



فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری
سال هشتم / شماره بیست‌ونهم / بهار ۱۳۹۸

مدل پرتفوی بر مبنای میانگین-آنتروپی در محیط فازی: آنالیز حساسیت، هزینه‌های معامله بر پایه تئوری اعتبار

محمود لاری دشت بیاض

استادیار گروه حسابداری، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
m.lari@um.ac.ir

شعبان محمدی

کارشناسی ارشد حسابداری، موسسه آموزش عالی حکیم نظامی قوچان، قوچان، ایران (نویسنده مسئول)
shaban1362@gmail.com

نادر نقش بندی

استادیار گروه حسابداری، موسسه آموزش عالی حکیم نظامی قوچان، قوچان، ایران
nader_naghshbandi@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۹/۲۶ تاریخ پذیرش: ۹۶/۱۲/۲۲

چکیده

هدف این پژوهش بررسی مدل پرتفوی سهام بر مبنای میانگین-آنتروپی در محیط فازی با هزینه‌های معامله بر پایه تئوری اعتبار برای ۱۰ سهام از بورس اوراق بهادار تهران در سال ۱۳۹۶ است. پژوهش حاضر تنها مبتنی بر مدل‌های بر مبنای میانگین-آنتروپی نیست، بلکه آنالیز حساسیت درباره ضرائب تابع هدف و ضرائب محدودیت بویژه در حداکثرسازی مدل بازگشتی و مدل ریسک مینیمم را انجام داده است. از آنتروپی و آنالیز حساسیت برای اندازه‌گیری میزان ریسک و ضرائب تابع هدف و محدودیت استفاده شد. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد زمانی که ضرایب در محدوده مقادیر تغییر می‌کند یا جواب بهینه شده یا مقادیر ثابتی از تابع هدف بدست می‌آید. نتایج پژوهش به سرمایه‌گذاران کمک می‌کند تا بتوانند با اطمینان بیشتر انتخاب خود را انجام دهند.

واژه‌های کلیدی: آنالیز حساسیت، آنتروپی، هزینه‌های معامله، فازی.

۱- مقدمه

تشکیل پرتفوی دارایی‌ها همواره یکی از موضوع‌های مهم در مباحث مالی بوده است. تا اواخر قرن بیستم عمده تئوری‌های مالی به صورت موردی و غیر سیستماتیک مطرح شده بود. روش مبتنی بر میانگین-واریانس توسط ماکوویتز (۱۹۸۲) برای مساله انتخاب سبد سهام پیشنهاد شده است. قواعد اساسی مدل بر مبنای میانگین-واریانس این است که از بازده قابل انتظار سبد سهام به عنوان بازده سرمایه و از واریانس بازده سبد سهام به عنوان ریسک سرمایه‌گذاری استفاده شود. مدل‌های مبتنی بر مبنای میانگین-واریانس ماکوویتز، به دنبال ریسک مینیمم و بازده ماکزیمم، با استفاده از بعضی محدودیت‌ها، می‌باشند. اکثر مدل‌های منتخب پرتفوی موجود، بر پایه تئوری‌های احتمال هستند. مشکل انتخاب سبد سهام بر مبنای میانگین-واریانس توسط بسیاری از محققان عالی از جمله مرتون و همکاران (۱۹۸۴) مورد مطالعه قرار گرفته است. در بازار سرمایه‌گذاری واقعی، بسیاری از فاکتورهای غیراحتمالی بر روی بازار سرمایه‌گذاری اثرگذار می‌باشند. بعنوان مثال عدم قطعیت دارایی‌های پرخطر، بیشتر در عدم قطعیت محیط فازی دیده می‌شود. عدم قطعیت محیط فازی از عدم قطعیت احتمالی مهم‌تر است. لیو (۲۰۱۰) تئوری اعتبار را بر پایه سیستم معنی‌دار تعداد محیط فازی ارائه داد. بر اساس تئوری اعتبار، بسیاری از محققان میانگین‌ها و واریانس‌های محیط فازی را در مدل پرتفوی مورد بررسی قرار داده‌اند. مفهوم آنتروپی در محیط فازی توسط لیو (۲۰۱۰)، برای اندازه‌گیری عدم قطعیت متغیرهای محیط فازی تعریف شده است. لیو (۲۰۱۰) بحث و مطالعه عمیقی در مورد تئوری اعتبار با استفاده از بعضی از مفاهیم پایه و نظریه‌های اساسی ارائه داد. لیو (۲۰۱۰) همچنین یک مدل برنامه‌ریزی محدود تصادفی را پیشنهاد داد و یک الگوریتم ژنتیک طراحی کرد تا بتواند آن را حل کند. بیشتر کارهای تحقیقاتی طوری صورت گرفته است که نرخ بازده به عنوان تعداد محیط فازی در نظر گرفته شده است (امیری و همکاران، ۲۰۱۱). هم‌زمان به این نکته توجه شده که ریسک می‌تواند توسط آنتروپی هم اندازه‌گیری شود. فیلیپاتوس (۱۹۷۲) به این نکته اشاره دارد که آنتروپی جامع‌تر از واریانس برای اندازه‌گیری ریسک است، به این خاطر که، آنتروپی هیچ‌گونه وابستگی به توزیع‌های احتمالی متقارن ندارد و می‌تواند از داده‌های غیرقابل اندازه‌گیری محاسبه شود. هوآنگ (۲۰۱۱) مدل‌های بر مبنای میانگین-آنتروپی را برای انتخاب پرتفوی در محیط فازی و مدل‌های بر مبنای میانگین-ریسک را برای مدل‌های پرتفوی دارای عدم قطعیت مورد مطالعه قرار داد. موکش (۲۰۱۶) مدل‌های بر مبنای میانگین-آنتروپی را برای انتخاب پرتفوی چند مرحله‌ای با سطوح جذب چندمنظوره ارائه داد. ژو (۲۰۱۵) یک مدل آنتروپی ترکیبی بر مبنای میانگین-واریانس برای انتخاب پرتفوی با بازده در محیط فازی را ارائه داد. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که مدل‌های پیشنهادی عموماً بهتر از مدل‌های انتخاب پرتفوی سنتی اجرا می‌شود. در گذشته، بسیاری از محققان مدل‌های انتخاب پرتفوی در محیط فازی را با وجود تمام محدودیت‌های پیچیده مورد مطالعه قرار می‌دادند. ژانگ (۲۰۱۱) مدل‌های پرتفوی پیچیده تری با هزینه‌های معامله و وام و استقراض در نظر گرفته شده است. لی (۲۰۰۷) کارهای تحقیقاتی بروی آنتروپی توزیع اعتبار متغیرهای محیط فازی که پایه و اساس آنتروپی در محیط فازی بوده انجام داده است. لیو (۲۰۱۱) مشکل انتخاب پرتفوی را با بازده با فاصله ارزشمند که در آن ریسک با انحراف معیار اندازه‌گیری شده است حل کرد.

