فصلنامــه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گــذاری
سال ششم/ شماره بیست‌ویکم/ بهار ۱۳۹۶

حداقل کردن واریانس پورتفوی با محدودیت‌های L

مهدی صالحی
دانشیارگروه حسابداری دانشگاه فردوسی مشهد

محمود لاری دشت بیاض
استادیار دانشگاه فردوسی مشهد

نرگس مخملباف
کارشناس ارشدعلوم وتحقیقات بیرجند

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۷/۰۳ تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۸/۱۶

چکیده

فرآیند انتخاب سبد سهام یکی از مسائلی است که مورد توجه محققین زیادی بوده است. معیارهای مختلف دخیل در این فرآیند طی زمان دچار تغییر و تحول شده و این وضعیت استفاده از یک ابزار مناسب پشتیبانی از تصمیمات سرمایه گذاری را ضروری می‌سازد. هدف این تحقیق انتخاب سبد بهینه سهام با استفاده از الگوریتم باکتری می‌باشد. به این منظور، ریسک و بازده مورد انتظار102 شرکت پذیرفته شده دربورس اوراق بهادار تهران طی سالهای ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۲ بصورت ماهیانه مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان میدهد که الگوریتم باکتری قادر به انتخاب سبد سهام با استفاده از معادله پرتفلیویِ با محدودیت L است. و همچنین میتوان بیان کرد که در انتخاب سبد بهینه سهام الگوریتم باکتری مبتنی بر معادله پرتفلیویِ مدل میانگین– واریانس با محدودیت کاردینال بهتر از معادله پرتفلیویِ محدودیت L است. محدودیت L به این معنی است که هیچ محدودیتی برای انتخاب شرکتهای موردبررسی وجود ندارد.

واژه‌های کلیدی: سبد سهام، ریسک، بازده مورد انتظار، الگوریتم غذایابی باکتری، شاخص شارپ.

۱- مقدمه

امروزه به دلیل گسترش فعالیت‌های اقتصادی، بازارهای مالی و رونق سرمایه گذاری در بازارهای سرمایه به خصوص بورس اوراق بهادار توسط اشخاص حقیقی و حقوقی، دسترسی به اطلاعات درست و به موقع و تحلیل دقیق و واقع بینانه آنها، مهمترین ابزار جهت اتخاذ تصمیمات درست و کسب منفعت مورد انتظار و استفاده بهینه و مطلوب ازامکانات مالی می‌باشد. در جامعه امروز اطلاعات نقش مهمی در زندگی انسان‌ها ایفا می‌کنند و هرچه قدر جامعه پیشرفته تر باشد از اطلاعات بیشتر و بهتر استفاده می‌نماید.از دلایل پیشرفت در جوامع توسعه یافته استفاده بهینه و مؤثر از اطلاعات می‌باشد. محصول نهایی فرآیند حسابداری، ارائه اطلاعات به استفاده کنندگان مختلف اعم از استفاده کنندگان داخلی و استفاده کنندگان خارج از شرکت، در قالب گزارش‌های حسابداری است. آن گروه از گزارشهای حسابداری که با هدف تأمین نیازهای اطلاعاتی استفاده کنندگان خارج از شرکت تهیه و ارائه می‌شود، در حیطه حسابداری مالی قرار می‌گیرد. تعدادی از محققین مالی، حسابداری را به عنوان یک سیستم اطلاع رسانی تلقی می‌کنند و به عقیده برخی از آنها هدف اصلی حسابداری ارائه اطلاعات مفید برای تصمیم گیری می‌باشد. تحقیقات و تحلیل‌های همه جانبه‌ی بازارهای اوراق بهادار و نتیجه گیری صحیح می‌تواند سرعت رشد و شکوفایی این بازارها را تحقق بخشد. بورس‌های معتبر دنیا نشان داده اند که در تامین وجمع آوری سرمایه موفق بوده و این حاصل اعتماد سهامداران به بازارهای سرمایه و کارایی بازار است، به نحوی که مطمئن هستند سرمایه‌های آنها به هدر نرفته و سودهای معقولی به ارمغان می‌آورد. تحقیق پیرامون مقوله‌های مختلف موثر بربازار سهام می‌تواند به تصمیم گیری صحیح سهامداران کمک کند و تخصیص بهینه‌ی منابع اقتصادی به نحو مطلوبتری صورت گرفته و وضع سرمایه گذاری بهتر گردد (قائمی و همکاران۱۳۸۲). تصمیم گیرندگان حوزه سرمایه گذاری اغلب ناگزیر به انتخاب از میان گزینه های مختلف می‌باشند. پیشنهادات گوناگونی در خصوص انجام فعالیتی به دست آن ها می‌رسد و آن ها بایستی به قدر کافی با اصول مقایسه گزینه های مختلف از نظر سودآوری آشنا باشند تا بتوانند بهترین گزینه را انتخاب نماید (جوادی، ۱۳۷۸). تنوع روش های سرمایه گذاری و پیچیدگی تصمیم های مزبور در چند دهه اخیر افزایش چشم گیری داشته است. این رشد گسترده نیاز فزاینده ای به مدل های فراگیر و یکپارچه ایجاد نمود که برای پاسخگویی به این نیاز، مدل سازی مالی از پیوند رویکرد مالی و برنامه ریزی ریاضی به وجود آمده است. این مدل ها از پیشرفت های برنامه ریزی ریاضی و مباحث مالی به موازات هم استفاده می‌نمایند. سرمایه گذاری در چارچوب سبد سهام، در پرتو اندیشه های مارکویتز و شارپ روند تکاملی پیموده و کاربرد برنامه ریزی ریاضی، دقت سرمایه گذاری در سبد سهام را افزایش داده است (خدا مرادی و راعی عزآبادی، ۱۳۹۳). بازار سرمایه کشور ما از کارایی لازم برخوردار نیست و برای کسب بازده منطقی نمی‌توان فقط به اطلاعات موجود اکتفا کرد. بنابراین با توجه به گزینه های فراوان پیش رو و نیز عدم کارایی بازار، نیاز است مدلی طراحی گردد که برای حداکثر سازی بازده و حداقل کردن ریسک سبد سهام مؤثر واقع شود. تحقیقات و مطالعات بسیاری که در حوزه تعیین سبد سهام بهینه و استفاده از مدل های مدرن و در تعامل با یکدیگر انجام گرفته، نشان از اهمیت این موضوع دارد که چگونه می‌توان با مدیریت صحیح سبد سهام، نسبت به تشکیل پربازده ترین سبد سهام اقدام کرد. در چند دهه اخیر اساس تئوری های

مالی (فرضیه بازار کارا، عقلایی بودن سرمایه گذار و ضریب بتا) از جانب صاحبنظران کنونی مورد تردید واقع شده است. به عبارت دیگر مدل های موجود در انتخاب سبد سهام بهینه، از اعتبار کافی برخوردار نمی‌باشند (عباس نژاد و علی اکبر، ۱۳۸۰). بنابراین ضرورت دارد مدلی طراحی گردد که نسبت به مدل های انتخاب سبد سهام بهینه قبلی دارای اعتبار بوده و در شرایط عدم اطمینان موجود، سرمایه گذاران را در انتخاب سبد بهینه سهام یاری رساند

