m(\tau) + \psi_1 \sqrt{m} + (\psi_2 + H(\Theta_1 + \Theta_2 W)) \sqrt{m} \right) \right\| \quad (39)$$

در نهایت، حد بالای کنترل کننده را با فرض محدود بودن کنترل کننده به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\|u(\tau)\| \leq M \left( N + \psi_1 \sqrt{m} + (\psi_2 + H(\Theta_1 + \Theta_2 W)) \sqrt{m} \right) \quad (40)$$

در ادامه اثبات پایداری کنترل کننده طراحی شده (۳۲) را دنبال خواهیم نمود.

**اثبات پایداری:** تابع کاندید لیاپانوف را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$g(\tau) = 0.5 \delta^T(\tau) \delta(\tau) \quad (41)$$

با مشتق‌گیری از تابع کاندید لیاپانوف (۴۱) خواهیم داشت:

$$\dot{g}(\tau) = \delta^T(\tau) \dot{\delta}(\tau) = \delta^T(\tau) \left( \xi \dot{e}(\tau) - \xi f(e(\tau)) + \xi \dot{x}_m(\tau) \right) \cosh^4(\tanh(\delta(\tau))) \quad (42)$$

با جایگذاری معادله (۲۲) در مشتق تابع کاندید لیاپانوف (۴۲) خواهیم داشت:

$$\dot{J}(\tau) = \delta^T(\tau) \left( \left( \xi g(e(\tau)) u(\tau) \right) + \xi d(\tau) + \xi \dot{x}_m \right) \text{sech}^4(\tanh(\delta(\tau))) \quad (43)$$

با جایگذاری کنترل کننده (۳۲) در معادلات (۴۳) خواهیم داشت:

$$\dot{g}(\tau) = \left\{ \delta^T(\tau) (-\psi_1 \delta(\tau) - \text{sign}(\delta(\tau))) (\psi_2 + \Theta_1 \|\xi\| + \Theta_2 \|\xi\| \psi_3 e^{-\|\xi\| x_m(\tau)}) + \xi d(\tau) \right\} \text{sech}^4(\tanh(\delta(\tau))) \quad (44)$$

حد بالای معادله (۴۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{g}(\tau) \leq \left\{ -\psi_1 \|\delta(\tau)\|^2 - \|\delta(\tau)\| (\psi_2 + \Theta_1 \|\xi\| + \Theta_2 \|\xi\| \psi_3 e^{-\|\xi\| x_m(\tau)}) + \|\delta(\tau)\| \|\xi\| (\Theta_2 \psi_3 e^{-\|\xi\| x_m(\tau)} \|e(\tau)\| + \Theta_1) \right\} \text{sech}^4(\tanh(\delta(\tau))) \quad (45)$$

جایی که نرم خطا محدود و به صورت زیر است:

$$\|e(\tau)\| = \bar{\Theta}_2 \psi_3 (\|x(\tau)\|) + \bar{\Theta}_1 \quad (46)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\dot{g}(\tau) \leq \left\{ -\psi_1 \|\delta(\tau)\|^2 - \psi_2 \|\delta(\tau)\| - \|\delta(\tau)\| \|\xi\| \Theta_1 - \|\delta(\tau)\| \|\xi\| \psi_3 e^{-\|\xi\| x_m(\tau)} \|e(\tau)\| + \Theta_2 \right\} \text{sech}^4(\tanh(\delta(\tau))) \quad (47)$$

با جایگذاری معادله (۳۳) در (۴۷) خواهیم داشت:

$$\dot{g}(\tau) \leq -\psi_1 \|\delta(\tau)\|^2 - \psi_2 \|\delta(\tau)\| \text{sech}^4(\tanh(\delta(\tau))) \quad (48)$$

با در نظر گرفتن سای‌های مثبت، مشتق تابع کاندید لیاپانوف (۴۱) به تدریج کاهشی شده و سطح لغزش (۳۰) در زمان محدود به مبدأ همگرا می‌شود. در نتیجه این اثبات کامل می‌شود.

**قضیه (۳) [۶۳]:** با فرض وجود یک تابع پیوسته دیفرانسیلی  $v(x)$  که در همسایگی  $U$  از مبدأ قرار دارد و با فرض وجود مقادیر حقیقی  $c > 0$  و  $\alpha$  بین صفر و یک به گونه‌ای که:

$$(1) \quad g(x) \text{ یک تابع حقیقی مثبت معین باشد.}$$

$$(2) \quad \dot{g}(x) + c g^\alpha(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$$

وجود خواهد داشت یک  $U_0$  متعلق به  $R^n$  برای تابع  $v(x)$  که از نقطه  $U_0$  شروع شده و می‌تواند در زمان محدود به  $v(x)=0$  برسد.

**اثبات:** با توجه به اینکه تابع  $\text{sech}^4(\tanh(x(\tau)))$  بین صفر و یک قرار دارد، معادله (۴۴) را به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{g}(\tau) \leq \delta^T(\tau) (-\psi_1 \delta(\tau) - \text{sign}(\delta(\tau))) (\psi_2 + \Theta_1 \|\xi\| + \Theta_2 \|\xi\| \psi_3 \|x(\tau)\|) + \xi \|e(\tau)\| \quad (49)$$

با جایگذاری معادله (۴۶) در معادله (۴۹) خواهیم داشت:

$$\dot{\delta}(\tau) \leq -\psi_1 \|\delta(\tau)\|^2 - \psi_2 \|\delta(\tau)\| - \|\delta(\tau)\| \|\xi\| \left( (\Theta_1 - \bar{\Theta}_1) \|\xi\| + (\Theta_2 - \bar{\Theta}_2) \|\xi\| \psi_3 (\|x(\tau)\|) \right) \quad (50)$$

بنابراین:

$$\dot{\delta}(\tau) \leq -\psi_1 \|\delta(\tau)\|^2 - \psi_2 \|\delta(\tau)\| - \|\delta(\tau)\| \|\xi\| \left( \bar{\Theta}_1 \|\xi\| + \bar{\Theta}_2 \|\xi\| \psi_3 (\|x(\tau)\|) \right) \quad (51)$$