لیو (۲۰۱۱) همچنین یک مدل بهینه پرتفوی در محیط فازی را مورد مطالعه قرار داد. کین (۲۰۰۹) آنتروپی-ضربداری در محیط فازی را در انتخاب پرتفوی در نظر گرفت. ژو (۲۰۱۵) یک مدل بهینه پرتفوی را که بر پایه آنتروپی اطلاعات با سری های زمانی نامعین بود را مورد مطالعه قرار داد، هر دو مدل که براساس آنتروپی هستند بهتر از مدل های سنتی هستند و مدل های پیش بینی سری های زمانی در محیط فازی به بهبود بیشتر عملکرد واقعی کمک می کند. یوئه (۲۰۱۷) یک مدل چند هدفه محیط فازی و مدل انتخاب پرتفوی لحظات سفارش بالا برای پرتفوی های مختلف را مورد مطالعه قرار داد و یک الگوریتم متحول شده چندهدفه موثر طراحی کرد. چن (۲۰۰۴) کارهای تحقیقاتی بر روی یک الگوریتم ترکیبی برای پرتفوی در محیط فازی با هزینه های معامله انجام داد. از آنجایی که در واقع مدل پرتفوی یک مدل بهینه است. آنالیز حساسیت نقش مهمی را در متدهای بهینه سازی ایفا می کند. اکثر محققان توجه کمی به آنالیز حساسیت در مدل پرتفوی داشتند. در این پژوهش از بازده مورد انتظار پرتفوی به عنوان بازده سرمایه گذاری و آنتروپی در محیط فازی بازده پرتفوی به عنوان ریسک سرمایه گذاری استفاده می شود. همچنین به این نکته توجه شده که هزینه های معامله یک عامل مهم در سرمایه گذاری پرتفوی است.

۲- مبانی نظری و پیشینه پژوهش

۲-۱- اعتبار، ارزش مورد انتظار و آنتروپی

مفهوم دسته ها در محیط فازی توسط زاده (۱۹۷۸) ارائه شد. به منظور اندازه گیری یک دسته در محیط فازی مفهوم اندازه گیری احتمالی را پیشنهاد داد. اگرچه اندازه گیری احتمالی به صورت گسترده ای استفاده می شود، اما از قانون بیان حقیقت پیروی نمی کند و با قانون میانه رویی و قانون تناقض سازگاری ندارد. دلیل اصلی آن است که اندازه گیری احتمالی هیچ گونه ویژگی خود دوگانگی ندارد. با این حال، اندازه گیری خود دوگانگی به طور کامل هم در تئوری و هم در عمل لازم است. لیو (۲۰۱۰) اندازه گیری اعتبار را با خود دوگانگی و با اصول ریاضی سختگیرانه ای تعریف کرد. نقطه حیاتی تئوری اعتبار خود دوگانگی است. زمانی که مقدار اعتبار یک رویداد با محیط فازی ۱ بدست می آید، رویداد با محیط فازی به طور قطع اتفاق خواهد افتاد. بنابراین، اعتبار را به عنوان اندازه گیری امکان رخداد یک رویداد با محیط فازی در این پژوهش اتخاذ شده است. آقای و همکاران (۱۳۹۵) به بررسی جامع روابط درونی ساختار سرمایه، جریان های وجه نقد آزاد، آنتروپی تنوع پذیری محصولات و عملکرد شرکت پرداختند. نتایج نشان داد اهرم بدهی بر روی تنوع پذیری محصولات تأثیر مثبت و معنادار، شاخص کیوتوبین بر تنوع پذیری محصولات تأثیر منفی و معنادار، تنوع پذیری محصولات و شاخص کیوتوبین بر اهرم بدهی تأثیر مثبت و معنادار می گذارند. بهزادی و بختیاری (۱۳۹۳) مدلی بر مبنای میانگین-آنتروپی -چولگی برای حل مساله بهینه سازی پرتفوی ارائه دادند که دارای شاخص عملکرد اقتصادی بالاتری است.

