

بررسی روش‌های مختلف بر آورد معیارهای ریسک دمی با استفاده از توزیع پارتوی تعمیم یافته در بورس اوراق بهادار تهران

عبسی محمودی^۱
نجمه دهقانی^۲
حجت اله صادقی^۳

تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۸/۰۱

تاریخ دریافت: ۹۶/۱۱/۱۸

چکیده

بررسی احتمال رخ دادن رویدادهای فرین (رویدادهایی که با احتمال بسیار کم رخ می‌دهند) از موضوعات بسیار مهم در مدیریت ریسک است. نظریه ارزش فرین، صرف نظر از این که بازده دارایی‌های مالی از چه توزیع احتمالی پیروی می‌کند، معیارهای ریسک را با استفاده از رویدادهای فرین برای یک سبد مالی محاسبه می‌کند. در این نظریه، روش مقادیر فراتر از آستانه (POT) که با استفاده از آن مدل‌سازی جدا برای مجموعه داده‌های دم توزیع با استفاده از توزیع پارتوی تعمیم یافته و شروع از یک آستانه مناسب ممکن می‌باشد، در عمل روش پرکاربردتر و دقیق‌تری است. به همین منظور در این مقاله عملکرد برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی، گشتاور درست‌نمایی، ژانگ و حداقل مربعات غیرخطی وزنی تحت چارچوب POT برای برآورد پارامترهای توزیع پارتوی تعمیم یافته به منظور تخمین ارزش در معرض خطر و ریزش مورد انتظار بازده لگاریتمی شاخص‌های مواد غذایی به جز قند، بانک‌ها، خودرو، شیمیایی، مواد دارویی، سیمان، زراعت، فرآورده‌های نفتی، منسوجات، زغال سنگ، مالی، صنعت، قیمت ۵۰ شرکت، آزاد شناور و بازار دوم بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۵ فروردین سال ۱۳۹۲ تا ۲۹ اردیبهشت سال ۱۳۹۵ مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است. نتایج به‌طور کلی نشان می‌دهند که برآوردگر حداقل مربعات غیرخطی وزنی تحت چارچوب POT، برآوردهای بهتری برای پارامترهای توزیع پارتوی تعمیم یافته ارائه می‌دهد و ریزش مورد انتظار، معیار منسجم‌تری برای محاسبه‌ی ریسک است.

واژه‌های کلیدی: توزیع پارتوی تعمیم یافته، ارزش در معرض خطر، ریزش مورد انتظار، نظریه ارزش فرین، مقادیر فراتر از آستانه.

۱- استاد گروه آمار، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد (نویسنده مسئول) emahmoudi@yazd.ac.ir

۲- کارشناسی ارشد ریاضیات مالی، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد.

۳- استادیار گروه مدیریت و حسابداری، دانشکده اقتصاد، مدیریت و حسابداری، دانشگاه یزد.

۱- مقدمه

در چند دهه گذشته شاهد افزایش بی سابقه‌ای در حجم داده‌های موجود در برنامه‌های مختلف مانند امور مالی، بیمه، علوم رایانه و ارتباطات بوده‌ایم. چنین مجموعه داده‌های بزرگی امکان تجزیه و تحلیل کمی ریسک از جمله تحقیق در مورد رویدادهای زیان نادر اما بزرگی که در دم توزیع رخ می‌دهد را فراهم می‌کند. به‌عنوان مثال، برای موسسات مالی چندک‌های غایی توزیع زیان از اهمیت زیادی برای اهداف داخلی و نظارتی برخوردار هستند. در این میان نظریه ارزش فرین^۱ (EVT) توجه زیادی را به عنوان یک ابزار مدرن برای مطالعه‌ی مقادیر دم توزیع از جمله چندک‌های غایی به خود جلب کرد. در چارچوب نظریه ارزش فرین، توزیع پارتوی تعمیم‌یافته^۲ (GPD) به‌عنوان توزیع، فزونی‌های بالاتر از یک آستانه برای داده‌های دم سنگین توسط پیکاندس^۳ (۱۹۷۵) معرفی شد. روش استاندارد برازش داده‌های دم سنگین که خواستار یک مدل‌سازی جدا برای مجموعه داده‌های ناحیه دم با استفاده از GPD است به‌عنوان روش مقادیر فراتر از آستانه^۴ (POT) شناخته می‌شود.

در برنامه‌های مالی و بیمه، هدف اصلی به‌کار بردن EVT تحت رویکرد POT تعیین معیارهای ریسک معمول مانند ارزش در معرض خطر^۵ (VaR) و ریزش مورد انتظار^۶ (ES) از برازش GPD است. تخمین این معیارهای ریسک به برآورد پارامترهای GPD بستگی دارد و هر چه سطوح چندک‌های مورد نیاز افزایش یابد، نوسانات آن‌ها نیز بیشتر می‌شود. برای مثال طبق بازل ۲ (۲۰۰۶) ریسک عملیاتی یک بانک باید بتواند ضررهای غیرمنتظره را با احتمال حداقل ۹۹/۹٪ تحت روش اندازه‌گیری پیشرفته^۷ (AMA) پوشش دهد که این معادل VaR در سطح اطمینان ۹۹/۹٪ است؛ به علاوه ۹۹/۹٪ VaR در تجزیه و تحلیل پس‌آزمایی، ارزیابی وقوع حوادث نادر با احتمال ۰/۰۰۱٪ مورد استفاده قرار می‌گیرد. ظاهراً چنین چندک‌های غایی به روش‌های برآورد پارامتر حساس هستند و تفاوت

اندکی در برآوردها می‌تواند به تاثیر قابل توجهی بر وضعیت مالی بانک‌ها منجر شود.

برآورد پارامترهای GPD یک مشکل قدیمی است و رویکردهای مختلفی برای آن مورد بررسی قرار گرفته است. برای مثال برآوردگر ماکسیمم درستنمایی^۸ (MLE) توسط گرمشاو^۹ (۱۹۹۳) و اسمیت^{۱۰} (۱۹۸۴) بحث شده است. پیکاندس (۱۹۷۵) یک روش با استفاده از آماره‌های ترتیبی نمونه پیشنهاد کرد. هوسکینگ و والیس^{۱۱} (۱۹۸۷) روش گشتاورها^{۱۲} (MOM) و روش گشتاورها با وزن احتمالی^{۱۳} (PWM) را استفاده کردند. یک نسخه‌ی تعمیم‌یافته روش گشتاورها توسط آشکار و اواردا^{۱۴} (۱۹۹۶) مورد بحث قرار گرفت و روش گشتاورها با وزن احتمالی تعمیم‌یافته^{۱۵} (GPWM) توسط راسموسن^{۱۶} (۲۰۰۱) پیشنهاد شد. ژانگ^{۱۷} (۲۰۰۷) برآوردگر گشتاور درستنمایی^{۱۸} (LME) را پیشنهاد کرد. ژانگ و استیفنز^{۱۹} (۲۰۰۹) و ژانگ (۲۰۱۰) برآورد پارامترهای GPD با استفاده از روش بیزی را مورد بررسی قرار دادند. سانگ و سانگ^{۲۰} (۲۰۱۲) یک برآوردگر برای پارامترهای توزیع GP براساس روش حداقل مربعات غیرخطی^{۲۱} (NLS) معرفی کردند که مجموع مربع انحرافات بین تابع توزیع تجربی نمونه و GPD نظری را مینیمم می‌کند. پارک و کیم^{۲۲} (۲۰۱۶) نیز یک برآوردگر برای پارامترهای توزیع GP تحت چارچوب POT به‌منظور تخمین معیارهای ریسک پیشنهاد دادند. روش آن‌ها از سانگ و سانگ (۲۰۱۲) اقتباس شده است و از روش حداقل مربعات غیرخطی وزنی استفاده می‌کند.

از آنجاکه توزیع پارتوی تعمیم‌یافته به روش‌های برآورد پارامتر حساس است و تفاوت در برآوردها تاثیر قابل توجهی بر تخمین معیارهای ریسک می‌گذارد؛ لذا این مقاله قصد دارد عملکرد برآوردگرهای ژانگ، گشتاور درستنمایی، ماکسیمم درستنمایی و حداقل مربعات غیرخطی وزنی تحت چارچوب POT را برای برآورد پارامترهای توزیع پارتوی تعمیم‌یافته به‌منظور تخمین ارزش در معرض خطر و ریزش مورد انتظار

فزون‌های $(X - u | X > u)$ از چنین توزیعی، زمانی که آستانه u ($u > 0$) به اندازه کافی بزرگ است، به توزیع پارتوی تعمیم‌یافته $(GP(k, \sigma))$ همگرا می‌شود؛ یعنی

$$\lim_{u \uparrow x} \sup_{0 \leq x \leq -u} |pr(X - u < x | X > u) - G(x; k, \sigma)| = 0,$$

که در آن $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} \leq \infty$ نقطه انتهایی سمت راست توزیع F است. در حقیقت این قضیه اساس چارچوب POT را تشکیل می‌دهد، زیرا با استفاده از آن مدل‌سازی جدا برای مجموعه داده‌های قسمت دم با استفاده از توزیع GP و شروع از آستانه u ممکن می‌شود (پیکان‌دس، ۱۹۷۵ و بالکما و دِهان، ۱۹۷۴). توزیع پارتوی تعمیم‌یافته سه پارامتری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$GPD(x; k, \xi, \sigma) = \begin{cases} 1 - \left(1 - k \frac{x - \xi}{\sigma}\right)^{\frac{1}{k}}, & k \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x - \xi}{\sigma}\right), & k = 0. \end{cases}$$

برای $k \leq 0$ ، $\xi \leq x < \infty$ و برای $k > 0$ ، $\xi + \frac{\sigma}{k} \leq x \leq \xi$. توزیع GP سه پارامتر دارد که $\sigma > 0$ پارامتر مقیاس، $\xi \in \mathbb{R}$ پارامتر مکان، $k \in \mathbb{R}$ پارامتر شکل و $\frac{1}{k}$ شاخص دم است. مقدار k نشان‌دهنده پهنای دم تابع توزیع می‌باشد؛ هر چقدر مقدار آن کمتر باشد دم توزیع پهن‌تر است. $E[X^r]$ برای $k > -\frac{1}{r}$ وجود دارد. از مهم‌ترین ویژگی توزیع GP می‌توان به این مورد اشاره کرد که اگر X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع $GP(k, \sigma)$ باشد، در این صورت برای یک آستانه u ، متغیر تصادفی $Y = (X - u | X > u)$ دارای توزیع $GP(k, \sigma - ku)$ است (دِزی برمودز و کاتس^{۲۴}، ۲۰۱۰).