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

نظام مالی با کارکردهای خود، بستر تجهیز و تخصیص بهینه منابع مالی را فراهم می آورد. نهادهای مالی در حوزه های سرمایه گذاری با فعالیت حرفه ای و تخصصی می توانند جذابیت کافی برای ترغیب مشارکت و جذب سرمایه های سرگردان و کوچک ایجاد نمایند .همزمان با توسعه اقتصادی و بهبود ساختار مالی کشورها، شاهد قوت گرفتن صنعت سرمایه گذاری بوده ایم. با توجه به اهمیت شرکتهای سرمایه گذاری در رشد و توسعه اقتصادی، مهمترین سوال در خصوص سرمایه گذاری شرکتهای سرمایه گذاری آن است که آیا می توان از مدلهای ریاضی برای تصمیم گیری سرمایه گذاری استفاده نمود؟ و با توجه به ماهیت فعالیتهای شرکتهای سرمایه گذاری و محدودیتهای موجود، مناسبترین مدل ریاضی سرمایه گذاری در صنعت سرمایه گذاری چه نوع مدلی می باشد؟ یکی از عوامل اصلی رشد و توسعه اقتصادی هر کشور،افزایش در میزان سرمایه گذاری مولد آن است. شرکت‌های سرمایه گذاری به عنوان منابع مهم تامین مالی و سرمایه گذاری، نقش مهمی را ایفا می‌نمایند. طراحی مدل ریاضی سرمایه گذاری با توجه به محدودیت‌های موجود که ضمن آن بتوان میزان نیل به اهداف و آرمان‌های متعدد و غالباً متضاد سرمایه گذاری اینگونه شرکت‌ها را حداکثر نمود.با توجه به نظریه نوین پرتفوی سرمایه گذار، پرتفوی خود را بر اساس دو معیار بازه مورد انتظار و انحراف معیار بازده انتخاب می‌کند. هدف اساسی در مدیریت پرتفوی کمک به سرمایه گذار در انتخاب پرتفوی بهینه است . در عبارت ساده، پرتفوی به ترکیبی از دارایی ها گفته می‌شود که توسط یک سرمایه گذار برای سرمایه گذاری تشکیل می‌شود (تهرانی و نوربخش۱۳۸۷). این سرمایه گذار می‌تواند یک فرد یا یک نهاد باشد. از نظر تکنیکی یک پرتفوی در برگیرنده مجموعه ای از دارایی های واقعی ومالی سرمایه گذاری شده توسط یک سرمایه گذار می‌باشد. به عبارت دیگر می‌توان گفت پرتفوی، مجموعه دارایی های یک نفر یا یک سازمان است. در این ارتباط مسئله مدیریت پرتفوی مطرح می‌شود که مفهوم آن مطالعه تمام جنبه های پرتفوی می‌باشد. این واژه وسیع در برگیرنده مفاهیم پرتفوی می‌باشد که بخش مهمی‌از مفهوم سرمایه گذاری را تشکیل می‌دهد. رویکرد در چارچوب سبد سرمایه گذاری در پرتو اندیشه های مارکوویتز و شارپ، روند تکاملی پیمود و کاربرد ریاضی دقت سرمایه گذاران را در انتخاب سبد سهام افزایش داد. مدل‌های مختلفی برای هدایت سرمایه گذاران با کمک برنامه‌ریزی ریاضی ارائه گردیده اند. مارکوویتز[1] (۱۹۵۹) با پیشنهاد مدلی که حداقل کردن واریانس به همراه حداکثر شدن بازده را دنبال می‌کرد، آغازگر این راه بود و با پیشنهاد مرز کارا، سرمایه گذاران را در پذیرش ریسک های مختلف یاری نمود. مدل مارکویتز از دو معیار بازده و ریسک به همراه محدودیت بودجه سرمایه گذاری، در قالب برنامه‌ریزی درجه

دو استفاده نموده است. مارکوویتز نیم‌واریانس را جایگزین واریانس نمود. نیم‌واریانس در واقع ارزش مورد انتظار مجذور انحراف منفی نتایج ممکن از بازده مورد انتظار را نشان می دهد که نشانگر انحراف پایین نرخ بازده مورد انتظار می باشد. بنابراین، واریانس هر انحرافی را از بازده مورد انتظار نشان می دهد، در حالی که نیم‌واریانس تنها انحراف منفی و پایین را از بازده مورد انتظار مورد توجه قرار می دهد. از این رو، سرمایه گذاران نیم‌واریانس را نسبت به واریانس بیشتر ترجیح می دهند. وزن سبد اوراق بهادار مارکوویتز (۱۹۵۹) ممکن است خطاهای عمده ای داشته باشد و بنابراین در صورتی که میانگین‌ها و کوواریانس‌های تخمین زده شده دقیق نباشند، پایدار نباشد و در نتیجه سبد اوراق بهادار انتخاب شده، عملکرد خارج از نمونه‌ی ضعیفی داشته باشد. مرتون[۲](۱۹۸۰)خاطر نشان می‌کند که مشکل تر از تخمین کوواریانس‌های بازده‌های دارایی در مسئله‌ی سبد اوراق بهادار میانگین-واریانس، تخمین میانگین‌ها می‌باشد. یاگاناتان[۳] (۲۰۰۳) بیان نمود که سبدهای اوراق بهادار، اغلب وقتی مفید هستند که با نادیده گرفتن قید میانگین دارایی ها، واریانس سبد اوراق بهادار کمینه شود.تنوع‌بخشی و تشکیل پرتفوی سهام و بهینه‌سازی آن یکی از اساسی‌ترین شروط برای موفقیت در بازارهای کارآمد است. چگونگی این تنوع‌بخشی، بهینه‌سازی آن و برگزیدن استراتژی‌های مناسب، مورد بحث است (مولایی و طالبی ۱۳۸۹). هیونگ و ژاهو[۴](۲۰۱۴) در مقاله خود که در آن حداقل ارزش در معرض خطر به عنوان تابع هدف در نظرگرفته شده است، نشان دادند که در بورس شانگهای مدل ارائه شده با استفاده از روش ترکیبی دیفرانسیل معقول و موثر می‌باشد. یانگ و همکاران [۵](۲۰۱۳) در پژوهشی با استفاده از تئوری تصمیم گیری فازی و روش برنامه نویسی چند هدفه، مدلی ارائه دادند که نسبت به الگوریتم حرکات ذرات بهبود یافته برای نشان دادن پرتفوی بهینه موثرتر میباشد. مارکو و همکاران[۶] (۲۰۱۳) که در مدل خود برای انتخاب پرتفوی از بازده - ریسک استفاده کرده‌اند، نشان دادند که مدل ارائه شده بوسیله‌ی الگوریتم بهینه سازی ازدحام ذرات اکتشافی (PSO) روش مناسبی برای انتخاب پرتفوی سهام می‌باشد. یانگ و ژانگ[۷] (۲۰۱۳) با استفاده از روش بهینه سازی پرتفوی چند هدفه برای انتخاب پرتفوی عملی در محیط فازی، به این نتیجه رسیدند که برنامه نویسی فازی چند هدفه در ارائه‌ی مدل پرتفوی بهینه نسبت به روش الگوریتم ژنتیک توانایی بالاتری دارد. جانگ فنگ دینگ وهمکاران[۸] (۲۰۱۳)به این نتیجه رسیدندکه الگوریتم حرکات ذرات نسبت به الگوریتم ژنتیک ازتوانایی وعملکرد بهتری درانتخاب پرتفوی سهام دارد. لیو[۹] (۲۰۱۴) نشان دادند که بر اساس معیار شارپ مدل بیز توانایی بالایی در انتخاب پرتفوی سهام دارد.