تعریف ۱-۲-۱- فرض کنیم ξ یک متغیر در محیط فازی با درجه عضویت μ و عدد حقیقی x باشد. آنگاه برای هر دسته A عضو R اعتبار یک رویداد در محیط فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Cr\{\xi \in A\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in A} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in A^c} \mu(x) \right) \quad \text{رابطه (۱)}$$

فرمول بالا همچنین به عنوان قضیه اعتبار معکوس شناخته می‌شود، برعکس اگر ξ یک متغیر در محیط فازی باشد سپس درجه عضویت آن نشأت گرفته از اندازه‌گیری اعتبار است بوسیله:

$$\mu(x) = (2Cr\{\xi = x\} \wedge 1), \quad x \in R \quad \text{رابطه (۲)}$$

تعریف ۱-۲-۲- فرض کنیم ξ یک متغیر در محیط فازی باشد، سپس ارزش مورد انتظار آن به صورت زیر است:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} Cr\{\xi \geq x\} dx - \int_{-\infty}^0 Cr\{\xi \leq x\} dx \quad \text{رابطه (۳)}$$

به شرطی که حداقل یکی از دو انتگرال بالا محدود باشد.

تعریف ۱-۲-۳- فرض کنیم ξ یک متغیر در محیط فازی پیوسته باشد، سپس آن‌تروپی آن به صورت زیر است:

$$H[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(Cr\{\xi = x\}) dx \quad \text{رابطه (۴)}$$

که

$$S(t) = -t \ln t - (1-t) \ln(1-t)$$

آن‌تروپی در محیط فازی برای اندازه‌گیری عدم قطعیت مربوط به هر یک از متغیرها در محیط فازی استفاده می‌شود. اگر ξ درجه عضویت پیوسته μ دارد، آنگاه داریم $Cr\{\xi = x\} = \frac{\mu(x)}{2}$ برای هر x عضو R . در این مورد به سادگی می‌توان اثبات کرد که آن‌تروپی آن است:

$$H[\xi] = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\mu(x)}{2} \ln \frac{\mu(x)}{2} + \left(1 - \frac{\mu(x)}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{\mu(x)}{2} \right) \right) dx \quad \text{رابطه (۵)}$$

مثال ۱-۲ یک متغیر در محیط فازی مثلثی شکل به صورت کامل توسط سه تایی (a,b,c) از اعداد حقیقی که $a < b < c$ است اندازه گیری شده است و درجه عضویت آن به صورت زیر داده شده است:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{if } a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{if } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{رابطه (۶)}$$

با استفاده از فرمول $Cr\{\xi \leq x\} + Cr\{\xi \geq x\} = 1$ داریم:

$$Cr\{\xi \leq x\} = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq a \\ \frac{x-a}{2(b-a)}, & \text{if } a \leq x \leq b \\ \frac{x+c-2b}{2(c-b)}, & \text{if } b \leq x \leq c \\ 1, & \text{if } x \geq c \end{cases} \quad \text{رابطه (۷)}$$

$$Cr\{\xi \geq x\} = \begin{cases} 1, & \text{if } x \leq a \\ \frac{2b-a-x}{2(b-a)}, & \text{if } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{2(c-b)}, & \text{if } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{if } x \geq c \end{cases} \quad \text{رابطه (۸)}$$

مثال ۲-۲ متغیر در محیط فازی مثلث شکل (a, b, c) = ξ یک ارزش مورد انتظار دارد:

$$E[\xi] = \frac{a+2b+c}{4} \quad \text{رابطه (۹)}$$

مثال ۳-۲ فرض کنیم ξ یک متغیر در محیط فازی مثلثی شکل (a,b,c) باشد، آنگاه آنتروپی آن است:

$$E[\xi] = \frac{c-a}{2} \quad \text{رابطه (۱۰)}$$

قضیه ۱-۲ فرض کنیم ξ و η متغیرها در محیط فازی مستقل با مقادیر مورد انتظار محدود باشد. آنگاه برای هر عدد a و b داریم:

$$E[a\xi + b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta] \quad \text{رابطه (۱۱)}$$

قضیه ۲-۲ فرض کنیم ξ یک متغیر در محیط فازی دارای عدم قطعیت باشد و c یک عدد حقیقی باشد، آنگاه:

$$H[\xi + c] = H[\xi] \quad \text{رابطه (۱۲)}$$

قضیه ۲-۳ فرض کنیم ξ و η متغیرها در محیط فازی مستقل باشند. آنگاه برای هر کدام از اعداد حقیقی a و b داریم:

$$E[a\xi + b\eta] = |a|H[\xi] + |b|H[\eta] \quad \text{رابطه (۱۳)}$$

در مسأله انتخاب پرتفوی، از زمانی که عدم قطعیت باعث ضرر شود، از آنتروپی برای ارزیابی درجه ریسک یک پرتفوی استفاده می‌کنیم. در مدل پرتفوی به هر اندازه که ارزش پرتفوی کمتری داشته باشیم، عدم قطعیت بازده پرتفوی کمتری داریم و در نتیجه پرتفوی ایمن تری داریم. بنابراین در این پژوهش، آنتروپی پرتفوی به عنوان معیار اندازه‌گیری ریسک در نظر گرفته شده است.