با توجه به معادله (۳۳) می توان نتیجه گرفت وقتی t به سمت بی نهایت میل می کند، خواهیم داشت::

$$\text{if } t \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{\Theta}_1 \rightarrow 0, \bar{\Theta}_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \|\bar{\Theta}_1\| \leq \Theta_{1n}, \|\bar{\Theta}_2\| \leq \Theta_{2n} \quad (52)$$

جایی که توابع دلخواه مثبت هستند. بنابراین با توجه به موارد عنوان شده و با استفاده از قضیه (۳)، معادله (۵۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\delta}(\tau) \leq -\psi_1 \|\delta(\tau)\|^2 - \psi_2 \|\delta(\tau)\| + \|\delta(\tau)\| \|\xi\| (\Theta_{1n} + \Theta_{2n} W) \quad (53)$$

با فرض تابع z به صورت زیر، معادله (۵۳) را می توان به صورت مشتق تابع کاندید لیاپانوف زیر بیان نمود:

$$\text{if } z = \|\xi\| (\Theta_{1n} + \Theta_{2n} W) \Rightarrow \dot{\delta}(\tau) \leq -\psi_1 \|\delta(\tau)\|^2 - \psi_2 \|\delta(\tau)\| + \|\delta(\tau)\| z \quad (54)$$

بنابراین:

$$\dot{\delta}(\tau) \leq -\psi_1 \|\delta(\tau)\|^2 - (\psi_2 - z) \|\delta(\tau)\| \quad (55)$$

با در نظر گرفتن فرضیات زیر، مشتق تابع لیاپانوف را به صورت (۵۶) به دست خواهیم آورد:

$$\text{if } \psi = \psi_2 - z, \psi_2 > z \Rightarrow \dot{\delta}(\tau) \leq -\psi_1 \|\delta(\tau)\|^2 - \psi \|\delta(\tau)\| \quad (56)$$

بدیهی است که:

$$\text{if } -\psi_1 \|\delta(\tau)\|^2 - \psi_2 \|\delta(\tau)\| \leq -\psi \|\delta(\tau)\| \Rightarrow \dot{\delta}(\tau) \leq -\psi \|\delta(\tau)\| \quad (57)$$

از طرف دیگر با توجه به تعریف نرم سطح لغزش به صورت (۵۸) است، معادله (۵۷) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\|\delta(\tau)\| = \sqrt{2} g^{1/2}(\tau) \Rightarrow \dot{\delta}(\tau) \leq -\psi \sqrt{2} g^{1/2}(\tau) \quad (58)$$

به عبارت دیگر:

$$\dot{\delta}(\tau) + \sqrt{2} \psi g^{1/2}(\tau) \leq 0 \quad (59)$$

بنابراین فرض (۳) برآورده شده و اثبات کامل می شود.

## ۵- نتایج همزمان سازی زمان محدود سریع

در این بخش همزمان سازی زمان محدود بین دو سیستم فوق آشوبی ۴ بعدی با نامعینی ها و اغتشاشات ناشناخته و عدم قطعیت پارامتری را برای سیستم انجام می دهیم. در این قسمت از هر دو سیستم فرستنده و سیستم گیرنده برای همزمان سازی استفاده کرده ایم. شایان ذکر است که اگرچه سیستم های فرستنده و گیرنده یکسان هستند، اما دارای پارامترهای نابرابر و شرایط اولیه مختلف هستند. بر اساس فرض (۱)، برای مطالعه همزمان سازی زمان محدود، خطا را مطابق با سیستم های گیرنده و فرستنده به شرح زیر طراحی می کنیم:

$$e_i = \sum_{i=1}^4 y_i - x_i \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 e_1 + a_1 e_2 - a_2 e_4 + f_1(\tau) \\ a_5 e_2 + a_6 e_4 + f_2(\tau) \\ -a_2 e_3 + f_3(\tau) \\ -a_1 e_1 + a_9 e_3 + f_4(\tau) \end{bmatrix} + B(\tau)u(\tau) + D(\tau) \quad (60)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(\tau) = a_{3m} x_{3m}^2 + a_{4m} x_{2m} x_{3m} - a_{3s} x_{3s}^2 - a_{4s} x_{2s} x_{3s} \\ + a_{4s} \tanh(x_{1s} + x_{2s} + x_{3s} + x_{4s}) - a_4 \tanh(-x_{1m} - x_{2m} - x_{3m} - x_{4m}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_2(\tau) = a_{1m} x_{1m}^2 + a_{7m} x_{2m} x_{3m} + a_{8m} x_{1m} x_{2m} + x_{1m} x_{2m} x_{3m} + a_{9m} e^{-x_{3m}} \\ - a_{1s} x_{1s}^2 - a_{7s} x_{2s} x_{3s} - a_{8s} x_{1s} x_{2s} - x_{1s} x_{2s} x_{3s} - a_{9s} e^{x_{3s}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_3(\tau) = -a_{10m} x_{1m}^2 - x_{1m} x_{2m} x_{3m} + a_{1m} e^{-(x_{1m} + x_{2m} + x_{4m})} + a_{10s} x_{1s}^2 + x_{1s} x_{2s} x_{3s} - a_{1s} e^{(x_{1s} + x_{2s} + x_{4s})} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_4(\tau) = -a_{7m} x_{1m} x_{2m} x_{3m} - a_{8m} x_{1m} x_{2m} - a_{10m} x_{2m} x_{3m} x_{4m} - a_{12m} x_{1m} x_{3m} x_{4m} - a_{12m} e^{-(x_{1m} + x_{2m} + x_{3m} + x_{4m})} \\ + a_{7s} x_{1s} x_{2s} x_{3s} + a_{8s} x_{1s} x_{2s} + a_{10s} x_{2s} x_{3s} x_{4s} + a_{12s} x_{1s} x_{3s} x_{4s} + a_{12s} e^{(x_{1s} + x_{2s} + x_{3s} + x_{4s})} \end{pmatrix}$$