زینگ و همکاران[۱۰](۲۰۱۴) نشان دادند که روش بیشترین واریانس با محدودیت L می‌تواند سبد بهینه ی سهام و اوراق بهادار را به بهترین نحوه تشکیل دهد.

لانکان و کالدریا[۱۱](۲۰۱۵) به تحلیل اثر گردش سرمایه سبد سهام خارجی بر روی بازگشت سرمایه در شرکتهای برزیلی لیست شده در بازار بورس با استفاده از ۶ عامل مدل APT پرداخته است نشان میدهد سبدهای سهام خارجی منجر به افزایش بازگشت برای شرکتهایی با بتای بالا و بتای نیمه بالا شده است اما برای شرکتهایی با بتای پایین و نیمه پایین منجر به کاهش بازگشت سرمایه شده است.

راکورین[۱۲] (۲۰۱۵) نشان میدهد سریهای زمانی قیمت یک سبدسهام به گونه ایی به هم تنیده شده اند که روش کوانتومی قادر به تشکیل سبد سهام در بازار سهام رادارد

اسلامی‌بیدگلی و طیبی (۱۳۹۳) نشان دادند که الگوریتم ترکیبی مورچگان و ژنتیک در این تحقیق نتایجی بهتر از نتایج بدست آمده توسط الگوریتم ژنتیک به تنهایی دارد.

افشار کاظم‌و همکاران (۱۳۹۳) با استفاده از داده‌های مالی ۵۰ شرکت برتر در سال ۱۳۸۹ انجام شد، نشان دادند که همیشه پرگونه سازی پرتفوی به نفع سرمایه گذار نمی‌باشد واز یک جایی به بعد بهتر است که متنوع‌سازی را متوقف کنیم.

موشخیان و نخعی(۱۳۹۴) نشان دادند که حل مسئله سبد سرمایه گذاری چند دوره ای به خاطر غیرخطی بودن مسئله، خیلی چالش‌انگیز است بنابراین پس از مدلسازی مسئله با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات چند هدفه و تک هدفه اقدام به حل مدل ارائه شده می‌کنیم. نتایج نشان می دهد که الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات چند هدفه نتایج بهتری نسبت به الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات تک هدفه ایجاد می‌کند.

مقصود ،محبوب قدسی (۱۳۹۴) به حل مسئله انتخاب سهم برای پرتفوی با کمترین ریسک نامطلوب با استفاده از حل مدل برنامه ریزی خطی در شرایط فازی پرداختند. بدین منظورباستفاده ازاطلاعات قیمت۹ سهم پذیرفته شده دربورس اوراق بهادارتهران از سال۱۳۷۴تا سال۱۳۹۲، مدل خطی فازی توسط روش پیشنهادی حل شده و وزن هر سهم و مقدار ریسک نامطلوب سبد بهینه بدست آمده است.

۳- روش‌شناسی پژوهش

در این مقاله از معادله پرتفلو حداقل واریانس (MVP) مقید $l_1 - l_\infty$ استفاده شده است و آن با مدل میانگین–واریانس با محدودیت کاردینال[۱۳](MVCCPO) مقایسه خواهد شد. به منظور ایجاد سبد اوراق بهادار با وجود خطای تخمین ماتریس‌های کوواریانس نمونه، از استراتژی اعمال قید l_1 و نُرم‌های وزن‌های سبد اوراق بهادار l_∞ در کمینه سازی ریسک سبد اوراق بهادار استفاده شده است. تأثیر افزودن قید l_1، تخمین‌های وزن‌ها را کوچک می‌کند، بخصوص وزن‌هایی که کوچکتر از آستانه‌ای از قبل تعیین شده هستند، صفر خواهند شد که راه‌حلی پراکنده را ایجاد می‌کند. هرچند برخی از وزن‌های تخمین زده شده‌ی غیرصفر سبد اوراق بهادار ممکن است هنوز هم پس از تاوان به خاطر قید l_1 بزرگ باشند، بنابراین قید اضافی l_∞ را برای جلوگیری از این قبیل شرایط اعمال می‌شود.

فرض کنید $\mathrm{w} = (w_1, \dots, w_N)^\top$ بردار وزن‌های سبد اوراق بهادار باشد، $\widehat{\sum}$ ماتریس کوواریانس نمونه باشد که تخمین ماتریس کوواریانس $\sum$ بازده‌های دارایی باشد. نُرم l_1 در مورد w به صورت $\|\mathrm{w}\|_1 = \sum_{i=1}^{N}|w_i|$ و نُرم l_∞ به صورت $\|\mathrm{w}\|_\infty = \max_{1\le i\le N}\{|w_i|\}$ تعریف می‌شود. فرض کنید ۱، بردار۱ باشد. استراتژی بهینه‌سازی MVP مقید را می‌توان به صورت زیر فرموله کرد:

$$\min_{\mathrm{w}} \mathrm{w}^\top \widehat{\sum} \mathrm{w} \qquad (۱)$$

$$\mathrm{s.t}\ \mathrm{w}^\top 1 = 1 \qquad (۲)$$

$$\|w\|_1 + \alpha\|w\|_\infty \le c \qquad (۳)$$

در این جا $\alpha \ge 0$ و $c > 0$ پارامترهای هماهنگی هستند و α توازن بین دو نُرم را کنترل می‌کند و c آستانه‌ی قید است. مسئله‌ی بهینه‌سازی مقید را می‌توان به عنوان مسئله‌ی بهینه‌سازی جریمه دوباره فرموله کرد

$$\min_w w^\top \widehat{\sum} \; w + \lambda (\|w\|_1 + \alpha) \qquad (۴)$$

$$s.t\, 1^\top w = 1) \qquad (۵)$$

که در آن λ پارامتر محدودکننده است و تناظر یک به یک بین c و λ وجود دارد.وقتی $w_i \ge 0$، $i = 1 \dots N$ و cبرابر با $1 + \frac{\alpha}{N}$ باشد، راه حل به سبد اوراق بهادار $1/N$ نزدیک می‌شود.