هر چند روش مشخص و تجویز شده‌ای برای انتخاب آستانه وجود ندارد، اما یک روش معمول برای

شاخص‌های مواد غذایی به‌جز قند، بانک‌ها، خودرو، شیمیایی، مواد دارویی، سیمان، زراعت، فرآورده‌های نفتی، منسوجات، زغال‌سنگ، مالی، صنعت، قیمت ۵۰ شرکت، آزاد شناور و بازار دوم را مورد مقایسه قرار دهد و هم‌چنین بررسی کند که کدام یک از این دو معیار ریسک پیش‌بینی بهتری انجام می‌دهد؛ در این مقایسه از نسبت تخطی استفاده شده است.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

نظریه ارزش فرین

نظریه ارزش فرین نظریه‌ای است که برده‌های توزیع تمرکز دارد و توزیع مقادیر بسیار بزرگ (بسیار کوچک) را توصیف می‌کند. در حقیقت زمانی که ماکسیمم یک متغیر تصادفی مدل‌سازی می‌شود، نظریه ارزش فرین همان نقش پایه‌ای را بر عهده دارد که نظریه حد مرکزی در مدل‌سازی مجموع متغیرهای تصادفی ایفا می‌کند. در هر دو حالت، این نظریه‌ها به ترتیب توزیع حدی ماکسیمم‌ها و مجموع متغیرهای تصادفی را تعیین می‌کنند (زمانی و همکاران، ۱۳۹۲). در حالت کلی دو روش برای تعیین داده‌های فرین وجود دارد: روش ماکسیمم بلوک‌ها و روش مقادیر فراتر از آستانه. روش ماکسیمم بلوک‌ها بر این مبنا است که فاصله زمانی را به تکه‌ها و یا بلوک‌های یکسان تقسیم‌بندی کرده و فقط زبان حداکثر را برای هر یک از بلوک‌ها براساس توزیع ارزش فرین تعمیم‌یافته مدل‌سازی می‌کند. این رویکرد برای داده‌های زیاد، مفید نیست، چرا که تنها یک مشاهده در هر بلوک را به کار می‌گیرد. از سوی دیگر روش مقادیر فراتر از آستانه، تمام داده‌هایی را که بالاتر از یک آستانه هستند را مدل‌سازی می‌کند. داده‌هایی که فراتر از آستانه هستند با توزیع پارتوی تعمیم‌یافته برازش می‌شوند (صادقی و بهبودی، ۱۳۹۵).

یک نتیجه اساسی نظریه ارزش فرین، قضیه پیکان‌دس - بالکما و دِهان^{۲۳} است که بیان می‌کند اگر تابع توزیع F عضو ماکسیمم دامنه‌ی جذب توزیع ارزش فرین تعمیم‌یافته باشد، در این صورت

انتخاب آستانه‌ی مناسب رسم تابع میانگین فزونی نمونه به فرم

$$\{(u, e_n(u)), x_{(1)} < u < x_{(n)}\},$$

است که در آن $x_{(1)}$ و $x_{(n)}$ به ترتیب اولین و n امین آماره‌ی ترتیبی داده‌های نمونه می‌باشند و $e_n(u)$ تابع میانگین فزونی نمونه است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n I_{\{x_i > u\}}}, \quad (x^+ = \max(0, x)).$$

اگر تابع میانگین فزونی در بالای یک آستانه خاص، خطی راست با شیب مثبت باشد، نشانگر این است که داده‌ها دم‌سنگین و توزیع فزونی‌ها از توزیع پارتوی تعمیم‌یافته با پارامتر شکل منفی پیروی می‌کند، از سوی دیگر تابع میانگین فزونی برای داده‌های دم‌نمایی خطی افقی است و درنهایت این تابع برای داده‌های دم‌سبک، خطی با شیب منفی است (مک نیل و سالدین^{۲۵}، ۱۹۹۷).

اندازه‌گیری ریسک و معیارهای آن

مؤسسات مالی با ریسک‌های متنوعی اعم از مالی و غیرمالی دست‌وپنجه نرم می‌کنند. ازجمله این ریسک‌ها می‌توان به ریسک بازار، ریسک اعتباری، ریسک نقدینگی، ریسک نرخ بهره، ریسک تغییرات قیمت سهام و غیره و ازجمله ریسک‌های غیرمالی می‌توان به ریسک مدیریت، ریسک سیاسی، ریسک عملیاتی و غیره اشاره نمود. در بین انواع مختلف ریسک‌های موجود، تقریباً اکثر معاملات با ریسک بازار مواجه هستند و در میان ریسک‌های پیش روی مؤسسات مالی، سهم ریسک بازار در درماندگی مالی یک بنگاه اقتصادی بسیار چشم‌گیر است. ریسک بازار، ریسک ناشی از حرکات و یا نوسانات در قیمت‌ها یا نرخ‌های بازار می‌باشد؛ بنابراین، می‌توان در یک

تقسیم‌بندی، ریسک بازار را طبقه‌بندی نمود: ریسک سهام، ریسک اوراق بهادار با درآمد ثابت، ریسک نرخ ارز و ریسک کالا (شرکت ماتریس تحلیل‌گران سیستم‌های پیچیده، ۱۳۸۸). در ادامه به دو مورد از مهم‌ترین معیارهای ریسک اشاره خواهد شد.

ارزش در معرض خطر

ارزش در معرض خطر که به اختصار با نماد VaR نمایش داده می‌شود بیانگر حداکثر زیان مورد انتظار روی سبد دارایی‌ها یا مجموعه‌ی سرمایه‌گذاری، در طول افق زمانی معین (مثل یک روز یا یک ماه یا یک هفته) با سطح اطمینان مشخص می‌باشد (هال، ۲۰۰۲).

تعریف دوپارامتر در اندازه‌گیری VaR از اهمیت بالایی برخوردار است:

(۱) سطح اطمینان p ($0 < p < 1$)

(۲) افق زمانی موردنظر (دوره‌ی نگهداری)

به بیانی دیگر اگر متغیر تصادفی X با تابع توزیع $F(\cdot)$ میزان زیان یا بازدهی منفی در یک بازه‌ی زمانی مشخص باشد، آن‌گاه ارزش در معرض خطر متغیر تصادفی X در سطح اطمینان $p \in (0, 1)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$VaR_p(X) = \inf\{x \mid F_X(x) \geq p\}.$$

ریزش مورد انتظار

ارزش در معرض خطر یک معیار ریسک پذیرفته شده است که به‌طور گسترده در تجزیه و تحلیل ریسک در صنایع مالی با p نزدیک به یک استفاده می‌شود. با این حال، به‌خاطر نداشتن یک ویژگی خاص که معیارهای ریسک منسجم باید داشته باشند مورد انتقاد قرار گرفته است. این ویژگی‌ها به‌عنوان اصول معیارهای ریسک منسجم شناخته شده‌اند (آرتزور و همکاران، ۱۹۹۹). در این راستا ریزش مورد انتظار توجه زیادی را به‌عنوان یک معیار ریسک منسجم به‌دست آورده است. ایده ES اندازه‌گیری میانگین

که در آن n_u تعداد فزونی‌های بالاتر از آستانه u و n تعداد کل مشاهدات می‌باشد. معیار ریزش مورد انتظار از این حقیقت تعیین می‌شود که وقتی $(X - u | X > u)$ دارای توزیع $GPD(k, \sigma)$ باشد، آن گاه $(X - \hat{u} | X > \hat{u})$ با $\hat{u} > u$ دارای $GPD(k, \sigma - k(\hat{u} - u))$ است. از این رو، با شرط $k > 1$ برای متناهی بودن میانگین، زمانی که $VaR_p(X) > u$ داریم:

$$\widehat{ES}_p(X) = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{k}} \left[1 - \left(\frac{1}{1 + \hat{k}} \left(\frac{n}{n_u} (1 - p) \right)^{\hat{k}} \right) \right] \quad (3)$$

۳- پیشینه پژوهش

توسعه بازارهای مالی و رویارویی با شرایط عدم اطمینان، اهمیت تخمین دقیق معیارهای ریسک را بیش از پیش نشان می‌دهد. در دهه‌های اخیر، مطالعات زیادی در خصوص نظریه ارزش فرین برای محاسبه‌ی VaR و ES در زمینه مدیریت ریسک انجام شده است و کارایی این رویکرد در مقالات بسیاری به اثبات رسیده است. در ادامه مواردی از آن آورده شده است. مک نیل (۱۹۹۷)، نظریه ارزش فرین (روش مقادیر فراتر از آستانه) را برای داده‌های بیمه آتش-سوزی دانمارک به کار برد. نتایج پژوهش عملکرد بهتر نظریه ارزش فرین را نسبت به فرض نرمال بودن برای تابع توزیع در مدل کردن مقادیر فرین و دم تابع توزیع تایید می‌نماید.

آصف^{۲۶} (۲۰۰۹)، با استفاده از روش‌های شبیه-سازی تاریخی، واریانس - کواریانس و نظریه ارزش فرین به محاسبه‌ی VaR در بازارهای مصر، اردن، مراکش و ترکیه پرداخت. نتایج او نشان داد که روش شبیه‌سازی تاریخی و واریانس - کواریانس از کارایی کافی برخوردار نبوده و توزیع بازده شاخص‌ها در هر چهار کشور دم سنگین است.