معادلات (۶۰) در فرم ماتریس به صورت زیر هستند:

$$\frac{de_i(\tau)}{d\tau} = \Lambda e_i(\tau) + f(e(\tau)) + B(\tau)v(\tau) + D(\tau) \quad (61)$$

جایی که:

$$e_i(\tau) = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}, B(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, f(e(\tau)) = \begin{bmatrix} f_1(\tau) \\ f_2(\tau) \\ f_3(\tau) \\ f_4(\tau) \end{bmatrix} \quad (62)$$

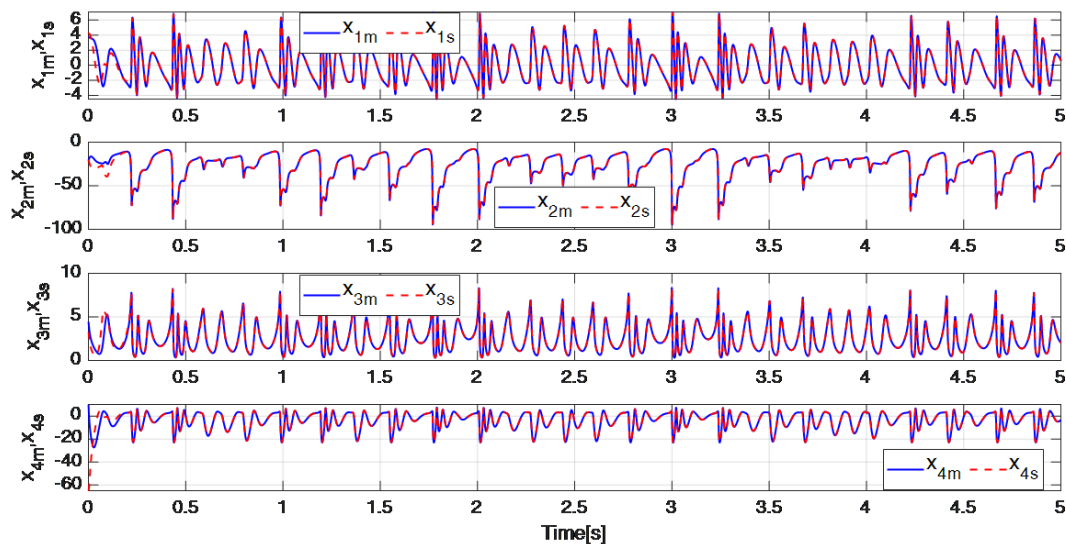
$$\Lambda = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & -a_2 \\ 0 & a_5 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_6 & 0 \end{bmatrix}, D(\tau) = \begin{pmatrix} \sin(\tau)+1.5 \\ 2\sin(6\tau)-1 \\ 3\sin(2\tau)+0.1 \\ 4\sin(4\tau)+0.5 \end{pmatrix}$$

در ادامه با استفاده از پارامترها و شرایط اولیه (۱۴) و (۱۶) اطمینان داریم که همزمان‌سازی بین دو سیستم فرستنده و گیرنده با معادله خطا (۶۲) در مدت‌زمان محدود، محقق خواهد شد؛ بنابراین با توجه به طراحی کنترل‌کننده مودل‌گزشی ترمینال، ما از کنترل‌کننده تعریف‌شده در (۳۲) استفاده می‌کنیم. با توجه به قانون کنترل مودل‌گزشی، بهره‌های کنترل‌کننده را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\xi_5 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (0.1, 0.01, 0.1, 0.01) \quad (63)$$

نامعینی‌ها و ضرایب کنترل‌کننده را به صورت مشخص‌شده در معادله (۶۲) در نظر می‌گیریم. در معادله (۳۳) پارامترها را به صورت  $k_1=110, k_2=-1500$  انتخاب می‌کنیم. قانون کنترل (۳۲) طوری طراحی شده است که با سای برابر با  $[85 \ 45]$  همزمان‌سازی زمان محدود سیستم‌های فوق و  $B(\tau)=[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  آشوبی گیرنده و فرستنده انجام شود. شکل (۹) همزمان‌سازی زمان محدود سریع بین سیستم‌های گیرنده و فرستنده را نمایش می‌دهد. وقتی کنترل‌کننده فعال است، خطاهای همزمان‌سازی به صورت شکل (۱۰) نمایش داده می‌شوند.

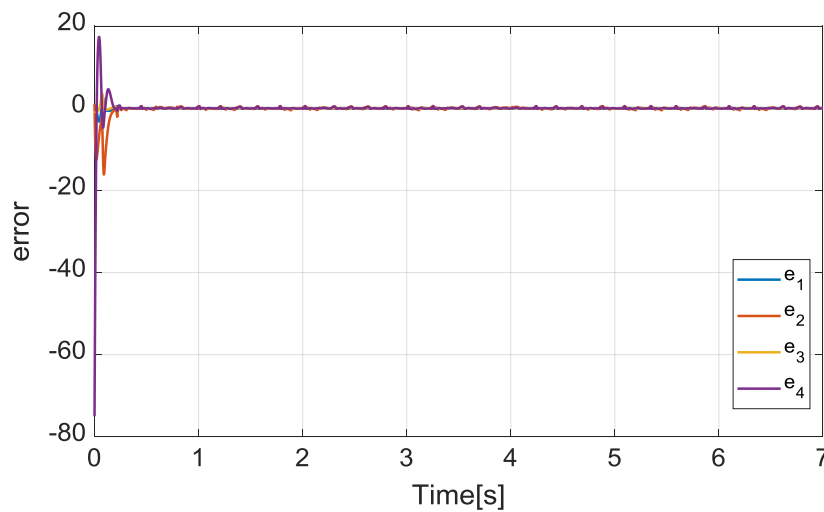
با توجه به نتایج شبیه‌سازی [شکل (۹) و شکل (۱۰) را ببینید]، علی‌رغم اینکه ثابت کردیم سیستم فوق آشوبی جدید طراحی شده دارای نوسانات زیادی است، کنترل‌کننده (۳۲) توانسته خطا را در  $t=0.319$  ثانیه به صفر برساند. بنابراین، به راحتی می‌توان مشاهده کرد که سیستم‌های فوق آشوبی گیرنده و فرستنده در زمان محدود همگرا می‌شوند.