۳- روش شناسی پژوهش

۳-۱- مدل بر مبنای میانگین-آنتروپی با هزینه‌های معامله

ماکویتز (۱۹۸۲) مدل پرتفوی بر مبنای میانگین-واریانس کلاسیک را با سرمایه‌گذاری با بازده ماکزیمم برای یک سطح ریسک پیش فرض و با سرمایه‌گذاری با ریسک مینیمم برای یک سطح بازده سرمایه‌گذاری پیشفرض، پیشنهاد شده کرد. در این پژوهش قواعد منتخب ماکویتز (۱۹۸۲) را حفظ می‌نماییم: استفاده کردن از مقدار مورد انتظار به عنوان معیار اندازه‌گیری بازده، اما آنتروپی را به عنوان معیار اندازه‌گیری ریسک استفاده می‌نماییم. مدل پرتفوی بر مبنای میانگین-آنتروپی در محیط فازی با هزینه‌های معامله پیشنهاد داده خواهد شد. برای راحتی کار، نشانه‌گذاری‌های زیر را معرفی می‌نماییم: فرض کنیم x_i سرمایه‌گذاری بروی دارای نام $(i=1,2,3,\dots,n)$ باشد و فرض کنیم ξ_i آامین متغیر در محیط فازی که مشخص کننده نرخ بازده آمین دارایی است باشد. تصور کنید یک سرمایه‌گذار ثروت خود را بر روی n دارایی پرخطر با مقادیر سرمایه‌گذاری برداری $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ سرمایه‌گذاری می‌کند. فرض کنید که هزینه‌های معامله یک تابع V شکل که از تفاوت بین یک پرتفوی جدید $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ و پورتفولیوی مبنا $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ است. به عبارت دیگر، هزینه معامله x از دارایی‌های پرخطر می‌تواند $c_i(x_i) = k_i |x_i - x_i^0|$ توصیف شود، که در اینجا k_i نرخ ثابت هزینه‌های معامله برای دارایی‌های پرخطر است. بنابراین، هزینه معامله نهایی در پورتفولیو $b = x = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ وسیله $c(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i) = \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^0|$ بدست می‌آید. طبق نظر مارکوویتز بازده متناظر پرتفوی بعد از پرداخت هزینه‌های معامله بوسیله این فرمول بدست می‌آید، $r = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i -$

فرض به صورت زیر پیشنهاد کنیم: $\sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^0|$ بدین ترتیب، می توانیم مدل بازده ماکزیمم با هزینه های معامله برای یک مقدار ریسک پیش

$$\begin{cases} \max E[r] = E \left[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^0| \right] \\ \text{s.t. } H[r] = H \left[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^0| \right] \leq \alpha \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{رابطه (۱۴)}$$

که α بیشترین آنتروپی است که سرمایه گذاران می توانند متحمل شوند، که بدین معناست که ریسک بیشتر از مقدار α نیست و α توسط سرمایه گذاران طبق عملکردشان نسبت به ریسک کردن داده می شود. مدل ریسک سرمایه گذاری مینیمم با هزینه معامله برای یک حد پیش فرض از بازده برابر است با:

$$\begin{cases} \min E[r] = E \left[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^0| \right] \\ \text{s.t. } H[r] = H \left[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^0| \right] \geq \beta \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{رابطه (۱۵)}$$

که β کمترین حد بازده است که برای سرمایه گذاران راضی کننده است، که بدین معناست که بازده کمتر از مقدار β نیست و β توسط سرمایه گذاران طبق عملکردشان نسبت به ریسک کردن داده می شود. اکنون، پرتفوی را در نظر می گیریم با n دارایی، تصور کنید بازده دارایی در محیط فازی متغیرهایی در محیط فازی مثلثی شکل هستند $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$ مقدار x_i که مستقل است برای $i=1, 2, 3, \dots, n$ ، آنگاه با توجه به فرمول (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$E[r] = E \left[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^0| \right] = \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^0| \quad \text{رابطه (۱۶)}$$

$$E[r] = E \left[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^0| \right] = \sum_{i=1}^n |x_i| H[\xi_i] = \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{c_i - a_i}{2} \right) \quad (x_i \geq 0) \quad \text{رابطه (۱۷)}$$

در فرمول (۱۷)، $x_i \geq 0$ بدین معناست که پرتفوی بدون فروش کوتاه است. بنابراین، هنگامی که متغیرها در محیط فازی مثلثی شکل هستند، مدل‌های (۱۴) و (۱۵) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{cases} \max E[r] = \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^0| \geq \alpha \\ \text{s.t. } H[r] = \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{c_i - a_i}{2} \right) \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{رابطه (۱۸)}$$

$$\begin{cases} \min H[r] = \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{c_i - a_i}{2} \right) \\ \text{s.t. } E[r] = \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) - \sum_{i=1}^n k_i |x_i - x_i^0| \geq \beta \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{رابطه (۱۹)}$$