مقبره و زوبی^{۲۷} (۲۰۰۶)، نیز به‌طور مشابه به محاسبه‌ی ارزش در معرض خطر با استفاده از نظریه ارزش فرین، شبیه‌سازی تاریخی، واریانس - کواریانس و

زیان است زمانی که حداکثر زیان رخ می‌دهد، حداکثر زیان نشان‌دهنده‌ی VaR است. به‌طور کلی، ES متغیر تصادفی X در سطح اطمینان

$p \in (0, 1)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ES_p(X) = E(X | X > VaR_p(X)),$$

که معادل است با

$$ES_p(X) = VaR_p(X) + E\left(\left(X - VaR_p(X)\right) | X > VaR_p(X)\right).$$

در روش POT صرف‌نظر از اینکه توزیع تغییرات ارزش سبد مالی از چه توزیع احتمالی پیروی می‌کند، ابتدا دم آن با استفاده از داده‌های که از یک مقدار آستانه بیشتر شده‌اند مدل‌سازی شده و سپس معیارهای ریسک با توجه به آن محاسبه می‌شود. برای این امر فرض کنیم $F(x)$ تابع توزیع یک توزیع پیوسته دلخواه باشد، توزیع فزونی رویدادهای زیان بر روی u (آستانه) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم (پارک و کیم، ۲۰۱۶):

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)},$$

که فرض می‌شود $GPD(k, \sigma)$ است (با توجه به قضیه پیکاندس - بالکما و دهان) بنابراین $F(x)$ را می‌توان به‌صورت زیر برآورد کرد:

$$\hat{F}(x) = (1 - F_n(u))GP(x; \hat{k}, u, \hat{\sigma}) + F_n(u), \quad (1)$$

که در آن $F_n(\cdot)$ تابع توزیع تجربی و \hat{k} ، $\hat{\sigma}$ پارامترهای برآورده شده GPD براساس داده‌های نمونه هستند. فرض کنید معیارهای ریسک در ناحیه GPD قرار گیرند؛ برآورد VaR از معکوس کردن (۱) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\widehat{VaR}_p = G_{\hat{k}, u, \hat{\sigma}}^{-1} \left[1 - \frac{1-p}{1-F_n(u)} \right] = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{k}} \left[1 - \left(\frac{n}{n_u} (1-p) \right)^{\hat{k}} \right], \quad (2)$$

ARCH برای برخی از کشورهای خاورمیانه پرداختند. نتایج آنها نشانگر این موضوع بود که توزیع بازده در این کشورها دم سنگین است و EVT عملکرد بهتری نسبت به دیگر روش‌ها دارد.

مارنیلی و همکاران^{۲۸} (۲۰۰۶)، به این نتیجه رسیدند که مدل EVT در برآورد VaR و ES به دلیل لحاظ نمودن دم سنگین، عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های شبیه‌سازی تاریخی و نرمال بودن نشان خواهد داد. نتایج آنها نیز گویای این موضوع بود.

گیلی و کلزی^{۲۹} (۲۰۰۶)، به کمک نظریه ارزش فرین و دو روش ماکسیمم بلوک‌ها و مقادیر فراتر از آستانه به مدل‌سازی معیارهای ریسک پرداختند. نتایج آنها نشان داد که نظریه ارزش فرین ابزار مفیدی برای محاسبه‌ی مقادیر فرین است و روش مقادیر فراتر از آستانه نسبت به روش ماکسیمم بلوک‌ها عملکرد بهتری دارد.

مهدوی و ماجدی (۱۳۸۹) کارایی نظریه ارزش فرین را در تخمین ارزش در معرض خطر با کارایی روش‌های GARCH، واریانس-کوارینانس و شبیه‌سازی تاریخی با استفاده از داده‌های بیمه مسئولیت شرکت بیمه ایران مورد مقایسه قرار دادند. نتایج آنها بیانگر این موضوع است که روش واریانس-کوارینانس، شبیه‌سازی تاریخی، توزیع پارتوی تعمیم‌یافته و توزیع پارتوی تعمیم‌یافته سازگار تخمین‌های نسبتاً پایدارتری را ارائه می‌دهند. هم‌چنین تخمین‌های حاصل از دو مدل $GARCH(1,1)$ و $GARCH(1,1)-t$ دارای نوسان بالایی هستند. در مجموع، توزیع پارتوی تعمیم‌یافته، شبیه‌سازی تاریخی و مدل $GARCH(1,1)$ تخمین‌های دقیق‌تری را ارائه می‌دهند.

زمانی و همکاران (۱۳۹۲)، نظریه ارزش فرین را برای محاسبه‌ی ارزش در معرض خطر بازده لگاریتمی شاخص قیمت و ثمره نقدی بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۱۳۷۸ - ۱۳۹۰ به کار گرفتند. در این بررسی، نظریه ارزش فرین با روش واریانس-کوارینانس (با فرض نرمال بودن توزیع بازده) و شبیه‌سازی تاریخی مقایسه شده است. نتایج نشان دهنده

این موضوع است که برای دنباله سمت راست توزیع بازده، شاخص بورس اوراق بهادار که نسبت به دنباله سمت چپ پهن‌تر است، نظریه ارزش فرین در تمام سطوح اطمینان کاراترین روش محاسبه ارزش در معرض خطر است، و برای دنباله سمت چپ نه در تمام سطوح اطمینان، بلکه در بالاترین آن‌ها نیز این روش بیشترین کارایی را دارد.

گرگانی فیروزجاه و پیروی (۱۳۹۲) با استفاده از داده‌های بیمه آتش‌سوزی در دوره‌ی زمانی ۱۳۸۸-۱۳۲۸ به بررسی رویکرد مقادیر فراتر از آستانه برای اندازه‌گیری ارزش در معرض خطر اوراق بهادار فاجعه‌آمیز پرداختند. مقدار آستانه u را با استفاده از تقریب توانی نرمال انتخاب و تفاوت میان u و VaR بالاتر از آستانه را به‌عنوان ریسک اوراق بهادار فاجعه‌آمیز انتخاب کردند. سپس با در نظر گرفتن فرصت‌های سرمایه‌گذاری آلترناتیو نظیر بورس اوراق بهادار تهران، طلا، املاک و مستغلات به تعیین نرخ بازده انتظاری بهینه این اوراق بهادار پرداختند. ریسک هر یک از فرصت‌های سرمایه‌گذاری فوق براساس مدل GARCH چند متغیره محاسبه شده است. نتایج آنها نشان می‌دهد نرخ بازده انتظاری اوراق بهادار فاجعه‌آمیز می‌بایست حداقل ۲۹/۳۳ درصد باشد.

صادقی و همکاران (۱۳۹۵)، نظریه ارزش فرین را برای محاسبه ارزش در معرض خطر بازده لگاریتمی نرخ دلار آمریکا در سال ۱۳۹۰ به کار بردند. در این بررسی فرض نرمال بودن توزیع بازده‌های لگاریتمی رد شده است و نظریه ارزش فرین مبنای محاسباتی این پژوهش قرار گرفته است. نتایج آنها نشان دهنده این موضوع است که رویکرد نظریه ارزش فرین در مدل-سازی نوسانات دلار آمریکا، برازش بهتری نسبت به سایر مدل‌هایی دارد که فرض نرمال بودن را مبنای محاسباتی خود قرار می‌دهند.

کاشی و همکاران (۱۳۹۶)، به محاسبه ارزش در معرض خطر و ریزش مورد انتظار در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از نظریه ارزش فرین (ماکسیمم بلوک‌ها و مقادیر فراتر از آستانه) پرداختند. پیش از

نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که محاسبه ارزش در معرض خطر با استفاده از روش‌های سنتی لزوماً به نتایج مناسبی نمی‌انجامد و در برخی موارد استفاده از نظریه ارزش فرین و در نظر گرفتن نوسانات شرطی برای داده‌ها موجب نتایج بهتری می‌شود این نتایج در سطح اطمینان بالاتر مشهودتر است.

همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد این مقاله قصد دارد به کمک نظریه ارزش فرین و روش مقادیر فراتر از آستانه، که با استفاده از آن مدل‌سازی جدا برای مجموعه داده‌های دم توزیع با استفاده از توزیع پارتوی تعمیم‌یافته و شروع از یک آستانه مناسب ممکن می‌باشد، به تخمین معیارهای ریسک (ارزش در معرض خطر و ریزش مورد انتظار) بپردازد. رویکردهای مختلفی در زمینه‌ی برآورد پارامترهای توزیع پارتوی تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار گرفته است. از آن‌جا که تخمین معیارهای ریسک به برآورد این پارامترها بستگی دارد، لذا انتخاب یک برآوردگر مناسب از اهمیت بسزایی برخوردار است. در ادامه به مواردی از آن اشاره خواهد شد.

برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) توسط گرمیشاوی (۱۹۹۳) و اسمیت (۱۹۸۴) مورد مطالعه قرار گرفته است. تابع درست‌نمایی برای $k > 1$ به بی‌نهایت میل می‌کند و MLE تنها برای $k \leq 1$ موجود است. هوسکینگ و والیس (۱۹۸۷)، روش گشتاورها (MOM) را با استفاده از دو گشتاور اول پیشنهاد دادند؛ اما عملکرد این روش برای $k \leq -\frac{1}{2}$ که گشتاور دوم موجود نمی‌باشد، ضعیف است. آنها همچنین روش گشتاورها با وزن احتمالی (PWM) نیز مورد بررسی قرار دادند. البته این روش نیز تنها برای $k > -1$ موجود است. هی و فانگ^{۳۰} (۱۹۹۹)، روش میانه را پیشنهاد کردند که از برابر قرار دادن میانه نمونه با میانه جامعه به دست می‌آید. برآوردگر گشتاور درست‌نمایی (LME) توسط ژانگ (۲۰۰۷) برای حل مشکلات عددی MLE پیشنهاد شد. برخلاف MLE، LME همیشه موجود است و دارای محاسبات ساده‌تری می‌باشد. ژانگ (۲۰۱۰) یک برآوردگر بیزی برای توزیع پارتوی

تخمین مدل‌ها، وجود رفتار دم سنگین در داده‌ها با استفاده از تابع میانگین فزونی و رسم $Q-Q$ بررسی شده است. برای تخمین مقدار آستانه بهینه، از تابع میانگین فزونی و رسم Hill استفاده کردند. نتایج آنها به طور کلی عملکرد مطلوب روش فراتر از آستانه (توزیع GP) نسبت به روش ماکسیمم بلوک‌ها که حساسیت زیادی به انتخاب طول دوره دارد را نشان می‌دهد. در نهایت نیز تخمین VaR و ES از مدل GPD کارایی بهتری را به نمایش گذاشت.