شکل (۹): همزمان‌سازی زمان محدود سریع بین دو سیستم گیرنده و فرستنده

Figure (9): Fast finite-time synchronization between master and slave systems

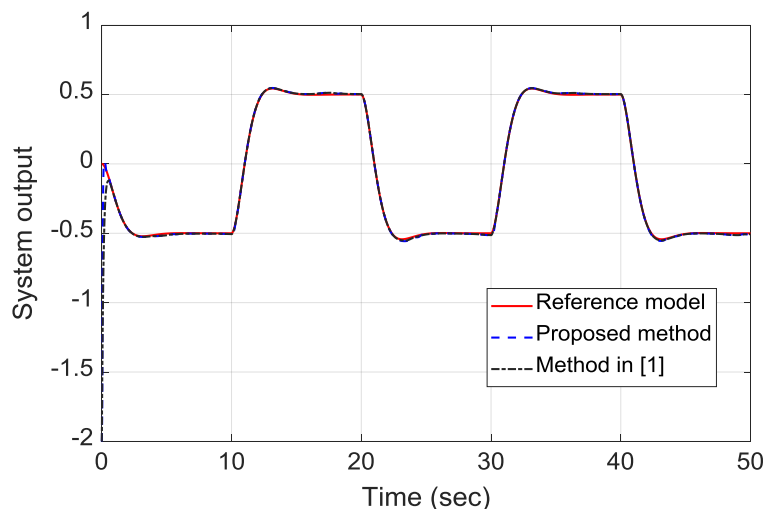




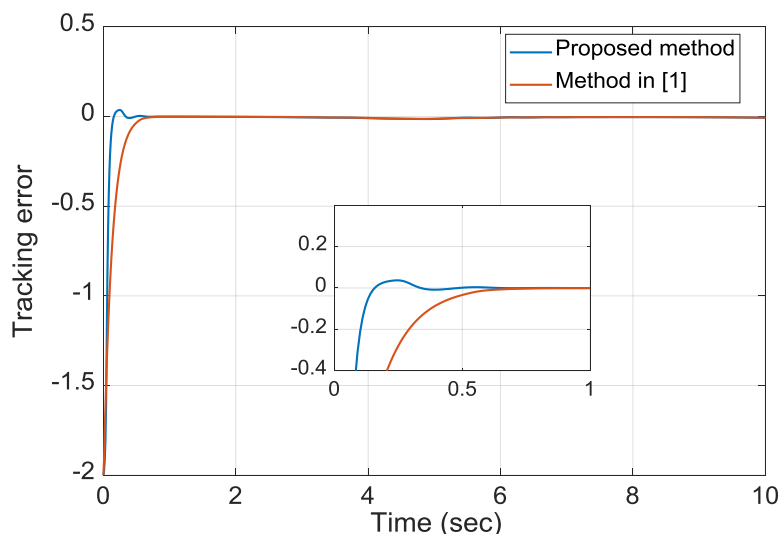
شکل (۱۰): خطاهای همزمان سازی با فعال شدن کنترل کننده  
Figure (10): Synchronization errors with controller activation

در ادامه، برای ارزیابی بهتر عملکرد کنترل کننده طراحی شده (۳۲)، عملکرد آن را با کنترل کننده مودلغزشی ترمینال مشابه در مرجع [۱] مقایسه می‌کنیم. در شکل (۱۱) مقایسه ای بین خروجی سیستم با استفاده از کنترل کننده (۳۲) و سیستم طراحی شده در مرجع [۱] در مقایسه با مدل مرجع  $x^*$  انجام شده است. در این شکل ابتدا یک سیگنال مرجع به هر دو کنترل کننده اعمال کرده و پاسخ سیستم‌ها را به ورودی مرجع به دست آورده ایم. سپس، خروجی این دو کنترل کننده را با سیگنال مرجع مقایسه کرده ایم و همانطور که مشخص است کنترل کننده طراحی شده در این مقاله سریع تر به سیگنال مرجع همگرا شده است.

پاسخ زمانی خطاهای ردیابی  $e_i$  در شکل (۱۲) نشان داده شده است. همان طور که از شکل (۱۲) مشخص است، سیگنال خطای ردیابی به طور مناسب به مبدأ همگرا شده و ردیابی سریع تری را نسبت به روش مرجع [۱] فراهم می‌کند. سرعت واکنش سیستم در برابر تغییرات بسیار کم در شرایط اولیه، قدرت حساسیت سیستم را نشان می‌دهد. یک تغییر بسیار کوچک در شرایط اولیه، سیگنال خروجی متفاوتی را ایجاد می‌کند. هرچه زمان واکنش به این تغییرات کم تر باشد، سیستم پیچیده تر و آشوبی تر است [۶۵]. در شکل (۱۳)، مقایسه ای بین سیستم‌های فوق آشوبی مشابه با سیستم فوق آشوبی جدید از لحاظ سرعت واکنش (جدایی) به تغییرات بسیار اندک در شرایط اولیه، انجام شده است.