۴- یافته‌های پژوهش

۴-۱- آنالیز حساسیت

به منظور نشان دادن تاثیرگذاری مقدار مورد نظر پیشنهاد شده و آنتروپی، یک مثال واقعی پرتفوی را در نظر می‌گیریم. در این مثال ده سهام از بازار بورس اوراق بهادار تهران را در نظر گرفته ایم. بازده آنها $\xi = (a_i, b_i, c_i)$ به عنوان اعدادی در محیط فازی مثلثی شکل در نظر گرفته شده اند و نرخ معامله دارایی‌های پرخطر $k_i \equiv 0.005$ ($i = 1, 2, \dots, 10$) می‌باشد. براساس داده‌های قدیمی، اطلاعات آینده، نظرات کارشناسان و سازمان «بانک اطلاعات مالی» داده‌های زیر را بدست می‌آوریم:

۴-۲- آنالیز حساسیت مدل پورتفولیو بازده ماکزیمم

طبق داده‌های جدول ۱ می‌توانیم بازده ماکزیمم مدل پورتفولیو خطی زیر را بدست آوریم:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{10})^T, k_i = 0.005 \text{ و } \alpha = 1.875$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max r = 2.095x_1 + 1.570x_2 + 2.445x_3 + 1.595x_4 + 1.770x_5 + 2.12x_6 + \\ \quad 1.995x_7 + 2.745x_8 + 1.045x_9 + 1.945x_{10} \\ \text{s. t. } H = 1.9x_1 + 1.35x_2 + 2.1x_3 + 1.7x_4 + 1.95x_5 + 1.85x_6 + 1.9x_7 + 2.3x_8 \\ \quad + 1.7x_9 + 2.0x_{10} \leq 1.875 \\ \quad x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1 \\ \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10 \end{array} \right. \quad \text{رابطه (۲۰)}$$

طبق مدل (۲۰)، هنگامی که ضرایب تابع هدف معین یا محدودیت ها در سمت راست مساله تغییر می کنند، آنگاه: بیشتر بر روی راه حل های بهینه و اساسی تمرکز داریم و این که مقدار هدف چگونه تغییر می کند. در ادامه، به صورت کاملاً دقیق حساسیت مدل را آنالیز می کنیم (۲۰).

جدول ۱- بازده در محیط فازی ۱۰ اوراق بهادار و مقادیر قابل انتظار متناظر و آنتروپی ها (واحد در سهام)

Security i	a_i	b_i	c_i	$E[\xi_i] = \frac{a_i + 2b_i + c_i}{4}$	$H[\xi_i] = 0.5(c_i - a_i)$
1	-0.6	2.11	3.7	1.83	2.15
2	-0.2	1.8	2.5	1.47	1.35
3	-0.4	3.2	4.2	2.55	2.3
4	-0.7	2.4	3.1	1.80	1.9
5	-0.8	2.6	3.5	1.97	2.15
6	-0.2	2.4	4.1	2.17	2.15
7	-0.9	2.1	3.6	1.72	2.25
8	-0.3	3.3	4.8	2.77	2.55
9	-0.7	2.3	2.5	1.60	1.60
10	-0.2	2.6	3.4	2.10	1.80

۴-۳- آنالیز حساسیت ضرائب تابع هدف در مدل بازده ماکزیمم

در ابتدا با حل مدل (۲۰) جواب های بهینه زیرا به دست می آوریم: بدیهی است، متغیرهای اصلی مدل x_2 و x_8 هستند و بقیه متغیرهای فرعی می باشند. بعلاوه آنالیز حساسیت را برای ضرائب تابع هدف با استفاده از نرم افزار لینگو^۱ انجام می دهیم. نتایج آنالیز حساسیت متناظر مقدار ضریب c_1 ، در زمانی که متغیرهای اصلی غیرقابل تغییر هستند، میزان افزایش مجاز و میزان کاهش مجاز بی نهایت می باشد، بنابراین بازه ضریب را مشخص می کند. در این حالت، متغیرهای اصلی بدون تغییر هستند، شرایط محدودیت بدون تغییر هستند بنابراین جواب بهینه هم بدون تغییر می باشد. در واقع، ضریب تابع هدف مقداری تغییرات دارد و این بر روی مقدار تابع هدف تأثیر می گذارد. به طور کلی، دو حالت زیر در آنالیز حساسیت ضریب تابع هدف وجود دارد: ضریب متغیر اصلی و ضریب متغیر فرعی. حالت ۱ اگر ضریب متغیر اصلی در محدوده مورد نظر تغییر کند، متغیر اصلی بهینه و جواب بهینه ثابت خواهند ماند. اما مقدار تابع هدف زمانی که مقادیر متغیرهای اصلی غیر صفر باشند تغییر نخواهد کرد مثل x_2 و x_8 . حالت ۲ اگر ضریب متغیر فرعی در محدوده مورد نظر تغییر کند، متغیر