فلاح شمس و همکاران (۱۳۹۶) با استفاده از داده‌های قیمت نقدی سکه طلا، در بازه زمانی ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۴، مقدار وجه تضمین در قراردادهای آتی را با استفاده از مدل‌های ارزش در معرض خطر واریانس-کوارینانس مبتنی بر توزیع نرمال و تی-استیودنت، پارتوی تعمیم‌یافته و پارتوی تعمیم‌یافته سازگار تخمین زدند و با استفاده از آزمون‌های کوپیک و پوشش شرطی کریستوفرسن و همچنین توابع زیان دوم لویز و بلانکو-ایهل اقدام به پس‌آزمایی این مدل‌ها کردند. همچنین با استفاده از تمامی این رویکردها ریزش مورد انتظار وجه تضمین قراردادهای آتی را برآورد و به‌منظور انتخاب مدل برتر، از دو تابع نمره‌دهی شامل میانگین قدر مطلق خطاها و مجذور میانگین مربعات انحرافات استفاده کردند. نتایج آنها نشان می‌دهد که با توجه به دنباله‌های پهن توزیع تجربی داده‌های نقدی، مدل‌های واریانس-کوارینانس مبتنی بر تی-استیودنت و پارتوی تعمیم‌یافته توانایی بیشتری در مدل‌سازی این داده دارند.

سجاد و همکاران (۱۳۹۳)، مقدار ارزش در معرض را با استفاده از هفت روش مختلف از جمله نظریه ارزش فرین و برای سه سطح اطمینان، برای بازده لگاریتمی شاخص کل بورس تهران، نرخ برابری دلار و یورو به‌صورت روزانه محاسبه کردند. همچنین در این پژوهش به‌منظور پیش‌بینی نوسانات بازده از مدل GARCH استفاده شده است. برای بررسی دقت مدل‌های استفاده شده، آزمون‌های نسبت شکست‌های کوپیک، کریستوفرسن و تابع زیان لویز را به کار بردند.

روش‌های دیگر جدیدتر هستند، مشکلات روش‌های قدیمی را حل کردند و در مطالعات شبیه‌سازی عملکرد بهتری نسبت به روش‌های دیگر داشتند.

روش ماکسیمم درست‌نمایی

برای یک نمونه مانند \mathbf{x} به اندازه n از توزیع $GP(k, \sigma)$ ، تابع لگاریتم درست‌نمایی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\log L(k, \sigma; \mathbf{x}) = \begin{cases} -n \log \sigma + \left(\frac{1}{k} - 1\right) \sum_{i=1}^n \log \left(1 - \frac{kx_i}{\sigma}\right), & k \neq 0, \\ -n \log \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n x_i, & k = 0. \end{cases}$$

بدیهی است که برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) تنها برای $k \leq 1$ موجود هستند؛ و برای $k > 1$ تابع لگاریتم درست‌نمایی، وقتی $\frac{\sigma}{k}$ به $x_{(n)}$ نزدیک می‌شود به بی‌نهایت میل می‌کند. چندین روش برای انجام برآورد ML، پارامترهای GPD موجود است؛ یک روش مفید برای استفاده، توسط گرمشاو (۱۹۹۳) پیشنهاد شد و برتری‌اش این است که با به کار بردن یک تبدیل مناسب جست‌وجوی ماکسیمم در دو بعد را به یک بعد کاهش می‌دهد. برای اجرای این روش در ابتدا پارامترهای (σ, k) توزیع GP را به (θ, k) ، $\theta = \frac{k}{\sigma}$ ، تغییر پارامتر می‌دهیم و پس از برآورد پارامترهای k و θ ، پارامتر σ توسط رابطه‌ی $\hat{\sigma} = \frac{\hat{k}}{\hat{\theta}}$ برآورد می‌شود. تابع لگاریتم درست‌نمایی برای (θ, k) به صورت زیر می‌باشد:

$$l(\theta, k) = n \log \left(\frac{\theta}{k}\right) + \left(\frac{1}{k} - 1\right) \sum_{i=1}^n \log(1 - \theta x_i).$$

با فرض معلوم بودن θ برآوردگر ML پارامتر k ، به صورت $\hat{k}_\theta = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 - \theta x_i)$ محاسبه می‌شود. با جایگذاری k_θ در $l(\theta, k)$ داریم:

$$l(\theta) = n \left[\log \left(\frac{\theta}{k_\theta}\right) + k_\theta - 1 \right].$$

تعمیم‌یافته معرفی کرد که از لحاظ کارایی و آریبی دارای عملکرد بسیار خوبی در مطالعات شبیه‌سازی است.

سانگ و سانگ (۲۰۱۲)، یک برآوردگر برای توزیع GP براساس چارچوب POT پیشنهاد دادند. روش آنها برآوردگر حداقل مربعات غیر خطی تحت چهارچوب POT نام داشت. برای مجموعه داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع‌های دم سنگین، آنها عملکرد این روش را در تخمین چندک‌های غایی نسبت به روش‌های دیگر بهتر گزارش کردند.

پس از آنها پارک و کیم (۲۰۱۶)، برآوردگر حداقل مربعات غیرخطی وزنی براساس چارچوب POT را به منظور تخمین ارزش در معرض خطر و ریزش مورد انتظار معرفی کردند. روش آنها از سانگ و سانگ اقتباس شده است و ایرادات روش آنها را برطرف می‌کند. با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی مختلف و یک مدل واقعی، نشان دادند که عملکرد این برآوردگر نسبت به برآوردگرهای دیگر در تخمین معیارهای ریسک به ویژه در سطوح اطمینان بالا بهتر است.

۴- سوالات پژوهشی

۱) کدام یک از برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی، گشتاور درست‌نمایی، ژانگ و حداقل مربعات غیر خطی وزنی تحت چارچوب POT برآوردهای دقیق‌تری برای پارامترهای توزیع GP به منظور تخمین معیارهای ریسک ارائه می‌دهد؟
۲) آیا ریزش مورد انتظار در مقایسه با ارزش در معرض خطر از قابلیت پیش‌بینی بهتری برخوردار است؟

۵- روش‌شناسی پژوهش

در این بخش به چهار روش برآوردیابی برای پارامترهای توزیع پارتوی تعمیم‌یافته اشاره می‌شود. دلایل انتخاب این روش‌ها این است که نسبت به

$$k = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 - bx_i).$$

با حذف k ، تنها به حل یک معادله یک بعدی برای b نیاز داریم. البته حل عددی آن پیچیده است و ممکن است دارای مشکلات همگرایی باشد.

برای هر مقدار ثابت r که در شرط $(1 + rk) > 0$ صدق کند، $(1 + rk)^{-1}$ است دزی برمودز و کاتس، (۲۰۱۰):

(۵)

$$(n^{-1} \sum_{i=1}^n (1 - bx_i)^r - (1 + rk)^{-1}) / r = 0.$$

معادلاتی که توسط روش ML در (۴) به دست می‌آیند، متناظر با انتخاب $r = -1$ ، $r = 0$ (مورد حدی) در (۵) می‌باشد. با جایگذاری r توسط $-\frac{r}{k}$ در (۵) همراه با معادله دوم در (۴)، معادله برآورد برای b به صورت زیر درمی‌آید:

(۶)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - bx_i)^p - (1 - r)^{-1} = 0, \quad b < x_{(n)}^{-1},$$

$$\text{که } p = \frac{rn}{\sum_{i=1}^n \log(1 - bx_i)}, \quad r < 1.$$

با توجه به قضیه بیان شده در ژانگ (۲۰۰۷) معادله‌ی (۶) دارای یک جواب یکتا است که می‌توان آن را به سادگی با استفاده از روش‌های عددی به دست آورد. با داشتن \hat{b} ، k و σ به صورت زیر برآورد می‌شوند:

$$\hat{k} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 - \hat{b} x_i), \quad \hat{\sigma} = \frac{\hat{k}}{\hat{b}}.$$

ژانگ یک مطالعه شبیه‌سازی جهت مقایسه‌ی کارایی روش LME با روش‌های MOM و PWM انجام داد و نتایج وی مبین این بود که روش LME دارای کارایی بهتری نسبت به این دو روش است.

لذا $l(\theta)$ تنها تابعی از θ و داده‌ها می‌شود؛ که به آن تابع لگاریتم درست‌نمایی نیم‌رخ می‌گوییم. مقدار θ ی که تابع لگاریتم درست‌نمایی نیم‌رخ را ماکسیم می‌کند باید به صورت عددی روی فضای $\left\{ \theta \neq 0, \theta < \frac{1}{x_{(n)}} \right\}$ محاسبه شود. از نقطه‌نظر محاسباتی این پارامتر بندی کاراتر و محاسبات سریع‌تر انجام می‌شود.