شکل (۱۱): خروجی سیستم  
Figure (11): Out put system

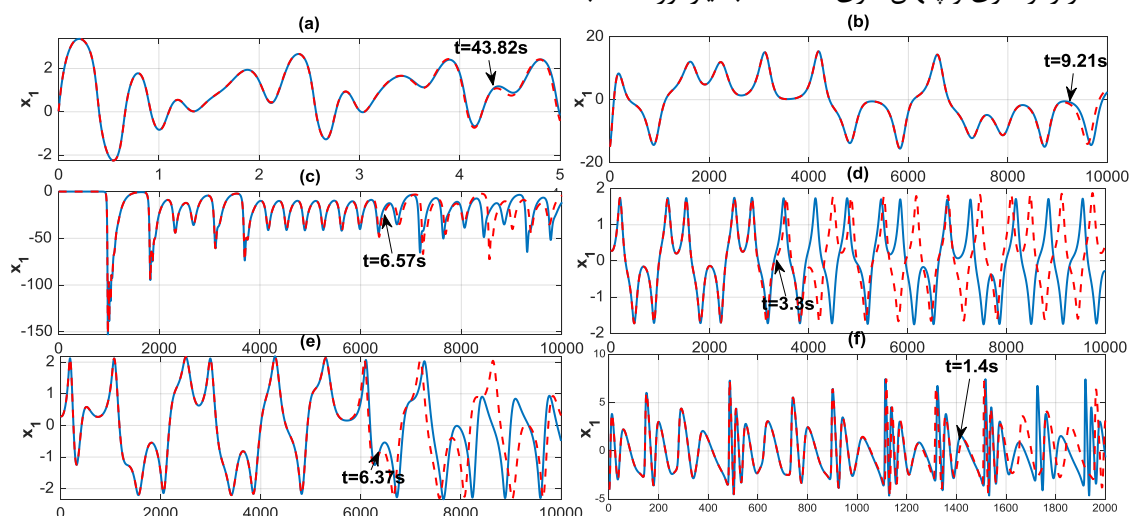


شکل (۱۲): خطاهای ردیابی  
Figure (12): Tracking errors

همان‌طور که عنوان شد یکی از اصلی‌ترین ویژگی سیستم‌های آشوبی واکنش به تغییر در شرایط اولیه است و هرچه سیستم واکنش سریع‌تری نسبت به این تغییر داشته باشد از خاصیت آشوبی بیشتری برخوردار است. بر اساس نتایج، سیستم فوق آشوبی طراحی شده در این مقاله واکنش زمانی سریع‌تری را نسبت به تغییرات بسیار اندک در شرایط اولیه یکسان از خود نشان داده است، از این رو پیچیده‌تر از سیستم‌های مشابه است.

### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک سیستم فوق آشوبی جدید پیچیده معرفی شد. تجزیه و تحلیل‌های استاندارد سیستم‌های آشوبی از جمله نمودار دوشاخگی، نقاط تعادل، نقشه پوانکاره، بعد کاپلان-یورک و نماهای لیاپانوف انجام گرفت. از خصوصیات سیستم‌های فوق آشوبی می‌توان به پیچیدگی بالاتر، مقاومت پارامتری بیشتر و حساسیت شدید به تغییرات بسیار کوچک در شرایط اولیه اشاره کرد. ثابت نمودیم که سیستم فوق آشوبی جدید بسیار پیچیده‌تر از سیستم‌های فوق آشوبی مشابه است که می‌تواند برای استفاده در رمزنگاری و پنهان‌سازی اطلاعات بسیار ارزشمند باشد.



شکل (۱۳): نتایج شبیه‌سازی برای سرعت واکنش زمانی سیستم فوق آشوبی جدید (f) در مقایسه با سیستم‌های فوق آشوبی مشابه  
Figure (13): Simulation results for the temporal reaction rate of the new hyper-chaotic system (f) in comparison with similar hyper-chaotic systems

در مرحله بعدی، یک کنترل‌کننده مودلغزشی سریع برای همزمان‌سازی زمان محدود سیستم فوق آشوبی معرفی نموده و پایداری کنترل‌کننده جدید را با استفاده از تئوری لیاپانوف اثبات نمودیم. نشان دادیم با اعمال اغتشاش و نامعینی به سیستم، کنترل‌کننده جدید دارای ویژگی‌های همگرایی زمان محدود است. سرانجام، مقایسه‌ای بین کنترل‌کننده جدید طراحی شده با کنترل‌کننده مشابه از لحاظ زمان همگرایی انجام دادیم و اثبات کردیم کنترل‌کننده جدید، همگرایی سریع‌تری را فراهم می‌کند.