اصلی بهینه و جواب بهینه بدون تغییر خواهند ماند. مقدار تابع هدف هم زمانی که مقدار متغیرهای فرعی صفر باشند تغییر نخواهد کرد $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ و صفر با هر عددی که غیر صفر است تکثیر خواهد شد. طبق دو حالت ذکر شده، می‌توانیم داده‌های زیر را در جدول ۲ بدست آوریم: به منظور نشان دادن اهمیت آنالیز حساسیت، در ادامه به صورت کامل مقادیر مختلف C_1 و C_2 را در مدل‌های مورد بحث قرار می‌گیریم: طبق مدلهای می‌توانیم داده‌های زیر را زمانی که C_1 و C_2 در جدول ۳ و ۴ هستند، بدست آوریم. جدول ۳ نشان می‌دهد زمانی که C_1 تغییر می‌کند مقدار تابع هدف و جواب بهینه و متغیر اصلی بهینه بدون تغییر است. جدول ۴ نشان می‌دهد زمانی که C_2 تغییر می‌کند مقدار و جواب بهینه و متغیر اصلی بهینه بدون تغییر است. اما مقدار تابع هدف قابل تغییر است. بعلاوه می‌توانیم شکل ۱ را در مورد مقدار C_2 و مقدار تابع هدف رسم نماییم: در مدل (۲۳)، از زمانی که x_2 یک متغیر اصلی است، هرگاه ضریب C_2 در محدوده آنالیز حساسیت تغییر می‌کند، جواب و متغیرهای اصلی غیر قابل تغییر هستند اما تابع هدف تغییر خواهد کرد. از شکل ۱ می‌توانیم ببینیم زمانی که ضریب C_2 افزایش می‌یابد مقدار تابع هدف مورد نظر هم تغییر خواهد کرد.

۴-۴- آنالیز حساسیت محدودیت‌ها در سمت راست مسأله در مدل بازده ماکزیمم

در ادامه، آنالیز حساسیت محدودیت در سمت راست مسأله با استفاده از نرم‌افزار لینگو در مدل بدست می‌آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max r = 2.148x_1 + 1.612x_2 + 2.751x_3 + 1.840x_4 + 2.029x_5 + 1.994x_6 + \\ \quad 2.018x_7 + 2.659x_8 + 1.361x_9 + 1.729x_{10} \\ \text{s. t. } H = 1.9x_1 + 1.35x_2 + 2.1x_3 + 1.7x_4 + 1.95x_5 + 1.85x_6 + 1.9x_7 + 2.3x_8 \\ \quad + 1.7x_9 + 2.0x_{10} \leq \alpha_1 \\ \quad x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1 \\ \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10 \end{array} \right. \quad \text{رابطه (۲۴)}$$

جدول ۲- تغییرات زمانی ضرایب هدف در بعضی محدوده‌ها در مقایسه با جواب بهینه (۲۱) در مدل (۲۰)

مقدار بهینه	جواب بهینه	متغیر اصلی	ضریب هدف	متغیر هدف
بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر	2.148	x_1
تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر	1.612	x_2
بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر	2.751	x_3
بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر	1.840	x_4
بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر	2.029	x_5
بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر	1.994	x_6
بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر	2.018	x_7
تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر	2.659	x_8
بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر	1.361	x_9
بدون تغییر	بدون تغییر	بدون تغییر	1.729	x_{10}

جدول ۳- جواب های مشابه و مقادیر هدف مشابه با مقادیر مختلف C_1 در مدل (۲۲)

c_1	r^*	مقدار بهینه، جواب، متغیر اصلی
0	2.3701	بدون تغییر
0.14	2.371	بدون تغییر
0.27	2.371	بدون تغییر
0.56	2.371	بدون تغییر
0.94	2.371	بدون تغییر
1.42	2.371	بدون تغییر
1.52	2.371	بدون تغییر
2.10	2.371	بدون تغییر
2.14	2.371	بدون تغییر

جدول ۴- جواب های مشابه و مقادیر هدف مشابه با مقادیر مختلف C_2 در مدل (۲۳)

c_1	r^*	جواب، متغیر اصلی	مقدار بهینه
1.524	۲,۲۱۹	بدون تغییر	تغییر
1.754	۲,۳۶۴	بدون تغییر	تغییر
1.967	۲,۴۸۷	بدون تغییر	تغییر
2.157	۲,۵۹۴	بدون تغییر	تغییر
2.391	۲,۶۸۷	بدون تغییر	تغییر
2.558	۲,۷۸۳	بدون تغییر	تغییر
2.710	۲,۸۰۸	بدون تغییر	تغییر
2.862	۲,۹۱۱	بدون تغییر	تغییر

در سمت راست مسأله اخیر مدل (۲۴) مقدار α مشخص است. با استفاده از آنالیز حساسیت در زمانی که متغیرهای اصلی غیرقابل تغییر هستند. اگرچه متغیر اصلی بهینه بدون تغییر است، اما در این حالت شرایط محدودیت های موردنظر تغییر می کند، بنابراین جواب بهینه موردنظر و مقدار تابع به خوبی تغییر خواهد کرد. در راه حل مشابهی، آنالیز حساسیت سمت راست مسأله اخیر در محدودیت های $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ است که توسط بدست آمده است. زمانی که متغیر اصلی بدون تغییر است میزان افزایش مجاز و میزان کاهش مجاز نیز مشخص است. جدول ۵ نشان می دهد زمانی که α در بازه بازه مدنظر تغییر می کند، متغیر اصلی بهینه غیرقابل تغییر است، اما جواب بهینه و مقدار تابع هدف قابل تغییر هستند.