روش گشتاور درست‌نمایی

ژانگ (۲۰۰۷) روشی برای برآورد پارامترهای توزیع GP معرفی کرد؛ او معتقد بود که، روش‌های قدیمی برای برآورد پارامترهای این توزیع دارای نقص‌های محاسباتی و تئوری هستند. به‌عنوان مثال، روش ماکسیم درست‌نمایی محاسبات آن دشوار است و دارای مشکلات همگرایی می‌باشد. روش گشتاورها برای $k \leq -\frac{1}{2}$ وجود ندارد چون $Var(X) = \infty$. به‌طور مشابه برآوردگر گشتاورها با وزن احتمالی نیز برای $k \leq -1$ وجود ندارد. علاوه بر این هر دو برآوردگر MOM و PWM دارای کارایی مجانبی کمی هستند و گاهی اوقات برآوردهای پرتی تولید می‌کنند. او ادعا کرد که برآوردگر گشتاور درست‌نمایی (LME) مشکلات روش‌های قدیمی را حل و برآوردهای با کارایی مجانبی بالا تولید می‌کند. به این منظور، در ابتدا (σ, k) توزیع GP را به (b, k) که $b = \frac{k}{\sigma}$ تغییر پارامتر می‌دهیم. سپس براساس هر برآوردی از (b, k) ، σ را می‌توان توسط $\hat{\sigma} = \frac{\hat{k}}{\hat{b}}$ تخمین زد.

فرض کنید $\mathbf{x} = (x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ تابع لگاریتم درست‌نمایی برای نمونه به صورت زیر می‌باشد:

$$l(\mathbf{x}, b, k) = n \log\left(\frac{b}{k}\right) + \left(\frac{1}{k} - 1\right) \sum_{i=1}^n \log(1 - bx_i).$$

معادلاتی که توسط روش ML برای (b, k) به دست می‌آیند، معادل‌اند با

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - bx_i)^{-1} - (1 - k)^{-1} = 0,$$

روش ژانگ

ژانگ (۲۰۱۰) یک روش برآوردیابی برای پارامترهای توزیع GP براساس تابع درستنمایی نیمرخی و روش بیزی تجربی مطرح کرد. روش او به این صورت است که ابتدا (σ, k) در توزیع GP را به (θ, k) با $\theta = \frac{k}{\sigma}$ تغییر پارامتر می‌دهیم و زمانی که تخمین θ و k را به دست آوردیم، σ توسط $\hat{\sigma} = \frac{\hat{k}}{\hat{\theta}}$ برآورد می‌شود. تابع لگاریتم درستنمایی برای (θ, k) به صورت زیر می‌باشد:

$$l(\theta, k) = n \log \left(\frac{\theta}{k} \right) + \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \sum_{i=1}^n \log(1 - \theta x_i), \quad \theta < \frac{1}{x_{(n)}}$$

با فرض معلوم بودن θ برآوردگر ML پارامتر k ، $\hat{k}_\theta = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(1 - \theta x_i)$ است. برآوردگر جدید $\theta = \frac{k}{\sigma}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\theta}_{NEW} = \frac{\int \theta \pi(\theta) L(\theta) d\theta}{\int \pi(\theta) L(\theta) d\theta},$$

که $\pi(\theta)$ تابع چگالی پیشین برای θ و $l(\theta) = \log[L(\theta)] = n[\log(\frac{\theta}{k_\theta}) + k_{\theta-1}]$ تابع لگاریتم درستنمایی نیمرخی است. چون محاسبه انتگرال در معادله (۷) دشوار است؛ معادله (۷) توسط میانگین وزنی به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\hat{\theta}_{NEW} = \sum_{j=1}^m w_j \theta_j,$$

$$w_j = \frac{L(\theta_j)}{\sum_{t=1}^m L(\theta_t)} = \frac{1}{\sum_{t=1}^m} e^{l(\theta_t) - l(\theta_j)},$$

که θ_j چندک توزیع پیشین است $(j = 1, 2, \dots, m)$ و $m = 20 + \sqrt{n}$ برای ساده تر شدن و هم‌چنین کارایی برآورد و کم بودن آریبی برآوردگرهای جدید، ژانگ توزیع پیشین $\theta - X_n^{-1}$

را GPD با پارامتر شکل k و پارامتر σ انتخاب کرد.

با استفاده از رابطه $\frac{j-0.5}{m} = 1 - F_{k,\sigma}(\frac{n-1}{n+1} x_{(n)}^{-1} - \theta_j)$ ، θ_j به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$\theta_j = \frac{n-1}{n+1} x_{(n)}^{-1} - \frac{\sigma}{k} \left[1 - \left(\frac{j-0.5}{m} \right)^k \right], \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

سرانجام بر اساس معادلات (۸) و (۹) برآوردگرهای k و σ به صورت زیر حاصل می‌گردند:

$$\hat{k}_{NEW} = -n^{-1} \sum_{i=1}^n \log(1 - \hat{\theta}_{NEW} x_i), \quad \hat{\sigma}_{NEW} = \frac{\hat{k}_{NEW}}{\hat{\theta}_{NEW}},$$

اگر پارامترهای پیشین σ و k برای توزیع GP به صورت $[2\text{median}(\sigma_{0.3}, k = -1, \sigma_{0.9})]^{-1}$ انتخاب شوند، برآوردگرهای \hat{k}_{NEW} و $\hat{\sigma}_{NEW}$ کارتر می‌شوند؛ که برای $0 < p < 1$ داریم:

$$\hat{\sigma}_p = \frac{\hat{k}_p x_{1-p}^{k_p}}{(1-p)^{k_p}}, \quad \hat{k}_p = \log_p \left(\frac{x_{1-p}^{k_p}}{x_{1-p}^{k_p} - 1} \right).$$

که $\hat{x}_\alpha = x_{([n\alpha+0.5])}$ چندک α ام داده‌های نمونه است $(0 < \alpha < 1)$.

روش حداقل مربعات غیرخطی وزنی

پارک و کیم (۲۰۱۶) یک برآوردگر جدید برای پارامترهای توزیع GP براساس چارچوب POT پیشنهاد کردند؛ که در ادامه به‌طور خلاصه به آن اشاره می‌شود. روش آن‌ها، به نام برآوردگر حداقل مربعات غیرخطی وزنی تحت چارچوب POT (pot-WNLS)، شامل دو گام است که گام اول به‌منظور پایا ساختن برآورد پارامتر شکل k با استفاده از یک برآورد اولیه، طراحی شده است. فرض کنید $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ یک

۶- داده‌ها و تحلیل نتایج در بورس اوراق بهادار تهران

در این بخش به کمک نظریه ارزش فرین و روش مقادیر فراتر از آستانه عملکرد برآوردهای ژانگ، LME، MLE و Pot-WNLS را برای برآورد پارامترهای توزیع پارتوی تعمیم‌یافته به منظور تخمین VaR و ES بازده لگاریتمی چندین شاخص بورس اوراق بهادار تهران مورد بررسی و مقایسه قرار می‌دهیم.

داده‌ها

داده‌های مورد استفاده مربوط به شاخص‌های مواد غذایی به جز قند، بانک‌ها، خودرو، شیمیایی، مواد دارویی، سیمان، زراعت، فرآورده‌های نفتی، منسوجات، زغال‌سنگ، مالی، صنعت، قیمت ۵۰ شرکت، آزاد شناور و بازار دوم در بازه زمانی ۵ فروردین سال ۱۳۹۲ تا ۲۹ اردیبهشت سال ۱۳۹۵ است. بازده روزانه لگاریتمی در زمان t به صورت $\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$ محاسبه می‌شود که P_t نشان‌دهنده مقدار شاخص در روز t است. در شکل (۱) مقدار و بازده روزانه لگاریتمی یکی شاخص‌های مورد مطالعه (مواد دارویی) در بازه زمانی ذکر شده، نشان داده شده است. همچنین توصیف آماری بازده لگاریتمی شاخص مواد دارویی بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ذکر شده در جدول ۱ آمده است.

نمونه با حجم n و $n_u < n$ مشاهده وجود دارد که از آستانه‌ی انتخابی GPD بزرگ‌تر هستند. بدون از دست رفتن کلیت مسئله، فرض می‌شود $x_{(1)} > x_{(2)} > \dots > x_{(n)}$ در گام اول، با استفاده از مینیمم سازی غیرخطی برآورد اولیه $(\hat{k}_1, \hat{\sigma}_1)$ را به صورت زیر می‌یابیم:

$$(\hat{k}_1, \hat{\sigma}_1) = \arg \min_{(k, \sigma)} \sum_{i=1}^{n_u} [\log(1 - F_n(x_i)) - \log(1 - F(x_i))]^2,$$

$$\arg \min_{(k, \sigma)} \sum_{i=1}^{n_u} \left[\log \frac{1 - F_n(x_i)}{1 - F_n(u)} - \log(1 - GP(x_i; k, u, \sigma)) \right]^2.$$

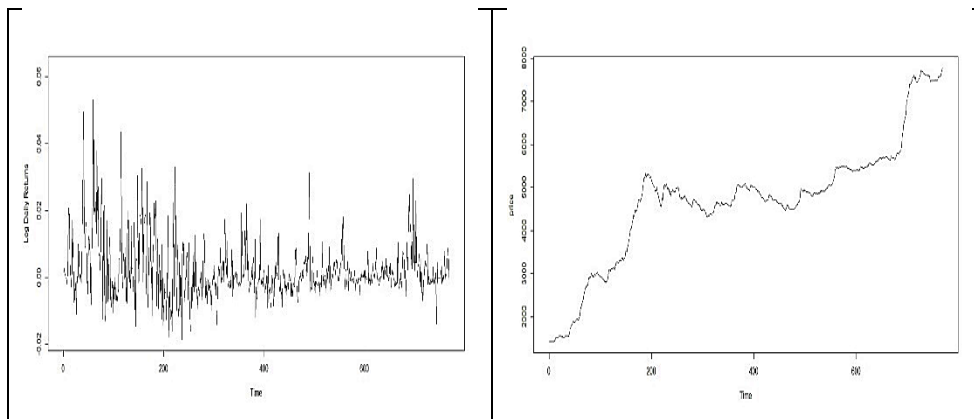
که در آن $F_n(x)$ تابع توزیع تجربی و به $F(x)$ در (۱) اشاره شد. با استفاده از $(\hat{k}_1, \hat{\sigma}_1)$ به عنوان مقادیر اولیه، گام دوم بهینه‌سازی نیز به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\arg \min_{(k, \sigma)} \sum_{i=1}^{n_u} \left[\frac{i(n-i+1)}{(n+2)(n+1)^2} \right]^{-1} [F_n(x_i) - F(x_i)]^2$$

$$(\hat{k}_2, \hat{\sigma}_2) = \arg \min_{(k, \sigma)} \sum_{i=1}^{n_u} \left[\frac{i(n-i+1)}{(n+2)(n+1)^2} \right]^{-1} \left[\frac{F_n(x_i) - F_n(u)}{1 - F_n(u)} - GP(x_i; k, u, \sigma) \right]^2.$$

را برآوردگر حداقل مربعات غیرخطی وزنی تحت چارچوب POT می‌نامیم.