برای تشکیل پرتفلو (سبد بهینه سهام)، از مدل میانگین–واریانس با محدودیت کاردینال(MVCCPO) در این تحقیق استفاده می‌گردد که معادله آن به شکل زیر است:

$$\min \quad \lambda\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} - (1-\lambda)\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i \qquad (۱)$$

$$Subject\ to \quad \sum_{i=1}^{N} z_i = K \qquad (۲)$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \qquad (۳)$$

$$\varepsilon_i z_i \le w_i \le \partial_i z_i, \qquad i = 1, \cdots, N \qquad (۴)$$

$$z_i \in \{0,1\} \qquad i = 1, \cdots, N \qquad (۵)$$

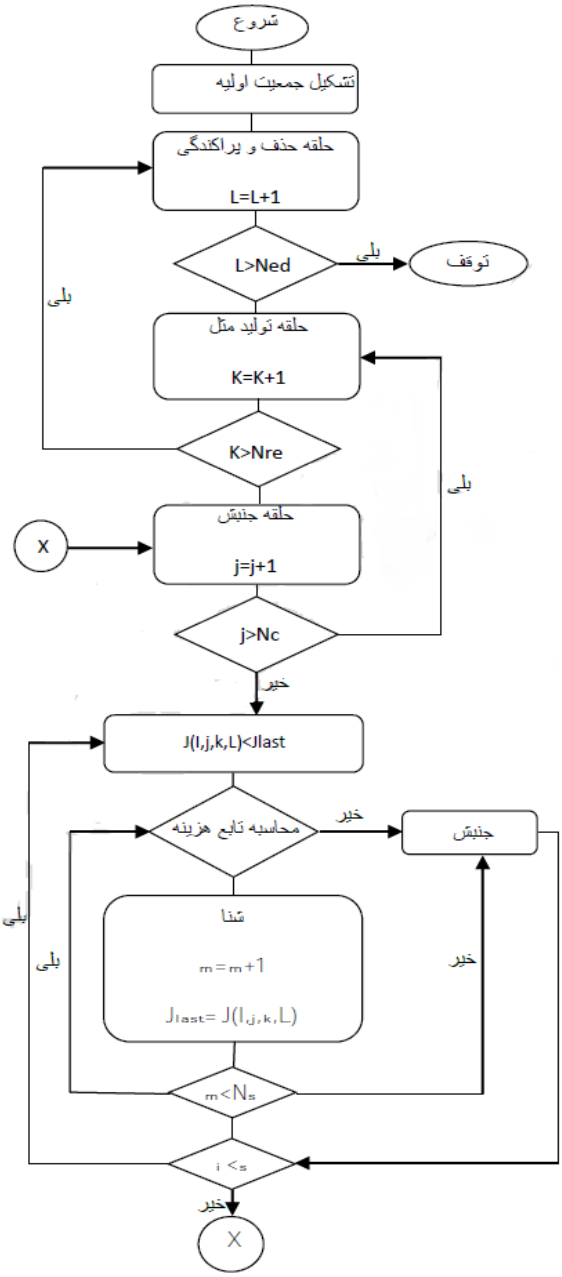
$$0 \le \lambda \le 1 \qquad (۶)$$

که در آن N تعداد دارایی‌های مورد نظر برای سرمایه‌گذاری، w_i متغیر تصمیم در مورد سرمایه‌گذاری است که نشان دهنده درصد سرمایه‌گذاری برای دارایی iام است. در رابطه (۱) در حالتی که $\lambda = 0$ باشد بیان کننده امید ریاضی سود بازگشتی با صرف نظر از ریسک (کوواریانس σ_{ij}) است و راه حل بهینه تنها دارایی‌هایی با حداکثر سود بازگشتی است، در حالی که اگر $\lambda = 1$ باشد، بیان کننده حداقل ریسک بدون در نظر گرفتن سود بازگشتی است. مقدار λ می‌تواند $0 \le \lambda \le 1$ باشد و در واقع λ یک پارامتر تنظیم سبد سرمایه‌گذاری سهام (پرتفلوی سهام) است که یک معاوضه بین سود بازگشتی و ریسک می‌باشد، بنابراین با تغییر مقدار λ می‌توان جواب‌های متفاوتی را بنا به سلیقه سرمایه‌گذار تولید نمود. در فاصله بین ۰ و ۱ سبدهایی در نظر گرفته

می شود که هر دو فاکتور ریسک و سود بازگشتی را بهینه می‌نماید. بعلاوه، مقدار σ_{ij} با استفاده از رابطه $\sigma_{ij} = \rho_{ij} s_i s_j$ تعیین می‌گردد که در آن ρ_{ij} همبستگی[۱۴] بین دارایی iام و دارایی j ام $(-1 \le \rho_{ij} \le +1)$ و s_i و s_j انحراف از معیار در سود بازگشتی در دارایی iام است. در رابطه (۲) K تعداد دارایی‌های مجاز در پرتفلو می‌باشد و $z_i \in \{0,1\}$ نشان دهنده حضور یا عدم حضور دارایی iام در سبد سرمایه‌گذاری است و دقیقاً باید K دارایی در سبد سرمایه گذاری قرار گیرد. به رابطه (۳) محدودیت بودجه می‌گویند و این محدودیت تضمین می‌کند که مجموع سرمایه گذاریی روی دارایی‌های انتخاب شده سبد سهام، بیشتر از ۱۰۰٪ نگردد. رابطه (۴) بیانگر این است که درصد سرمایه‌گذاری دارایی‌هایی که در سبد قرار گرفته‌اند ($z_i = 1$) می تواند برای دارایی iام حداقل ε_i و δ_i حداکثر باشد. مقادیر ε_i و δ_i توسط سرمایه‌گذار تعیین می‌گردد، مثلا می-تواند برای همه دارایی‌ها ثابت باشد یا برای هر دارایی جداگانه تعیین گردد.

- **دورنمای الگوریتم غذایابی باکتری برای حل مسئله**

به منظور حل مسألهٔ پرتفو تعداد صد باکتری در نظر گرفته شد. هر یک از این باکتری‌ها در یک فضای ۱۰۲ بُعدی که هر بُعد نشان دهنده یک شرکت با مقدار x_i متناظر آن است، یک پیشنهاد برای سبد سهام با تعدادی شرکت ارائه می‌دهد. جمعیت اولیه تولید شده است. سپس تابع هدف برای هر باکتری محاسبه شده و جمعیت منابع غذایی (راه‌حل‌ها) به فاز اصلی الگوریتم که جست و جو توسط باکتری هاست، فرستاده می‌شود. سپس، هر یک از باکتری‌ها به سوی موقعیت غذایی (راه‌حل) مربوط به خود فرستاده می‌شود. در این هنگام، هر باکتری اصلاحاتی را بـر روی موقعیـت حرکتی خود انجام می‌دهد. ایـن اصـلاحات بر اساس اطلاعات قبـلی موجـود در حافظـه، اطلاعات محلی (اطلاعات بصری) و یافتن یک منبع غذایی در همسایگی منبع غذایی مربوط به خود، صورت می‌پذیرد. سپس با توجه به موارد ذکر شده، موقعیت جدیـد منبع غذایی ارزیابی می‌گردد. در این مرحله، باکتری با توجه به غذای موجود در منابع غذایی، انتخابی را بین منبع قبلی و منبع جدید انجام می‌دهند. اگر برازندگی منبع جدید بیشتر باشد، باکتری موقعیت جدید را در حافظه خود ذخیـره کرده و موقعیت قبلی را فراموش می‌کنـد. پس از آن، اگر در مسیر جدید مقدار غذا بهتر بود باکتری شروع به حرکت در همان مسیر می‌کند، باکتری تا زمانی که در جهت حرکت خود محیط بهتری از لحاظ غذا بیابد به حرکت در همان جهت ادامه خواهد داد، وقتی یک باکتری مسیر بهتری برای غذا پیدا کند باکتری‌های دیگر را به سمت خود جذب کرده و باکتری‌ها سریع تر به محل غذای اصلی می‌رسند. این روند تا رسیدن به معیار توقف برنامه ادامه پیدا می‌کند. در این الگوریتم، باکتری‌هایی که غذای خوبی پیدا نکرده‌اند نابود شده و نصف دیگر شامل باکتری‌های سالم هریک به دو باکتری تقسیم می‌شوند که در همان مکان قبلی باکتری قرار می‌گیرند، این عمل تعداد جمعیت باکتری را ثابت نگه می‌دارد. پروسهٔ کلی حل مسألهٔ پرتفو با استفاده از الگوریتم باکتری مطابق شکل ذیل می‌باشد:



نمودار ۱ - روند کلی حل مسألهٔ پرتفو

۴- فرضیه های تحقیق

فرضیه اول: الگوریتم باکتری قادر به انتخاب سبد سهام با استفاده از معادله پرتفلیویِ محدود l است.

فرضیه دوم: سبد سهام انتخاب شده الگوریتم باکتری مبتنی بر معادله پرتفلیویِ محدود l بهتر از معادله پرتفلیویِ مدل میانگین واریانس با محدودیت کاردینال(MVCCPO) است.

۵- متغیر تحقیق

روش تحقیق از نوع شبه تجربی است و با استفاده از داده‌های واقعی شرکت‌ها می‌خواهیم روابط بین متغیر مستقل و وابسته را مورد بررسی قرار دهیم. در این تحقیق، روش مقطعی از نظر ویژگی زمانی داده‌های جمع آوری شده به کار گرفته شده است. همچنین با استفاده از الگوریتم هوشمند، بهینه‌سازی انتخاب سبد سهام در بورس اوراق بهادار ایران پردازش می‌شود. متغیر وابسته عبارت است از بهینه‌سازی انتخاب سبد سهام و متغیرهای مستقل شامل بازده مورد انتظار سبد سهام و ریسک سبد سهام می‌باشند.

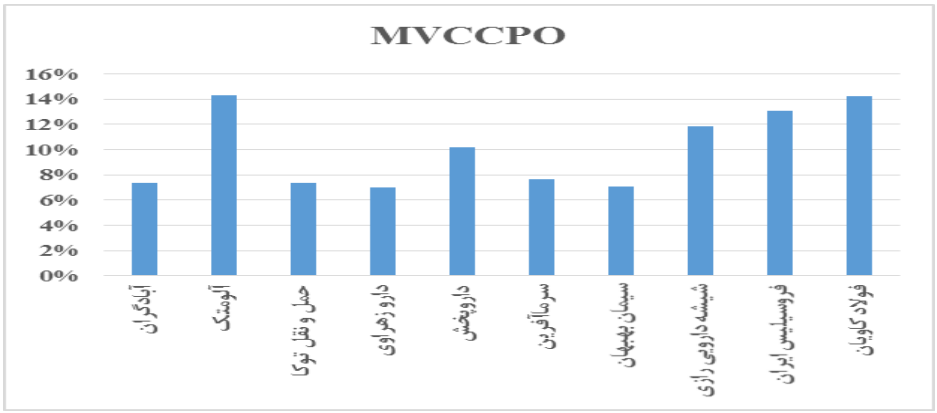
۶- نتایج الگوریتم

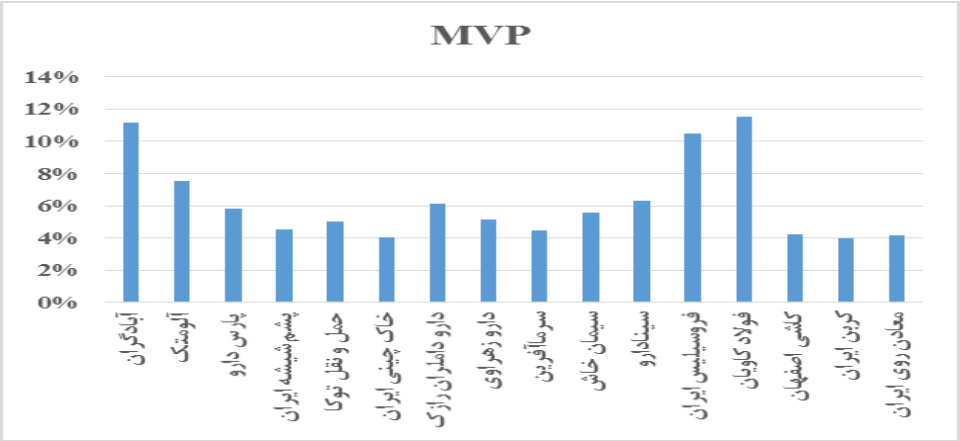
جامعه‌ی مورد آزمایش در مسئله‌ی موردکاوی حاضر، از بین شرکت‌های پذیرفته شده دربورس اوراق بهادار تهران انتخاب شده است. داده‌های مالی ۱۰۲ شرکت به صورت ماهیانه با متغیر مستقل بازده مورد انتظار از سال ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۲ از نرم افزار ره‌آورد نوین گردآوری گردید.در شبیه سازی معادله MVCCPO، بالاترین تعداد دارایی‌های مجاز در اسناد بهادار ۱۰ در نظر گرفته شد ($K = 10$). برای وزن‌های سهام w_i حدهای بالا و پایین به ترتیب ۱ و ۱۰۰٪ بودند، یعنی $\varepsilon_i = 0.01, \partial_i = 1, \quad i = 1, \ldots, k$. اینها پارامترهای محدودیت معمولی استفاده شده در بیشتر مطالعات می‌باشند. درشبیه سازی MVP مقدار C= ۱.۳ و α=۰.۹ در نظر گرفته شد. همان طور که قبلا بیان شد،۱۰۲ شرکت به عنوان نمونه ی آماری انتخاب شدند. اطلاعات مالی پنج ساله(۱۳۸۸ الی ۱۳۹۲) این شرکت‌ها, اطلاعات ورودی را تشکیل می‌دهند. و کدینگ الگوریتم BF استفاده گردید. پس از تنظیم کردن پارامترهای الگوریتم‌ها و همچنین به منظور بکارگیری سلایق مختلف مقدار پارامتر λ در حالت ۰، ۰,۱، ۰,۲، ۰,۵، ۰,۸ ، ۰,۹ و ۱ مورد بررسی قرار گرفت. در معادله MVCCPO در حالتی که $\lambda = 0$ باشد بیان کننده امید ریاضی سود بازگشتی با صرف نظر از ریسک (کوواریانس σ_{ij}) است و راه حل بهینه تنها دارایی‌هایی با حداکثر سود بازگشتی است، در حالی که اگر $\lambda = 1$ باشد، بیان کننده حداقل ریسک بدون در نظر گرفتن سود بازگشتی است. مقدارλ می‌تواند $0 \le \lambda \le 1$ باشد و در واقع λ یک پارامتر تنظیم سبد سرمایه‌گذاری سهام (پرتفوی سهام) است که یک معاوضه بین سود بازگشتی و ریسک می‌باشد، بنابراین با تغییر مقدار λمی‌توان جواب‌های متفاوتی را بنا به سلیقه سرمایه‌گذار تولید نمود. در ادامه، ابتدا سبد سهام بدست آمده توسط الگوریتم با مقادیر λ متفاوت و جزئیات بیان می‌گردد، سبد سهام انتخاب شده توسط الگوریتم BF باλ یک برای MVCCPO و معادله MVP در جدول ۵-۱ نشان داده شده است علت انتخاب مقدار $\lambda = 1$ این است که در هر دو الگوریتم فقط به ریسک توجه شود تا بتوان مقایسه عادلانه‌ای بین آنها انجام داد.