۵- نتیجه گیری و بحث

انتخاب پرتفوی بهینه، یکی از مسایل مهم مورد بحث بوده و با پژوهشهایی که در این زمینه صورت گرفته، الگوهای برای تعیین پرتفوی ارائه شده که به مرور زمان ایرادات هرکدام مشخص و الگویی دیگر، جایگزین آن گردیده است. بازده داراییها همواره با عدم اطمینان است و همواره در طی زمان نوسانات غیرمنتظره ای در بازدهی داراییها از جمله سهام روی میدهد. منطق فازی میتواند یکی از گزینه های مناسب برای مدل کردن بازده داراییها باشد. از مزایای استفاده از آنتروپی، عدم وابستگی این معیار به تقارن تابع توزیع است به این معنی که برخلاف واریانس به دلیل عدم تقارن توزیع بازده دارایی، کارایی خود را از دست نمیدهد. از طرفی برخی دیگر از محققان به این نتیجه رسیدند که سرمایه گذاران ترجیح میدهند که درجه بالاتری از چولگی را انتخاب کنند (بهزادی و بختیاری، ۱۳۹۳). در این پژوهش، مدل نمونه برداری میانگین آنتروپی فازی با هزینه های مبادله بر اساس نظریه اعتبار ارائه شده است. آنتروپی به عنوان اندازه گیری خطر استفاده شد. علاوه بر این، تجزیه و تحلیل حساسیت برای ضرایب عملکرد هدف و ضرایب محدودیت در سمت راست در مدل های پیشنهادی مورد بحث قرار گرفته است. علاوه بر این، دو مثال عددی برای نشان دادن اثربخشی مدل پیشنهادی و امکان سنجی تحلیل حساسیت ارائه شد. مهمتر از همه، نتایج به دست آمده نیز نشان می دهد که وقتی ضریب خاصی در برخی از محدوده ارزش تغییر می کند، باز هم می توانیم راه حل های مطلوب بدون تغییر یا مقادیر تابع هدف بدون تغییر را بدست آورد. در مقایسه با هوانگ (۲۰۱۱)، این پژوهش نه تنها مدل های آنتروپی متوسط بلکه کار تحقیقاتی را بر روی تحلیل حساسیت در مورد هدف ضریب عملکرد و ضریب محدودیت در حداکثر رساندن مدل بازده و به حداقل رساندن مدل ریسک پیشنهاد می دهد. نتایج این پژوهش می تواند گزینه های بیشتری برای سرمایه گذاران در بازار مالی عملی ارائه دهد. مدل ها با مبنای میانگین-آنتروپی با هزینه های معامله بر پایه تئوری اعتبار در پژوهش در نظر گرفته شده است. بعلاوه، عمیقاً در آنالیز حساسیت درباره ی محدودیت های هدف و ضرائب درست محدودیت تحقیق و بررسی شد. داده های و جدول های مثال عددی نشان داد که مدل پیشنهادی مؤثر و آنالیز حساسیت مفید است. لازم بذکر است که نتایج آنالیز حساسیت نشان داد زمانی که ضرائب هدف مورد نظر و ضرائب محدودیت ها در یک بازه تعیین شده تغییر می کنند، متغیرهای اصلی مورد نظر و جواب بهینه و مقادیر تابع هدف چگونه تغییر می کنند. خصوصاً نتایج دو مثال عددی نشان داد اگر نرخ بازده بعضی از دارایی های پرخطر در یک بازه تعیین شده تغییر کند و دیگر شرایط تغییر نکند، آنگاه سرمایه گذار کماکان می تواند مقادیر تابع هدف بهینه ی مشابهی را بدست می آورد و همچنین بازده مورد انتظار مشابهی خواهد داشت. هوانگ (۲۰۱۱) مدل ها بر مبنای میانگی-آنتروپی را پیشنهاد داد و یک الگوریتم هوشمند ترکیبی را برای مدل ها ارائه داد. هوانگ (۲۰۱۱) یک منحنی ریسک معرفی کرد و یک مدل بر مبنای میانگین-ریسک بوجود آورد. پژوهش حاضر فقط مدل های بر مبنای میانگین-آنتروپی در محیط فازی با هزینه های معامله بر پایه ی تئوری اعتبار را ارائه نداد، بلکه تحقیقات گسترده ای در زمینه آنالیز حساسیت درباره مدل بازده ماکزیمم و مدل ریسک مینیمم انجام داده است. در مقایسه با هوانگ (۲۰۱۱) نتایج ما اطلاعات بیشتری راجع به استراتژی های سرمایه گذاری بهینه را فراهم کرد و این پژوهش می تواند شانس های سرمایه گذاری

بیشتری را به سرمایه‌گذاران بدهد. نتایج آنالیز حساسیت برای سرمایه‌گذاران طبق عملکردشان برای بازده و ریسک در بازارهای مشترک مالی راهنمای نظری فراهم کرده است. در آینده ای نزدیک، چندین پارامتر از توابع هدف و شرایط محدودیت‌ها به صورت همزمان باهم تغییر می‌کنند. این محققان را وادار می‌کند تا بر روی چگونگی تأثیرگذاری اثر متقابل و محدودیت‌های مشترک میان پارامترها بر روی جواب بهینه و ریسک و بازده سرمایه‌گذاری تحقیق کنند. این نتایج شانس‌های بیشتری را برای تصمیم‌گیرندگان سرمایه‌گذاری ایجاد می‌کند و برای تحقیقات مشابه پرتفوی می‌تواند به عنوان راهنما باشد. برای پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌گردد از سایر روش‌ها مانند سیستم‌های عصبی، روش‌های هیبریدی و... برای آنالیز حساسیت مدل پرتفوی در محیط فازی استفاده شود و نتایج حاصله با هم مقایسه گردند. همچنین می‌توان محدودیت‌های مانند محدودیت بودجه را به مدل اضافه کرد.