شکل ۱- مقدار و بازده لگاریتمی شاخص مواد دارویی بورس اوراق بهادار تهران



جدول ۱- مشخصات آماری بازده لگاریتمی شاخص مواد دارویی بورس اوراق بهادار تهران

تعداد نمونه	میانگین	میانه	انحراف معیار	کشیدگی	چولگی	مینیمم	ماکسیمم
۷۶۸	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۰۱۵	۰/۰۰۸۸	۸/۴۳۰۸	۱/۶۴۰۷	-۰/۰۱۸۵	۰/۰۶۲۶

همان‌طور که در جدول (۱) دیده می‌شود کشیدگی بازده لگاریتمی شاخص مواد دارویی بورس اوراق بهادار تهران برابر است با ۸/۴۳۰۸ که نشان می‌دهد توزیع بازده از توزیع نرمال فاصله‌ی زیادی دارد. همچنین مقدار چولگی ۱/۶۴۰۷ نشان می‌دهد توزیع بازده متقارن نیست و چوله به راست می‌باشد؛ به عبارت دیگر توزیع بیشتر به سمت راست یا بازده لگاریتمی مثبت متمایل است.

مقایسه برآوردگرها

چهار برآوردگر ژانگ، LME، MLE و pot-WNLS بر روی بازده روزانه لگاریتمی شاخص‌های مواد غذایی به جز قند، بانک‌ها، خودرو، شیمیایی، مواد دارویی، سیمان، زراعت، فرآورده‌های نفتی، منسوجات، زغال‌سنگ، مالی، صنعت، قیمت ۵۰ شرکت، آزاد شناور و بازار دوم در بازه‌ی زمانی ۵ فروردین سال ۱۳۹۲ تا ۲۹ اردیبهشت سال ۱۳۹۵ برای برآورد پارامترهای توزیع پارتوی تعمیم‌یافته به‌منظور تخمین VaR و ES اجرا شده‌اند.

در محاسبات هر دو قسمت، سمت چپ و راست توزیع بازده در نظر گرفته شده‌است. به این علت که قسمت سمت چپ نشان‌دهنده‌ی زیان برای سرمایه‌گذار است که بر روی شاخص موقعیت خرید گرفته، درحالی‌که قسمت سمت راست توزیع نشان‌دهنده‌ی زیان برای سرمایه‌گذاری است که موقعیت فروش بر روی شاخص گرفته است (زمانی و همکاران، ۱۳۹۲).

برای مقایسه‌ی این برآوردگرها از نسبت تخطی استفاده شده است. به این صورت که از داده‌های ۱ تا ۶۶۷ استفاده شده و مقدار VaR و ES را با استفاده از چهار برآوردگر در سطوح اطمینان مختلف پیش‌بینی کرده، سپس به کمک داده‌های ۶۶۸ تا ۷۶۸ نسبت

تخطی محاسبه گردیده است. تخطی زمانی رخ می‌دهد که بازده واقعی در یک روز از مقدار پیش‌بینی شده بیشتر باشد. نسبت تخطی برابر با تعداد تخطی‌های صورت گرفته تقسیم بر تعداد داده‌های در نظر گرفته شده است. از طرفی نسبت تخطی مورد انتظار چندک qام برابر با (۱-q) است. برای مثال نسبت تخطی مورد انتظار در چندک ۰/۹۷ برابر با ۰/۰۳ است یعنی تنها ۳ بازده واقعی از ۱۰۰ بازده می‌تواند از مقدار پیش‌بینی شده بیشتر باشد. بر این اساس، برآوردگری در هر سطح اطمینان بهترین کارایی را دارد که نسبت تخطی آن کمترین فاصله را از نسبت تخطی مورد انتظار داشته باشد. به‌طور مشابه، در مقایسه‌ی معیارهای ریسک (ارزش در معرض خطر و ریزش مورد انتظار) نیز معیاری پیش‌بینی بهتری را انجام می‌دهد که نسبت تخطی محاسبه شده برای آن کمترین فاصله را از نسبت تخطی مورد انتظار داشته باشد.

لازم به ذکر است که در اینجا برای تعیین آستانه از تابع میانگین فزونی استفاده شده است و در محاسبات، آن قسمت از دم توزیع (راست یا چپ) که تابع میانگین فزونی برای آن خطی راست با شیب مثبت می‌باشد، آورده شده است (داده‌های دم سنگین). جدول‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ نشان‌دهنده‌ی VaR، ES و نسبت تخطی برآوردگرهای ژانگ، LME، MLE و pot-WNL در سطوح اطمینان مختلف برای بازده روزانه لگاریتمی شاخص‌های ذکرشده، می‌باشد. اعداد داخل پرانتز در هر خانه از جدول نشان‌دهنده‌ی نسبت تخطی است. علامت (-) در جداول نشان‌دهنده این موضوع است که آستانه محاسبه شده از چندک‌های مورد نظر بیشتر بوده است.

جدول ۲- ES، VaR و نسبت تخطی شاخص‌های بازار دوم، قیمت ۵۰ شرکت و آزاد شناور

شاخص	برآوردگر	معیارهای ریسک	نسبت تخطی مورد انتظار برای کدهم سمت رلیت				نسبت تخطی مورد انتظار برای کدهم سمت چپ			
			۰/۰۳	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۳	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۰۱
بازار دوم	زانگ	VaR	۰/۰۱۹۴(۰/۰۳)	۰/۰۲۱۴(۰/۰۳)	۰/۰۲۵۷(۰/۰۱)	۰/۰۵۰۷(۰)				
		ES	۰/۰۲۶۷(۰/۰۱)	۰/۰۲۹۹(۰)	۰/۰۳۶۶(۰)	۰/۰۷۶۰(۰)				
	MLE	VaR	۰/۰۱۹۴(۰/۰۳)	۰/۰۲۱۵(۰/۰۳)	۰/۰۲۵۶(۰/۰۱)	۰/۰۴۸۹(۰)				
		ES	۰/۰۲۶۴(۰/۰۱)	۰/۰۲۹۵(۰)	۰/۰۳۵۷(۰)	۰/۰۷۰۵(۰)				
	LME	VaR	۰/۰۱۹۵(۰/۰۳)	۰/۰۲۱۵(۰/۰۳)	۰/۰۲۵۶(۰/۰۱)	۰/۰۴۷۶(۰)				
		ES	۰/۰۲۶۳(۰/۰۱)	۰/۰۲۹۲(۰)	۰/۰۳۵۱(۰)	۰/۰۶۷۰(۰)				
	pot-WNLS	VaR	۰/۰۱۹۵(۰/۰۳)	۰/۰۲۱۱(۰/۰۳)	۰/۰۲۳۹(۰/۰۳)	۰/۰۳۲۸(۰)				
		ES	۰/۰۲۳۴(۰/۰۳)	۰/۰۲۵۰(۰/۰۲)	۰/۰۲۷۸(۰)	۰/۰۳۶۶(۰)				
قیمت ۵۰ شرکت	زانگ	VaR	۰/۰۱۸۹(۰/۰۳)	۰/۰۲۱۷(۰/۰۲)	۰/۰۲۷۳(۰)	۰/۰۵۶۴(۰)				
		ES	۰/۰۲۸۰(۰)	۰/۰۳۱۹(۰)	۰/۰۳۹۸(۰)	۰/۰۸۰۸(۰)				
	MLE	VaR	۰/۰۱۹۰(۰/۰۳)	۰/۰۲۱۸(۰/۰۲)	۰/۰۲۷۲(۰)	۰/۰۵۴۳(۰)				
		ES	۰/۰۲۷۷(۰)	۰/۰۳۱۵(۰)	۰/۰۳۸۸(۰)	۰/۰۷۵۲(۰)				
	LME	VaR	۰/۰۱۹۰(۰/۰۳)	۰/۰۲۱۸(۰/۰۲)	۰/۰۲۷۲(۰)	۰/۰۵۳۲(۰)				
		ES	۰/۰۲۷۶(۰)	۰/۰۳۱۲(۰)	۰/۰۳۸۳(۰)	۰/۰۷۲۴(۰)				
	pot-WNLS	VaR	۰/۰۱۹۰۲(۰/۰۳)	۰/۰۲۱۳(۰/۰۲)	۰/۰۲۶۹(۰/۰۱)	۰/۰۳۷۵(۰)				
		ES	۰/۰۲۴۵(۰/۰۲)	۰/۰۲۶۸(۰/۰۱)	۰/۰۳۰۵(۰)	۰/۰۴۲۵(۰)				
آزاد شناور	زانگ	VaR								
		ES								
	MLE	VaR								
		ES								
	LME	VaR								
		ES								
	pot-WNLS	VaR								
		ES								