## مراجع

### References

- [1] X. Liu, S. Qi, R. Malekain, Z. Li, "Observer-based composite adaptive dynamic terminal sliding-mode controller for nonlinear uncertain SISO systems", *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 17, no. 1, pp. 94-106, Jan. 2019 (doi: 10.1007/s12555-018-0117-7).
- [2] S.J. Sheela, K.V. Suresh, D. Tandur, "Security of industrial wireless sensor networks: A review", *Proceeding of the IEEE/ITACT*, pp. 1-6, Bangalore, India, Dec. 2015 (doi: 10.1109/ITACT.2015.7492658).
- [3] M. Wollschlaeger, T. Sauter, J. Jasperneite, "The future of industrial communication: automation networks in the era of the internet of things and industry 4.0", *IEEE Industrial Electronics Magazine*, vol. 11, no. 1, pp. 17-27, March 2017 (doi: 10.1109/MIE.2017.2649104).
- [4] M. Wollschlaeger, T. Sauter, J. Jasperneite, "The future of industrial communication: Automation networks in the era of the internet of things and industry", *IEEE Industrial Electronics Magazine*, vol. 11, no. 1, pp. 17-27, March 2017 (doi: 10.1109/MIE.2017.2649104).
- [5] M.C. Pai, "Chaos control of uncertain time-delay chaotic systems with input dead-zone nonlinearity", *Complexity*, vol. 21, no. 3, pp. 13-20, Oct. 2016 (doi: org/10.1002/cplx.21611).
- [6] T.M. Hoang, "A Chaos-based image cryptosystem using nonstationary dynamics of logistic map", *Proceeding of the IEEE/ICTC*, pp. 591-596, Jeju Island, Korea (South), Oct. 2019 (doi: 10.1109/ICTC4669-1.2019.8939826).
- [7] E. Tlelo-Cuautle, C. Ramos-López, M. Sánchez-Sánchez, D. Pano-Azucena, A. Sánchez-Gaspariano, C. Núñez-Pérez, L. Camas-Anzueto, "Application of a chaotic oscillator in an autonomous mobile robot", *Journal of Electrical Engineering*, vol. 65, no. 3, pp. 157-162, June 2014 (doi: 10.2478/jee-2014-0024).
- [8] L. Minati, H. Ito, A. Perinelli, L. Riccy, L. Faec, N. Yushimura, Y. Koike, L. Minati, "Connectivity influences on nonlinear dynamics in weakly-synchronized networks: Insights from rössler systems, electronic chaotic oscillators, model and biological neurons", *IEEE Access*, vol. 7, pp. 174793-174821, Dec. 2019 (doi: 10.1109/ACCESS.2019.2957014).
- [9] A. Zhou, S. Wang, F. Wang, "Low-complexity and robust detection for hybrid chaos communication", *Proceeding of the IEEE/WCSP*, pp. 1-5, Xi'an, China, Dec. 2019 (doi: 10.1109/WCSP.2019.8927976).
- [10] S. Zhang, T. Gao, "A coding and substitution frame based on hyper-chaotic systems for secure communication", *Nonlinear Dynamics*, vol. 84, no. 2, pp. 833-849, Dec. 2016 (doi: 10.1007/s11071-015-2530-2).
- [11] R. Sedivy, R. M. Mader, "Fractals, chaos, and cancer: do they coincide?", *Cancer Investigation*, vol. 15, no. 6, pp. 601-607, June 1997 (doi: 10.3109/07357909709047603).
- [12] B. Xu, Y. Wang, L. Liu, "Twice pulse ignition boost strategy for missile guidance Based on improved particle swarm optimization algorithm", *Proceeding of the IEEE/CCC*, pp. 9907-9912, Wuhan, July 2018 (doi: 10.23919/ChiCC.2018.8484243).
- [13] M. Sciamanna, K. A. Shore, "Physics and applications of laser diode chaos", *Nature Photonics*, vol. 9, no. 3, pp. 151-162, Feb. 2015 (doi: 10.1038/nphoton.2014.326).
- [14] H. Dimassi, A. Loría, "Adaptive unknown-input observers-based synchronization of chaotic systems for telecommunication", *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 58, no. 4, pp. 800-812, Nov. 2010 (doi: 10.1109/TCSI.2010.2089547).
- [15] O. Rossler, "An equation for hyperchaos", *Physics Letters A*, vol. 71, no. 2-3, pp. 155-157, April 1979 (doi: 10.1016/0375-9601(79)90150-6).
- [16] E. Dong, Z. Zhang, M. Yuan, Y. Ji, X. Zhou, Z. Wang, "Ultimate boundary estimation and topological horseshoe analysis on a parallel 4D hyperchaotic system with any number of attractors and its multi-scroll", *Nonlinear Dynamics*, vol. 95, no. 4, pp. 3219-3236, March 2019 (doi: 10.1007/s11071-018-04751-3).
- [17] A. Hajipour, M. Hajipour, D. Baleanu, "On the adaptive sliding mode controller for a hyperchaotic fractional-order financial system", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 497, pp. 139-153, May 2018 (doi: 10.1016/j.physa.2018.01.019).
- [18] C. Zhou, C. Yang, D. Xu, C.-Y. Chen, "Dynamic analysis and finite-time synchronization of a new hyperchaotic system with coexisting attractors", *IEEE Access*, vol. 7, pp. 52896-52902, April 2019 (doi: 10.1109/ACCESS.2019.2911486).