فهرست منابع

- * بهزادی، عادل؛ بختیاری، مصطفی (۱۳۹۵). ارائه مدلی بر مبنای میانگین-آنتروپی-چولگی برای بهینه سازی سبد سهام در محیط فازی، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره نوزدهم، صص ۳۹-۵۵.
- * آقایی، محمد علی؛ سیاسی، سحر؛ کاظم‌پور، مرتضی (۱۳۹۵). بررسی جامع روابط درونی ساختار سرمایه، جریان وجه نقد آزاد، آنتروپی تنوع‌پذیری محصولات و عملکرد (شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران)، فصلنامه دانش سرمایه‌گذاری، دوره ۵، شماره ۲۰، صص ۲۲۳-۲۴۲.
- * Markowitz H, (1952), Portfolio selection. J. Financ. 7, 77-91.
- * * Markowitz, H, (1959), Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment. Wiley, New York.
- * Markowitz, H.: Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Basil Blackwell, Oxford (1987).
- * Best J., Hlouskova J., (2000), The efficient frontier for bounded assets. Math. Methods Oper. Res. 52, 195-212.
- * Merton R., (1972), An analytic derivation of the efficient frontier. J. Financ. Quantit. Anal. 9, 1851-1872.
- * Pang J., (1980), A new efficient algorithm for a class of portfolio selection problems. Oper. Res. Int. J. 28, 754-767.
- * Perold, A.F.: Large-scale portfolio optimization. Manag. Sci. 30, 1143-1160.
- * Sharpe W., (1970), Portfolio Theory and Capital Markets. McGrawHill, New York.
- * Stein M., Branke J., Schmeck H., (2008), Efficient implementation of an active set algorithm for large-scale portfolio selection. Comput. Oper. 35, 3945-3961.
- * Anagnostopoulos K., Mamanis G., (2011), The mean-variance cardinality constrained portfolio optimization problem: an experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms. Expert Syst. 38, 14208-14217.
- * Liu B., (2010), Uncertainty Theory, 3rd edn. Spring-Verlag, Berlin.
- * Liu B., 2006, A survey of credibility theory. Fuzzy Optim. Decis. 5, 387-408.
- * Liu B., Iwamura K., 1998, Chance constrained programming with fuzzy parameters. Fuzzy Sets Syst. 94, 227-237.

- * Amiri M., Ekhtiari M., Yazdani M., 2011, Nadir compromise programming: a model for optimization of multi-objective portfolio problem. *Experts Syst. Appl.* 38, 7222–7226.
- * Bhattacharyya R., Kar S., Majumder, D., 2011, Fuzzy mean-variance-skewness portfolio selection models by interval analysis. *Comput. Math.* 61, 126–137.
- * Dastkhan H., Gharneh N., Golmakani H., 2011, A linguisticbased portfolio selection model using weighted max-min operator and hybrid genetic algorithm. *Expert Syst. Appl.* 38, 11735–11743.
- * Philippatos G., Wilson C., 1972, Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Appl. Econ.* 4, 209–220.
- * Huang, X., 2008, Mean-Entropy models for fuzzy portfolio selection. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 16, 1096–1101.
- * Huang, X., 2011, Mean-risk model for uncertain portfolio selection. *Fuzzy Optim Decis Mak* 10, 71–89.
- * Mukesh K., 2016, Credibilistic mean-entropy models for multi-period portfolio selection with multi-choice aspiration levels. *Inf. Sci.* 345, 9–26.
- * Zhou R., Zhan Y., Cai R., Tong G., 2015, A mean-variance hybrid-entropy model for portfolio selection with fuzzy returns. *Entropy* 17, 3319–3331.
- * Zhang W., Zhang X., Chen Y., 2011, Portfolio adjusting optimization with added assets and transaction costs based on credibility measures. *Insur. Math. Econ* 49, 353–360.
- * Sadjadi S., Seyedhosseini S., Hassanlou, K., 2011, Fuzzy multi period portfolio selection with different rates for borrowing and lending. *Appl. Soft Comput.* 11, 3821–3826.
- * Li P., Liu, B., 2007, Entropy of credibility distributions for fuzzy variables. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 16, 123–129.
- * Liu, S., 2011, The mean-absolute deviation portfolio selection problem with interval-valued returns. *J. Comput. Appl. Math.* 235, 4149–4157.
- * Liu S., 2011, A fuzzy modeling for fuzzy portfolio optimization. *Experts Syst. Appl.* 38, 13803–13809.
- * Qin Z., Li X., Li X., 2009, Portfolio selection based on fuzzy cross-entropy. *J. Comput. Appl. Math.* 228, 139–149.
- * Zhou R., Yang Z., Yu M., 2015, A portfolio optimization model based on information entropy and fuzzy time series. *Fuzzy Optim Decis.* 14, 381–397.
- * Yue W., Wang Y., 2017, A new fuzzy multi-objective higher order moment portfolio selection model for diversified portfolios. *Phys. A* 465, 124–140.
- * Chen W., Wang Y., Mehlatat M., A hybrid FA-SA algorithm for fuzzy portfolios selection with transaction costs. doi:10.1007/s9-016-2365-3.
- * Zadeh L., 1978, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets Syst.* 1, 3–28.

یادداشت‌ها

¹ Lingo