جدول ۳- VaR، ES و نسبت تخطی شاخص های مالی، منسوجات، صنعت و زغال سنگ

شاخص	برآوردگر	معیارهای ریسک	نسبت تخطی مورد انتظار برای دم سمت راست				نسبت تخطی مورد انتظار برای دم سمت چپ			
			۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۴
مالی	ژانگ	VaR	۰/۰۲۸۷(۰/۰۵)	۰/۰۳۰۱(۰/۰۴)	۰/۰۳۲۹(۰/۰۲)	۰/۰۴۶۶(۰)				
		ES	۰/۰۳۳۲(۰/۰۲)	۰/۰۳۵۱(۰)	۰/۰۳۸۸(۰)	۰/۰۵۷۱(۰)				
	MLE	VaR	۰/۰۲۸۸(۰/۰۵)	۰/۰۳۰۳(۰/۰۳)	۰/۰۳۳۰(۰/۰۲)	۰/۰۴۵۱				
		ES	۰/۰۳۳۰(۰/۰۲)	۰/۰۳۴۸(۰)	۰/۰۳۸۲(۰)	۰/۰۵۲۹(۰)				
	LME	VaR	۰/۰۲۸۸(۰/۰۵)	۰/۰۳۰۳(۰/۰۳)	۰/۰۳۳۰(۰/۰۲)	۰/۰۴۴۹(۰)				
		ES	۰/۰۳۳۰(۰/۰۲)	۰/۰۳۴۸(۰)	۰/۰۳۸۱(۰)	۰/۰۵۲۴(۰)				
	pot-WNLS	VaR	۰/۰۲۸۸(۰/۰۵)	۰/۰۳۰۲(۰/۰۳)	۰/۰۳۲۵(۰/۰۳)	۰/۰۴۰۰(۰)				
		ES	۰/۰۳۲۲(۰/۰۳)	۰/۰۳۳۵(۰/۰۱)	۰/۰۳۵۸(۰)	۰/۰۴۳۱(۰)				
منسوجات	ژانگ	VaR	۰/۰۲۷۲(۰/۰۱)	۰/۰۳۱۳(۰/۰۱)	۰/۰۴۱۳(۰/۰۱)	۰/۱۳۰۹(۰)				
		ES	۰/۰۵۰۵(۰/۰۱)	۰/۰۶۱۳(۰/۰۱)	۰/۰۸۷۳(۰/۰۱)	۰/۳۲۱۵(۰)				
	MLE	VaR	۰/۰۲۷۲(۰/۰۱)	۰/۰۳۱۴(۰/۰۱)	۰/۰۴۱۳(۰/۰۱)	۰/۱۲۸۷(۰)				
		ES	۰/۰۵۰۰(۰/۰۱)	۰/۰۶۰۴(۰/۰۱)	۰/۰۸۵۵(۰/۰۱)	۰/۳۰۶۷(۰)				
	LME	VaR	۰/۰۲۷۱(۰/۰۱)	۰/۰۳۱۳(۰/۰۱)	۰/۰۴۱۳(۰/۰۱)	۰/۱۳۳۵(۰)				
		ES	۰/۰۵۱۲(۰/۰۱)	۰/۰۶۲۳(۰/۰۱)	۰/۰۸۹۳(۰/۰۱)	۰/۳۳۸۸(۰)				
	pot-WNLS	VaR	۰/۰۲۷۴(۰/۰۱)	۰/۰۳۰۶(۰/۰۱)	۰/۰۳۵۹(۰/۰۱)	۰/۱۲۹۳(۰)				
		ES	۰/۰۳۵۰(۰/۰۱)	۰/۰۳۸۱(۰/۰۱)	۰/۰۴۳۳(۰/۰۱)	۰/۳۰۶۸(۰)				
صنعت	ژانگ	VaR	-	-	۰/۰۲۲۲(۰/۰۳)	۰/۰۴۲۲(۰)				
		ES	-	-	۰/۰۳۷۵(۰)	۰/۱۳۹۳(۰)				
	MLE	VaR	-	-	۰/۰۲۲۲(۰/۰۳)	۰/۰۴۲۹(۰)				
		ES	-	-	۰/۰۳۹۸(۰)	۰/۱۶۱۶(۰)				
	LME	VaR	-	-	۰/۰۲۲۳(۰/۰۳)	۰/۰۴۱۳(۰)				
		ES	-	-	۰/۰۳۴۹(۰)	۰/۱۱۳۴(۰)				
	pot-WNLS	VaR	-	-	۰/۰۲۱۸(۰/۰۴)	۰/۰۳۹۴(۰)				
		ES	-	-	۰/۰۳۹۹(۰)	۰/۱۷۲۴(۰)				
زغال سنگ	ژانگ	VaR	-	-	۰/۰۴۶۱(۰/۰۳)	۰/۱۵۱۴(۰)				
		ES	-	-	۰/۱۱۹۷(۰)	۰/۵۹۱۷(۰)				
	MLE	VaR	-	-	۰/۰۴۶۹(۰/۰۳)	۰/۱۳۷۳(۰)				
		ES	-	-	۰/۰۹۳۴(۰)	۰/۳۳۱۸(۰)				
	LME	VaR	-	-	۰/۰۴۶۹(۰/۰۳)	۰/۱۳۶۴(۰)				
		ES	-	-	۰/۰۹۲۴(۰)	۰/۳۲۰۸(۰)				
	pot-WNLS	VaR	-	-	۰/۰۴۵۱(۰/۰۶)	۰/۱۲۵۰(۰)				
		ES	-	-	۰/۰۹۱۸(۰)	۰/۳۶۰۱(۰)				

جدول ۴- VaR، ES و نسبت تخطی شاخص‌های مواد غذایی به جز قند، بانک‌ها، خودرو، شیمیایی

شاخص	برآوردگر	معیارهای ریسک	نسبت تخطی مورد انتظار برای دم سمت راست			
			۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳
مواد غذایی به جز قند	ژانگ	VaR	۰/۰۹۵۴(۰)	۰/۰۳۴۱۶(۰)	۰/۰۲۸۴(۰/۰۱)	۰/۰۲۶۲(۰/۰۲)
		ES	۰/۲۹۰۰(۰)	۰/۰۷۱۲(۰)	۰/۰۵۱۰(۰)	۰/۰۴۳۰(۰)
	MLE	VaR	۰/۰۹۲۳(۰)	۰/۰۳۴۲(۰)	۰/۰۲۸۵(۰/۰۱)	۰/۰۲۶۳(۰/۰۲)
		ES	۰/۲۵۶۲(۰)	۰/۰۶۷۵(۰)	۰/۰۴۹۱(۰)	۰/۰۴۱۸(۰)
	LME	VaR	۰/۰۹۵۱(۰)	۰/۰۳۴۱(۰)	۰/۰۲۸۴(۰/۰۱)	۰/۰۲۶۲(۰/۰۲)
		ES	۰/۲۸۶۱(۰)	۰/۰۷۰۸(۰)	۰/۰۵۰۸(۰)	۰/۰۴۲۹(۰)
	pot-WNLS	VaR	۰/۰۴۲۳(۰)	۰/۰۳۱۷(۰/۰۱)	۰/۰۲۸۴(۰/۰۱)	۰/۰۲۶۴(۰/۰۲)
		ES	۰/۰۴۶۶(۰)	۰/۰۳۶۳(۰)	۰/۰۳۳۱(۰/۰۱)	۰/۰۳۱۳(۰/۰۱)
بانک‌ها	ژانگ	VaR	۰/۰۵۰۶(۰)	۰/۰۳۶۳(۰/۰۳)	۰/۰۳۳۰(۰/۰۵)	۰/۰۳۱۳(۰/۰۶)
		ES	۰/۰۵۹۹(۰)	۰/۰۴۲۴(۰)	۰/۰۳۸۴(۰)	۰/۰۳۶۳(۰/۰۳)
	MLE	VaR	۰/۰۴۹۷(۰)	۰/۰۳۶۳(۰/۰۳)	۰/۰۳۳۱(۰/۰۵)	۰/۰۳۱۳(۰/۰۶)
		ES	۰/۰۵۷۶(۰)	۰/۰۴۲۱(۰)	۰/۰۳۸۳(۰)	۰/۰۳۶۲(۰/۰۳)
	LME	VaR	۰/۰۴۸۸(۰)	۰/۰۳۶۴(۰/۰۲)	۰/۰۳۳۲(۰/۰۵)	۰/۰۳۱۴(۰/۰۶)
		ES	۰/۰۵۵۳(۰)	۰/۰۴۱۷(۰)	۰/۰۳۸۲(۰)	۰/۰۳۶۲(۰/۰۳)
	pot-WNLS	VaR	۰/۰۴۳۳(۰)	۰/۰۳۵۹(۰/۰۳)	۰/۰۳۳۲(۰/۰۵)	۰/۰۳۱۵(۰/۰۶)
		ES	۰/۰۴۵۶(۰)	۰/۰۳۹۲(۰)	۰/۰۳۶۸(۰/۰۲)	۰/۰۳۵۳(۰/۰۳)
خودرو	ژانگ	VaR	۰/۰۹۶۹(۰/۰۱)	۰/۰۴۴۱(۰/۰۴)	۰/۰۳۸۲(۰/۱۳)	۰/۰۳۵۷(۰/۱۴)
		ES	۰/۲۰۸۰(۰)	۰/۰۷۱۱(۰/۰۱)	۰/۰۵۵۸(۰/۰۱)	۰/۰۴۹۵(۰/۰۱)
	MLE	VaR	۰/۰۹۱۰(۰/۰۱)	۰/۰۴۴۲(۰/۰۴)	۰/۰۳۸۳(۰/۱۳)	۰/۰۳۵۸(۰/۱۴)
		ES	۰/۱۷۰۱(۰)	۰/۰۶۶۶(۰/۰۱)	۰/۰۵۳۷(۰/۰۱)	۰/۰۴۸۱(۰/۰۲)
	LME	VaR	۰/۰۹۰۶(۰/۰۱)	۰/۰۴۴۲(۰/۰۴)	۰/۰۳۸۳(۰/۱۳)	۰/۰۳۵۸(۰/۱۴)
		ES	۰/۱۶۷۴(۰)	۰/۰۶۶۳(۰/۰۱)	۰/۰۵۳۵(۰/۰۱)	۰/۰۴۸۰(۰/۰۲)
	pot-WNLS	VaR	۰/۰۹۱۲(۰/۰۱)	۰/۰۴۳۳(۰/۰۶)	۰/۰۳۷۹(۰/۱۳)	۰/۰۳۵۶(۰/۱۴)
		ES	۰/۱۸۹۱(۰)	۰/۰۶۷۵(۰/۰۱)	۰/۰۵۳۸(۰/۰۱)	۰/۰۴۸۱(۰/۰۲)
شیمیایی	ژانگ	VaR	۰/۰۵۲۴(۰)	۰/۰۲۵۴(۰/۰۳)	۰/۰۲۰۷(۰/۰۴)	۰/۰۱۸۴(۰/۰۵)
		ES	۰/۰۷۸۸(۰)	۰/۰۳۷۱(۰/۰۱)	۰/۰۲۹۹(۰/۰۲)	۰/۰۲۶۴(۰/۰۲)
	MLE	VaR	۰/۰۴۹۱(۰)	۰/۰۲۵۴(۰/۰۲)	۰/۰۲۰۸(۰/۰۴)	۰/۰۱۸۵(۰/۰۵)
		ES	۰/۰۶۸۵(۰)	۰/۰۳۵۶(۰/۰۱)	۰/۰۲۹۲(۰/۰۲)	۰/۰۲۶۰(۰/۰۲)
	LME	VaR	۰/۰۴۹۵(۰)	۰/۰۲۵۴(۰/۰۲)	۰/۰۲۰۸(۰/۰۴)	۰/۰۱۸۵(۰/۰۵)
		ES	۰/۰۶۹۹(۰)	۰/۰۳۵۸(۰/۰۱)	۰/۰۲۹۳(۰/۰۲)	۰/۰۲۶۰(۰/۰۲)
	pot-WNLS	VaR	۰/۰۴۸۱(۰)	۰/۰۳۴۸(۰/۰۴)	۰/۰۲۰۵(۰/۰۴)	۰/۰۱۸۳(۰/۰۵)
		ES	۰/۰۶۸۵(۰)	۰/۰۳۴۹(۰/۰۱)	۰/۰۲۸۶(۰/۰۲)	۰/۰۲۵۵(۰/۰۲)