جدول ۱- سبد سهام انتخاب شده توسط الگوریتم BF با λ برابر یک برای MVCCPO و معادله MVP

ردیف	ایندکس	نام	Wi	ریسک	سود بازگشت	ردیف	ایندکس	نام	Wi	ریسک	سود بازگشت
۱	۳	آبادگران	۰,۰۷۳۸	۰,۱۳۸۹	-۰,۰۰۰۸۲۴	۱	۳	آبادگران	۰,۱۱۱۳	۰,۵۲۲۶	-۰,۰۱۲۴۳
۲	۴	آلومتک	۰,۱۴۲۸	۰,۵۷۹۳	-۰,۰۹۵۷۸	۲	۴	آلومتک	۰,۰۷۵	۰,۰۴۲۳	-۰,۰۵۰۳۱
۳	۲۰	حمل و نقل توکا	۰,۷۳۷	۰,۵۶۲۰	۰,۳۱۳۹۲	۳	۱۲	پارس دارو	۰,۰۵۷۹	۰,۰۲۲۴۰	۰,۱۱۵۴۲
۴	۲۹	دارو زهراوی	۰,۰۶۹۶	۰,۳۹۵۹	۰,۱۸۷۰۰	۴	۱۵	پشم شیشه ایران	۰,۰۴۵۳	۰,۳۴۴۵	-۰,۰۱۳۱۶
۵	۳۲	داروپخش	۰,۱۰۲	۰,۳۶۵۰	۰,۲۳۱۹۱۰	۵	۲۰	حمل و نقل توکا	۰,۰۵۰۳	۰,۳۶۹۳	۰,۲۱۴۲۸
۶	۴۶	سرما آفرین	۰,۰۷۶۴	۰,۴۶۵۳	۰,۱۸۳۸۵	۶	۲۱	خاک چینی ایران	۰,۰۴۰۲	۰,۵۴۶۶	۰,۸۱۸۱۱
۷	۴۹	سیمان بهبان	۰,۰۷۰۴	۰,۵۲۳۷	۰,۱۸۰۱۷	۷	۲۷	دارودامداران‌رازک	۰,۰۶۱	۰,۵۰۵۳	۰,۱۳۷۱۶
۸	۶۰	شیشه دارویی رازی	۰,۱۱۸۲	۰,۳۷۵۹	۰,۲۷۶۹۰	۸	۲۹	دارو زهراوی	۰,۰۵۱۶	۰,۲۲۷۸	۰,۱۳۸۷۸
۹	۶۸	فروسیلیس ایران	۰,۱۳۰۷	۰,۰۴۰۹	۰,۴۷۲۱۹	۹	۴۶	سرما آفرین	.۰,۴۴۶	۰,۲۳۳۲	۰,۱۰۷۲۰
۱۰	۷۱	فولاد کاویان	۰,۱۴۱۴	۰,۵۸۱۸	۰,۱۵۶۴۶	۱۰	۵۱	سیمان خاش	۰,۵۵۹	۰,۲۴۰۹	۰,۰۸۰۸۵
			جمع	**۴,۰۳۲۲**	**۱,۹۰۵۵۵**	۱۱	۵۸	سینادارو	۰,۰۶۳۲	۰,۴۴۰۳	۰,۲۰۲۷۲
						۱۲	۶۸	فروسیلیس ایران	۰,۱۰۴۷	۰,۲۱۲۰	۰,۳۷۸۴۲
						۱۳	۷۱	فولاد کاویان	۰,۱۱۵	۰,۴۳۷۸	۰,۱۲۶۳۳
						۱۴	۷۶	کاشی اصفهان	۰,۰۴۲۵	۰,۲۲۵۷	۰,۱۰۷۴۳
						۱۵	۷۹	کربن ایران	۰,۰۳۹۸	۰,۸۶۳۴	۰,۰۳۴۹۷
						۱۶	۸۸	معادن روی ایران	۰,۰۴۱۵	۰,۶۱۲۴	۰,۰۲۳۲۷
									جمع	**۵,۹۶۳۶**	**۱,۷۷۹۰۴**

همان طور که در جداول بالا مشاهده می‌شود، مجموع سرمایه‌گذاری برابر ۱ است، پس الگوریتم BF توانسته قید جمع سرمایه‌گذاری برابر یک معادله MVCCPO و MVP را برآورده کنند پس می‌توان گفت فرضیه اول الگوریتم باکتری قادر به انتخاب سبد سهام با استفاده از معادله پرتفلیویِ محدود l است درست است. همچنین در معادله پرتفو MVCCPO تنها ۱۰ شرکت در سبدها حضور دارند و این به معنی برآورده شدن رابطه (۲) و در صورتی که برای معادله MVP چنین شرطی نداشتیم. در معادله پرتفو MVCCPO وزن‌های انتخاب شده در بازه $0.01 \leq w_i \leq 1$ قرار دارند و در نتیجه رابطه (۴) ارضاء شده است. معادله پرتفو MVP به سود بازگشتی توجهی ندارد و ما صرفاً برای بهتر مقایسه کردن دو مدل، مقدار سود بازگشتی را برای MVP در جدول نوشتیم. همانطور که مشاهده می‌شود سبد سهام انتخاب شده از مدل MVP ریسک کمتری نسبت به مدل MVCCPO دارد و در مدل پرتفو MVP اصلا توجهی به مقدار سود بازگشتی ندارد. شکل۱ درصد سهم سرمایه‌گذاری هر شرکت را به صورت نمودار میله‌ای نشان می‌دهد. مدل MVP نسبت به مدل MVCCPO دارای وزن دهی نامنظم‌تری است و این به خاطر نحوه برخورد آن با قید رابطه (۹) است.





شکل ۱ در صد سهم سرمایه‌گذاری هر شرکت با الگوریتم BF و λ برابر صفر به روش MVCCPO و MVP

در جدول ۲ سبدهای سهام انتخاب شده الگوریتم BF با معادله پرتفو MVCCPO نشان داده شده است.