- [19] F. F. Franco, E. L. Rempel, P. R. Muñoz, "Crisis and hyperchaos in a simplified model of magnetoconvection", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Article Number: 132417, May 2020 (doi: 10.1016/j.physd.2020.132417).
- [20] G. Leutcho, J. Kengne, L. K. Kengne, "Dynamical analysis of a novel autonomous 4-D hyperjerk circuit with hyperbolic sine nonlinearity: Chaos, antimonotonicity and a plethora of coexisting attractors", *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 107, pp. 67-87, Feb. 2018 (doi: 10.1016/j.chaos.2017.12.008).
- [21] Z. T. Njitacke, J. Kengne, H. Fotsin, "Coexistence of multiple stable states and bursting oscillations in a 4D Hopfield neural network", *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 39, pp. 3424-3444, Jan. 2020 (doi: org/10.1002/cplx.21611).
- [22] W. Tai, Q. Teng, Y. Zhou, J. Zhou, Z. Wang, "Chaos synchronization of stochastic reaction-diffusion time-delay neural networks via non-fragile output-feedback control", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 354, pp. 115-127, Aug. 2019 (doi: 10.1016/j.amc.2019.02.028).
- [23] T. Wang, D. Wang, K. Wu, "Chaotic adaptive synchronization control and application in chaotic secure communication for industrial Internet of Things", *IEEE Access*, vol. 6, pp. 8584-8590, Jan. 2018 (doi: 10.1109/ACCESS.2018.2797979).
- [24] L. Wang, M. Ding, "Dynamical analysis and passive control of a new 4D chaotic system with multiple attractors", *Modern Physics Letters B*, vol. 32, no. 22, Article Number: 1850260, Dec. 2018 (doi: 10.1142/S0217984918502603).
- [25] K. Rajagopal, H. Jahanbakhshi, M. Varan, I. Bayir, V. Pham, S. Jafari, A. Kartikian, "A hyperchaotic memristor oscillator with fuzzy based chaos control and LQR based chaos synchronization", *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, vol. 94, pp. 55-68, Jan. 2018 (doi: 10.1016/j.aeue.2018.06.043).
- [26] M. M. Zirkohi, "Chaos synchronization using higher-order adaptive PID controller", *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, vol. 94, pp. 157-167, Sep. 2018 (doi: 10.1016/j.aeue.2018.07.0-05).
- [27] S. Vaidyanathan, S. T. Kingni, A. Sambas, M. A. Mohamed, M. Mamat, "A new chaotic jerk system with three nonlinearities and synchronization via adaptive backstepping control", *International Journal of Engineering and Technology*, vol. 7, no. 3, pp. 1936-1943, Dec. 2018 (doi: 10.14419/ijet.v7i3.15378).
- [28] C. Huang, L. Cai, J. Cao, "Linear control for synchronization of a fractional-order time-delayed chaotic financial system", *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 113, pp. 326-332, Aug. 2018 (doi: 10.1016/j.chaos.20-18.05.022).
- [29] M.-H. Wang, S.-D. Lu, M.-J. Hsieh, "Application of extension neural network algorithm and chaos synchronization detection method to partial discharge diagnosis of power capacitor", *Measurement*, vol. 129, pp. 227-235, Dec. 2018 (doi: 10.1016/j.measurement.2018.07.022).
- [30] A. Mohammadzadeh, S. Ghaemi, O. Kaynak, "Robust predictive synchronization of uncertain fractional-order time-delayed chaotic systems", *Soft Computing*, vol. 23, no. 16, pp. 6883-6898, June 2019 (doi: 10.1002/cplx.21611).
- [31] Y. Yin, F. Liu, P. Shi, "Finite-time continuous gain-scheduled control on stochastic hyperchaotic systems", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 224, no. 6, pp. 679-688, Sept. 2010 (doi: 10.1243/09596518JSCE971).
- [32] E. D. Dongmo, K. S. Ojo, P. Wofo, A. N. Njah, "Difference synchronization of identical and nonidentical chaotic and hyperchaotic systems of different orders using active backstepping design", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 13, no. 5, April 2018 (doi: 10.1115/1.4039626).
- [33] S. Vaidyanathan, L. G. Dolvis, K. Jacques, C.-H. Lien, A. Sambas, "A new five-dimensional four-wing hyperchaotic system with hidden attractor, its electronic circuit realisation and synchronisation via integral sliding mode control", *International Journal of Modelling, Identification and Control*, vol. 32, no. 1, pp. 30-45, June 2019 (doi: 10.1504/IJMIC.2019.101959).
- [34] A. Modiri, S. Mobayen, "Adaptive terminal sliding mode control scheme for synchronization of fractional-order uncertain chaotic systems", *ISA Transactions*, vol. 105, pp. 33-50, Oct. 2020 (doi: 10.1016/j.isatra.2-020.05.039).
- [35] S. Mobayen, S. Javadi, "Disturbance observer and finite-time tracker design of disturbed third-order nonholonomic systems using terminal sliding mode", *Journal of Vibration and Control*, vol. 23, no. 2, pp. 181-189, April 2017 (doi: 10.1177/1077546315576611).
- [36] S. Mobayen, "An adaptive chattering-free PID sliding mode control based on dynamic sliding manifolds for a class of uncertain nonlinear systems", *Nonlinear Dynamics*, vol. 82, no. 1-2, pp. 53-60, May 2015 (doi: 10.1007/s11071-015-2137-7).
- [37] P.A. Hosseinabadi, A.S.S. Abadi, S. Mekhilef, H.R. Pota, "Chattering-free trajectory tracking robust predefined-time sliding mode control for a remotely operated vehicle", *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, pp. 1-19, May 2020 (doi: 10.1007/s40313-020-00599-4).