جدول ۲- سبد سهام انتخاب شده توسط الگوریتم BF برای MVCCPO

λ	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۱
ریسک	۷۶,۶۴۳۵۴	۱۲,۳۳۵۱۲	۸,۸۶۳۳۱۱	۵,۲۷۰۵۱۸	۵,۴۶۳۸۳۷	۳,۶۲۳۱۱۴	۴,۰۳۲۱۷۱
سود بازگشتی	۴,۷۸۳۶۶۸	۳,۷۶۲۹۷۱	۳,۱۷۱۴۷۹	۱,۷۵۷۰۱۴	۱,۵۸۰۴۸۶	۱,۵۰۹۵۲۷	۱,۹۰۸۸۴۹

در حالتی که $\lambda = 0$ باشد بیان کننده امید ریاضی سود بازگشتی با صرف نظر از ریسک (کوواریانس σ_{ij}) است و راه حل بهینه تنها دارایی‌هایی با حداکثر سود بازگشتی است، در حالی که اگر $\lambda = 1$ باشد، بیان کننده حداقل ریسک بدون در نظر گرفتن سود بازگشتی است. مقدار λ می‌تواند $0 \leq \lambda \leq 1$ باشد و در واقع λ یک پارامتر تنظیم سبد سرمایه‌گذاری سهام (پرتفوی سهام) است که یک معاوضه بین سود بازگشتی و ریسک می-باشد، بنابراین با تغییر مقدار λ می‌توان جواب‌های متفاوتی را بنا به سلیقه سرمایه‌گذار تولید نمود که جدول بالا این نتایج را تایید می‌نماید. برای مقایسه دو معادله پرتفو MVCCPO و MVP شاخص شارپ که در علوم مالی، این نسبت بازده اصلاح شده با ریسک را اندازه‌گیری می‌کند. برای اندازه‌گیری این معیار، نرخ بهره بدون ریسک در یک سال را، از بازده سالانه یک سهم، کم می‌کنیم. سپس حاصل را بر انحراف معیار بازدهی آن سهم، در دوره بررسی، تقسیم می‌نماییم. این معیار، بیان می‌کند، که آیا بازدهی بدست آمده از سرمایه‌گذاری در آن سهم، با توجه به ریسک بالا، بدست آمده یا خیر. هر اندازه میزان این معیار بالاتر باشد، نشان می‌دهد که بازدهی بدست آمده، با تقبل ریسک کمتری بوده است. نسبت شارپ منفی نیز نشان می‌دهد، که سرمایه‌گذاری در اوراق بدون ریسک (نرخ بهره بدون ریسک) توجیه‌پذیرتر است. این شاخص برای معادله MVCCPO مقدار ۱۱.۴۶۵۵ و برای معادله MVP مقدار ۱۹.۶۸۵۴- را بدست آورده است. پس در نتیجه سبد سهام انتخاب شده الگوریتم باکتری مبتنی بر معادله پرتفلیویِ مدل میانگین–واریانس با محدودیت کاردینال بهتر از معادله پرتفلیویِ محدود $\boldsymbol{l}$ است.

۷- نتیجه گیری و بحث

در امر سرمایه گذاری سهام، انتخاب سبد بهینه سهام از جمله مهمترین موارد قابل توجه است. در این رابطه ایجاد مدلهایی که بتواند به انتخاب بهترین سبد سهام شود از اهمیت حائز توجه ای برخوردار است. مدلهای مزبور می بایست در ایجاد سبد بهینه سهام توانایی لحاظ کردن شخصیت ریسک پذیری اشخاص را نیز داشته باشند. در این تحقیق با استفاده از الگوریتم باکتری و با در نظر گرفتن ریسک و بازده مورد انتظار ۱۰۲ شرکت پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران طی سالهای ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۲ ، بهترین سبد سهام با توجه به تعاملات بین ریسک و بازده مشخص گردیده است. نتیجه نشان میدهد سبد سهام انتخاب شده الگوریتم باکتری مبتنی بر معادله پرتفلیویِ مدل میانگین–واریانس با محدودیت کاردینال بهتر از معادله پرتفلیویِ محدود $\boldsymbol{l}$ است. تحقیقات مشابه با الگوریتم‌های به کار رفته در این تحقیق تاکنون در ایران انجام نشده است اما نتایج به کارگیری سایر الگوریتم‌های هوشمند دربهینه سازی سبد سهام نیز همچون فرضیه‌های این تحقیق بیانگر کارا بودن مدل‌های داده کاوی در دستیابی به یک سبد سهام بهینه است. به عنوان مثال: مدرس و استخری *(۱۳۸۶)* به انتخاب پرتفوی دربورس تهران با الگوریتم ژنتیک می‌پردازند. نتایج پژوهشی آنها نیز نشان می‌دهد که بهینه سازی پرتفوی با استفاده از ژنتیک کارآمدتر ازحل آن با مدل‌های کلاسیک است و می‌توان با این رویکرد ابتکاری به مرزهای کارآیی بهتری نسبت به حل سنتی مدل مارکوویتز دست یافت. طالبی(۱۳۸۹) به اعمال چهارالگوریتم ابتکاری جدید و پرکاربرد ژنتیک برمسئله بهینه سازی پرتفوی در بازار بورس اوراق بهادار تهران می‌پردازد. ازآنجا که عملکرد الگوریتم‌ها و سازگاری آنها با حل مسئله پرتفوی تاییدشده، به خبرگان که هم اکنون جهت تشکیل

سبد به صرف منابع هنگفت مالی، انسانی و... می پردازند استفاده از روش‌های پژوهشی به شدت توصیه می‌شود. راعی و علی بیگی (۱۳۸۹) درپژوهشی به حل مساله بهینه سازی پرتفوی (مدل میانگین ـ واریانس) با استفاده از روش بهینه سازی حرکت تجمعی ذرات(PSO) پرداختند. بدین منظور با استفاده از اطلاعات قیمت ۲۰ سهم پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران در فاصله زمانی مهر ۱۳۸۵ تا شهریور ۱۳۸۷، مرز کارای سرمایه‌گذاری رسم می‌شود. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد، روش بهینه سازی حرکت تجمعی ذرات در بهینه سازی پرتفوی سهام با وجود محدودیت‌های بازار موفق است نتایج تحقیق با پژوهش زینگ و همکاران (۲۰۱۴) مطابقت دارد.

پیشنهاد برای تحقیقات آتی:

برای تحقیقات آتی پیشنهاد می گردد سایر الگوریتم های هوشمند مورد استفاده قرار گیرد و با مقایسه نتایج بین الگوریتم های مختلف الگوریتمی که با لحاظ کردن ریسک، سبد سهامی با بیشترین بازده را برای سرمایه گذاران به ارمغان می آورد مشخص گردد. نتایج این تحقیق همچنین می تواند مورد استفاده شرکتهای سرمایه گذاری و کارگزاری های سهام قرار گیرد.