- [38] M. Zak, "Terminal attractors for addressable memory in neural networks", *Physics Letters A*, vol. 133, no. 1, pp. 18-22, Oct. 1988 (doi: 10.1016/0375-9601(88)90728-1).
- [39] X. Tong, Y. Liu, M. Zhang, H. Xu, Z. Wang, "An image encryption scheme based on hyperchaotic Rabinovich and exponential chaos maps", *Entropy*, vol. 17, no. 1, pp. 181-196, Dec. 2015 (doi: 10.3390/e17010181).
- [40] P.D.K. Kuate, Q. Lai, H. Fotsin, "Complex behaviors in a new 4D memristive hyperchaotic system without equilibrium and its microcontroller-based implementation", *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 228, no. 10, pp. 2171-2184, Oct. 2019 (doi: 10.1140/epjst/e2019-900032-5).
- [41] F. Nazarimehr, K. Rajagopal, J. Kengne, S. Jafari, V.T. Pham, "A new four-dimensional system containing chaotic or hyper-chaotic attractors with no equilibrium, a line of equilibria and unstable equilibria", *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 111, pp. 108-118, May 2018 (doi: 10.1016/j.chaos.2018.04.009).
- [42] V. Van Huynh, A.J. M. Khalaf, A. Alsaedi, T. Hayat, H.R. Abdolmohammadi, "A new memristive chaotic flow with a line of equilibria", *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 228, no. 10, pp. 2339-2349, Oct. 2019 (doi: 10.1140/cplx.900055-9).
- [43] K. Sun, X. Liu, C. Zhu, J. Sprott, "Hyperchaos and hyperchaos control of the sinusoidally forced simplified Lorenz system", *Nonlinear Dynamics*, vol. 69, no. 3, pp. 1383-1391, Feb. 2012 (doi: 10.1002/cplx.012-03540).
- [44] S. T. Tchinda, G. Mpame, A.N. Takougang, V.K. Tamba, "Dynamic analysis of a snap oscillator based on a unique diode nonlinearity effect, offset boosting control and sliding mode control design for global chaos synchronization", *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, vol. 30, no. 6, pp. 970-984, Sept. 2019 (doi: 10.1007/s40313-019-00518-2).
- [45] J. Kengne, G. D. Leutcho, A. N. K. Telem, "Reversals of period doubling, coexisting multiple attractors, and offset boosting in a novel memristive diode bridge-based hyperjerk circuit", *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, vol. 101, no. 3, pp. 379-399, Dec. 2019 (doi: 10.1007/s10470-018-1372-5).
- [46] A. Jeevarekha, S. Sabarathinam, K. Thamilaran, P. Philominathan, "Analysis of 4D autonomous system with volume-expanding phase space", *Nonlinear Dynamics*, vol. 84, no. 4, pp. 2273-2284, Feb. 2016 (doi: 10.1007/s11071-016-2644-1).
- [47] Z. Njitacke, J. Kengne, T.F. Fozin, B. Leutcha, H. Fotsin, "Dynamical analysis of a novel 4-neurons based Hopfield neural network: Emergences of antimonotonicity and coexistence of multiple stable states", *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 7, no. 3, pp. 823-841, Dec. 2019 (doi: 10.1007/s40435-019-00509-w).
- [48] V.F. Signing, J. Kengne, "Reversal of period-doubling and extreme multistability in a novel 4D chaotic system with hyperbolic cosine nonlinearity", *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 7, no. 2, pp. 439-451, June 2019 (doi: 10.1007/s40435-018-0452-9).
- [49] M. Chen, M. Sun, B. Bao, H. Wu, Q. Xu, J. Wang, "Controlling extreme multistability of memristor emulator-based dynamical circuit in flux-charge domain", *Nonlinear Dynamics*, vol. 91, no. 2, pp. 1395-1412, Nov. 2018 (doi: 10.1007/s11071-017-3952-9).
- [50] X. Zhang, H. Zhu, H. Yao, "Analysis of a new three-dimensional chaotic system", *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, no. 1, pp. 335-343, March 2012 (doi: 10.1007/s11071-011-9981-x).
- [51] P. Frederickson, J.L. Kaplan, E.D. Yorke, J.A. Yorke, "The Liapunov dimension of strange attractors", *Journal of Differential Equations*, vol. 49, no. 2, pp. 185-207, Aug. 1983 (doi: 10.1016/0022-0396(83)90011-6).
- [52] G. Qi, M.A. Wyk, B.J. Wyk, G. Chen, "On a new hyperchaotic system", *Physics Letters A*, vol. 372, no. 2, pp. 124-136, Jan. 2008 (doi: 10.1016/j.physleta.2007.10.082).
- [53] F.Y. Dalkiran, J.C. Sprott, "Simple chaotic hyperjerk system", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 26, no. 11, p. 1650189, Dec. 2016 (doi: 10.1142/S0218127416501893).
- [54] C. Li, J. C. Sprott, W. Thio, H. Zhu, "A new piecewise linear hyperchaotic circuit", *IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 61, no. 12, pp. 977-981, Sept. 2014 (doi: 10.1109/TCSII.2014.235691-2).
- [55] S. Vaidyanathan, "Analysis, adaptive control and synchronization of a novel 4-D hyperchaotic hyperjerk system via backstepping control method", *Archives of Control Sciences*, vol. 26, no. 3, pp. 311-338, Jan. 2016 (doi: 10.1515/acsc-2016-0018).
- [56] S. Zhang, Y. C. Zeng, Z. Jun Li, "A novel four-dimensional no-equilibrium hyper-chaotic system with grid multiwing hyper-chaotic hidden attractors", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 13, no. 9, Sept. 2018 (doi: 10.1115/1.4039980).
- [57] S. Vaidyanathan, "Analysis, control and synchronization of a novel 4-D highly hyperchaotic system with hidden attractors", *Advances in Chaos Theory and Intelligent Control: Springer*, pp. 529-552, April 2016 (doi: 10.1007/978-3-319-30340-6\_22).

- [58] H. Lin, C. Wang, Y. Tan, "Hidden extreme multistability with hyperchaos and transient chaos in a Hopfield neural network affected by electromagnetic radiation", *Nonlinear Dynamics*, vol. 99, no. 3, pp. 2369-2386, Dec. 2020 (doi: 10.1007/s11071-019-05408-5).
- [59] E.E. Mahmoud, "Dynamics and synchronization of new hyperchaotic complex Lorenz system", *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 55, no. 7-8, pp. 1951-1962, April 2012 (doi: 10.1016/j.mcm.2011.11.053).
- [60] M. Steinberger, M. Horn, L. Fridman, "Variable-Structure Systems and Sliding-Mode Control", ed: Springer, 2020 (ISBN: 978-3-030-36621-6).
- [61] A. Abdurahman, H. Jiang, Z. Teng, "Finite-time synchronization for memristor-based neural networks with time-varying delays", *Neural Networks*, vol. 69, pp. 20-28, Sept. 2015 (doi: 10.1016/j.neunet.2015.04.015).
- [62] C. Li, F. Zhang, "A survey on the stability of fractional differential equations", *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 193, no. 1, pp. 27-47, April 2011 (doi: 10.1140/epjst/e2011-01379-1).
- [63] X. Yu, M. Zhihong, "Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems", *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 2, pp. 261-264, Aug. 2002 (doi: 10.1109/81.983876).
- [64] X. Liu, S. Qi, R. Malekain, Z. Li, "Observer-based composite adaptive dynamic terminal sliding-mode controller for nonlinear uncertain SISO systems", *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 17, no. 1, pp. 94-106, January 2019 (doi: 10.1007/s12555-018-0117-7).
- [65] H. Bouslehi, H. Seddik, "A new rapid hyperchaotic system for more efficient 2D data encryption", *Multimedia Tools and Applications*, vol. 77, no. 6, pp. 7741-7762, May 2018 (doi: 10.1007/s11042-017-4675-0).

#### زیرنویس‌ها

1. Positive Lyapunov exponent
2. Bifurcation diagram
3. Lyapunov spectrum
4. Output feedback control
5. Adaptive control
6. Passive control
7. Optimal control
8. PID control
9. Adaptive back-stepping control
10. Linear control
11. Neural network
12. Predictive control
13. Stochastic control
14. Back-stepping design
15. Sliding mode control
16. Terminal sliding mode control
17. Chattering
18. Hyperbolic function
19. Exponential function
20. Chaotic attractors
21. Frequency spectrum
22. Equilibrium points
23. Kaplan-Yorke dimension
24. Eigenvalues
25. Poincare map
26. Divergence
27. Periodic
28. Quasi-periodic
29. Sliding surface
30. Reference model
31. Tracking errors