فهرست منابع

* اسلامی‌بیدگلی، غلامرضا و احسان طیبی ثانی(۱۳۹۳)" بهینه سازی سبدسرمایه گذاری بر اساس ارزش در معرض ریسک " مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار-شماره ۱۸. صص ۱۶۳-۱۸۴.
* افشارکاظم، محمدعلی،میرفیض فلاح شمس و مرضیه کارگر(۱۳۹۳)" تدوین مدلی جدید برای بهینه سازی پرتفوی بورس با استفاده ازروش مارکوویتز واصلاح آن توسط مدل کسینوسها وحل آن توسط الگوریتم ژنتیک " مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار-شماره ۱۸. صص۲۱-۴۱.
* تهرانی، رضا؛ نوربخش عسگر (۱۳۹۲) "مدیریت سرمایه¬گذاری"، ترجمه و اقتباس از کتاب چارلز پی. جونز، انتشارات نگاه دانش.
* خدامرادی، سعید، راعی عزابادی، محمد ابراهیم (۱۳۹۳). " طراحی مدل ریاضی تامین مالی بهنیه در شرکتهای هلدینگ صنعتی (رویکرد بازار سرمایه داخلی)" مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره ۱۹، صص ۱-۱۸.
* راعی، رضا، علی بیکی، هدایت (۱۳۸۹) " بهینه سازی پرتفوی سهام با استفاده از روش حرکت تجمعی ذرات" تحقیقات مالی، شماره ۱۲، صص ۲۱- ۴۰.
* رضایی پندری، عباس؛ آذر، عادل؛ رعیتی شوازی، علیرضا(۱۳۹۰). "به کارگیری الگوریتم ژنتیک برای انتخاب پرتفوی بهینه‌ای با اهداف غیرخطی"، فصلنامه پژوهش¬های اقتصادی ایران، شماره ۴۸، صص۳۵-۵۰.
* سن جو،شی زوا؛فوشی می، تامی او و فوجی تا سی ایجی(۱۳۷۸)، " تحلیل بهره وری وسودآوری، ترجمه سید عباس جوادی، چاپ اول، تهران، انتشارات نوادر.

* طالبی؛ آرش (۱۳۸۹) "انتخاب و بهینه سازی سبد سهام با استفاده از روشهای فراابتکاری و مقایسه ی آن با سبد های تشکیلی خبرگان و تازه کارها در بازار بورس اوراق بهادار تهران؛ پایان نامه کارشناسی ارشد؛ دانشگاه شاهرود.
* عباس نژاد، علی اکبر(۱۳۸۰)" ارزیابی مالی شرکت های پذیرفته شده دربورس اوراق بهادار تهران براساس فرایند تحلیل سلسله مراتبی"، دانشگاه امام صادق.
* قائمی، محمد حسین، قیطاسوند، محمود و توجیکی، محمود (۱۳۸۲). "تاثیر هموارسازی سود بر بازده سهام شرکت های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران"، بررسی های حسابداری و حسابرسی، شماره۳۳، صص ۳۸-۵۶.
* مقصود امیری، مهسا محبوب قدسی (۱۳۹۴)" مدل برنامه‌ریزی خطی فازی برای مسئله انتخاب سبد سهام بهینه " مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، دوره ۶، شماره ۲۳. صص ۱۰۵-۱۱۸.
* مدرس، سید احمد، محمدی استخری، نازنین (۱۳۸۶ " انتخاب یک سبد سهام از بین سهام شرکتهای پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از مدل بهینه سازی الگوریتم ژنتیک" توسعه و سرمایه، شماره ۱، صص ۷۱-۹۲.
* موشیخان، سیامک، نجفی، امیر عباس (۱۳۹۴) "بهینه سازی پرتفوی سهام با استفاده از الگوریتم چند هدفه ازدحام ذرات برای مدل احتمالی چند دوره ای میانگین - نیم واریانس - چولگی" مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، دوره ۶، شماره ۲۳. صص ۱۳۳-۱۴۸.
* مولایی محمدعلی؛ طالبی آرش (۱۳۸۹) "بررسی کاربرد الگوریتم ابتکاری-ترکیبی ژنتیک و نلدر-مید در بهینه سازی پرتفوی" فصلنامه علمی و پژوهشی جسارت های اقتصادی س ۷، ش۱۴. صص۱۷۱-۲۰۴.
* Guang-Feng Deng, Woo-Tsong Lin, Chih-Chung Lo (2013)" Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization "Expert Systems with Applications 39 (2012) pp: 4558–4566
* Huang Xiaoxia, Zhao. Tianyi, (2014). Mean-chance model for portfolio selection based on uncertain measure. Insurance: Mathematics and Economics 59 243-250.
* Jagannathan, R., Ma, T., 2003. Risk reduction in large portfolios: Whimposing the wrong constraint helps. Journal of Finance 58, 1651–1684.
* Kandasamy, Hari, (2008), Portfolio Selection under Unequal Prioritized Downside Risk, Advisor: Kostreva, Michael M., the Degree Doctor of Philosophy Mathematical Sciences, Department of Mathematical Science, Clemson University.
* Konno, H., Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. Management Science, 37(5):519-531.
* Loncan, Tiago and Caldeira, João, Foreign Portfolio Capital Flows and Stock Returns: A Study of Brazilian Listed Firms (April 8, 2015). Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=2591908.
* Marco Corazza, Giovanni Fasano, Riccardo Gusso(2013) Particle Swarm Optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem‖ Applied Mathematics and Computation, Volume 224, 1 November 2013, PP. 611-624.
* Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. Journal of Finance, 7(1):77-91.
* Markowitz, H. (1959). Portfolio Allocation: E_cient Diversi_cation of Investments, John Wiley & Sons, Inc., New York. A Cowles Foundation Monograph.

* Markowitz, H. (1991). Foundations of portfolio theory. Journal of Finance, 46(2):469-477.
* Merton, R. C., 1980. On estimation the expected return on the market. Journal Financial Economics 8, 323-361.
* Papahristodoulou, C, Dotzauer, E. (2004). Optimal portfolios using linear programming problems. Journal of the Operations Research Society, 55(11):1169-1177.
* Racorean, Ovidiu Sorin," Quantum Gates and Quantum Circuits of Stock Portfolio" (2015). Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=2630341.
* . Levy, h (2014), "The Unique Risks of Portfolio Leverage: Why Modern Portfolio Theory Fails and How to Fix It" The Journal of Financial Perspectives, Volume 2, Issue 3, 1- 41.
* . Loncan, Tiago and Caldeira, João, Foreign Portfolio Capital Flows and Stock Returns: A Study of Brazilian Listed Firms (April 8, 2015). Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=2591908.
* Speranza, M. Grazia. (1995). A Heuristics Algorithm for A Portfolio Optimization Model Applied To the Milan Stock Market, Computer and Ops Res, 5,.433-441.
* Tang, W., Han, Q., Li, G. (2001). The portfolio selection problems with chance- constrained. In Systems, Man, and Cybernetics IEEE International Conference on, volume 4, pages 2674-2679.
* Yong-Jun Liu, Wei-Guo Zhang, Pu Zhang (2013) ―A multi-period portfolio selection optimization model by using interval analysis‖ Economic Modelling, Volume 33, PP. 113-119.

یادداشت‌ها

[1] Markowitz
[2]. Merton
[3]. Jagannathan
[4] . Huang Xiaoxia, Zhao. Tianyi
[5] . Yong et al
[7]. Marco et al
[7]. Yong & zhang
[8]. Guang-feng deng et al
[10]. Levy. h
[10] .Zing et al
[11] .Loncan & Caldeira
[12].Racorean
[13] . Mean–Variance Cardinality Constrained Portfolio Optimization
[14]. Correlation