جدول ۵- VaR، ES و نسبت تخطی شاخص های مواد دارویی، فرآورده های نفتی، سیمان و زراعت

شاخص	برآوردگر	معیارهای ریسک				نسبت تخطی مورد انتظار برآکده نسبت رلیت				نسبت تخطی مورد انتظار برآکده نسبت چپ			
		۰/۰۳	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۳	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۳	۰/۰۲	۰/۰۱	۰/۰۰۱
مواد دارویی	ژانگ	VaR	۰/۰۲۳۰(۰/۰۳)	۰/۰۲۶۱(۰/۰۲)	۰/۰۳۲۰(۰)	۰/۰۵۸۴(۰)							
		ES	۰/۰۳۲۱(۰)	۰/۰۳۶۰(۰)	۰/۰۴۳۳(۰)	۰/۰۷۶۱(۰)							
	MLE	VaR	۰/۰۲۳۱(۰/۰۳)	۰/۰۲۶۲(۰/۰۲)	۰/۰۳۱۹(۰)	۰/۰۵۶۷(۰)							
		ES	۰/۰۳۱۹(۰)	۰/۰۳۵۶(۰)	۰/۰۴۲۵(۰)	۰/۰۷۲۲(۰)							
	LME	VaR	۰/۰۲۳۱(۰/۰۳)	۰/۰۲۶۲(۰/۰۲)	۰/۰۳۱۹(۰)	۰/۰۵۶۵(۰)							
		ES	۰/۰۳۱۹(۰)	۰/۰۳۵۵(۰)	۰/۰۴۲۴(۰)	۰/۰۷۱۹(۰)							
	pot-WNLS	VaR	۰/۰۲۳۰(۰/۰۳)	۰/۰۲۵۷(۰/۰۲)	۰/۰۳۰۵(۰)	۰/۰۴۷۰(۰)							
		ES	۰/۰۲۹۹(۰)	۰/۰۳۲۷(۰)	۰/۰۳۷۶(۰)	۰/۰۵۴۷(۰)							
فرآورده های نفتی	ژانگ	VaR	-	-	۰/۰۳۲۲(۰/۰۷)	۰/۱۲۴۶(۰)	۰/۰۳۳۴(۰/۰۷)	۰/۰۴۳۹(۰/۰۲)	۰/۰۶۸۱(۰)	۰/۲۶۱(۰)			
		ES	-	-	۰/۱۰۹۱(۰)	۰/۶۵۰۸(۰)	۰/۰۸۴۳(۰)	۰/۱۰۷۳(۰)	۰/۱۶۰۸(۰)	۰/۵۸۸۲(۰)			
	MLE	VaR	-	-	۰/۰۳۲۲(۰/۰۷)	۰/۱۲۴۱(۰)	۰/۰۳۳۱(۰/۰۸)	۰/۰۴۳۳(۰/۰۲)	۰/۰۶۶۷(۰)	۰/۲۵۰۳(۰)			
		ES	-	-	۰/۱۰۸۶(۰)	۰/۶۲۰۷(۰)	۰/۰۸۱۴(۰)	۰/۱۰۳۳(۰)	۰/۱۵۳۷(۰)	۰/۵۴۷۵(۰)			
	LME	VaR	-	-	۰/۰۳۲۲(۰/۰۷)	۰/۱۲۲۸(۰)	۰/۰۳۲۹(۰/۰۸)	۰/۰۴۲۹(۰/۰۲)	۰/۰۶۵۹(۰)	۰/۲۴۲۹(۰)			
		ES	-	-	۰/۱۰۱۳(۰)	۰/۵۴۷۴(۰)	۰/۰۷۹۶(۰)	۰/۱۰۰۸(۰)	۰/۱۴۹۲(۰)	۰/۵۲۲۷(۰)			
	pot-WNLS	VaR	-	-	۰/۰۳۲۷(۰/۰۷)	۰/۰۸۹۰(۰)	۰/۰۴۰۲(۰/۰۳)	۰/۰۵۶۳(۰)	۰/۰۹۸۲(۰)	۰/۵۷۳۹(۰)			
		ES	-	-	۰/۰۶۶۱(۰/۰۷)	۰/۲۳۰(۰)	۰/۱۷۵۳(۰)	۰/۲۳۹۲(۰)	۰/۴۰۵۴(۰)	۱/۲۹۴۴(۰)			
سیمان	ژانگ	VaR	۰/۰۲۳۹(۰/۰۳)	۰/۰۲۶۶(۰/۰۱)	۰/۰۳۱۹(۰)	۰/۰۵۷۶(۰)							
		ES	۰/۰۳۲۳(۰)	۰/۰۳۵۹(۰)	۰/۰۴۲۹(۰)	۰/۰۷۷۱(۰)							
	MLE	VaR	۰/۰۲۴۰(۰/۰۳)	۰/۰۲۶۷(۰/۰۱)	۰/۰۳۸۱(۰)	۰/۰۵۵۴(۰)							
		ES	۰/۰۳۲۰(۰)	۰/۰۳۵۴(۰)	۰/۰۴۱۹(۰)	۰/۰۷۲۰(۰)							
	LME	VaR	۰/۰۲۴۰(۰/۰۳)	۰/۰۲۶۷(۰/۰۱)	۰/۰۳۱۸(۰)	۰/۰۵۵۱(۰)							
		ES	۰/۰۳۲۰(۰)	۰/۰۳۵۳(۰)	۰/۰۴۱۸(۰)	۰/۰۷۱۲(۰)							
	pot-WNLS	VaR	۰/۰۲۳۸(۰/۰۳)	۰/۰۲۶(۰/۰۱)	۰/۰۲۹۷(۰)	۰/۰۴۲۴(۰)							
		ES	۰/۰۲۹۲(۰)	۰/۰۳۱۴(۰)	۰/۰۳۵۲(۰)	۰/۰۴۸۰(۰)							
زراعت	ژانگ	VaR	-	-	۰/۰۴۳۵(۰/۱۱)	۰/۰۹۷۰(۰)	-	-	۰/۰۴۳۶(۰/۱۰)	۰/۰۴۳۶(۰/۱۰)	۰/۰۴۳۶(۰/۱۰)	۰/۰۷۱۰(۰)	
		ES	-	-	۰/۰۶۸۰(۰)	۰/۱۷۱۲(۰)	-	-	۰/۰۵۸۵(۰)	۰/۱۳۹۲(۰)	۰/۱۳۹۲(۰)	۰/۰۷۱۹(۰)	
	MLE	VaR	-	-	۰/۰۴۳۶(۰/۱۰)	۰/۰۹۵۸(۰)	-	-	۰/۰۴۰۷(۰/۱۴)	۰/۰۴۳۵(۰/۱۰)	۰/۰۴۳۵(۰/۱۰)	۰/۰۷۱۹(۰)	
		ES	-	-	۰/۰۶۷۰(۰)	۰/۱۶۰۸(۰)	-	-	۰/۰۵۰۷(۰)	۰/۰۵۹۵(۰)	۰/۱۴۸۹(۰)	۰/۰۷۱۹(۰)	
	LME	VaR	-	-	۰/۰۴۳۶(۰/۱۰)	۰/۰۹۵۷(۰)	-	-	۰/۰۴۰۷(۰/۱۴)	۰/۰۴۳۶(۰/۱۰)	۰/۰۴۳۶(۰/۱۰)	۰/۰۷۱۴(۰)	
		ES	-	-	۰/۰۶۷۰(۰)	۰/۱۶۰۶	-	-	۰/۰۵۰۴(۰)	۰/۰۵۸۹(۰)	۰/۱۴۳۱(۰)	۰/۰۷۱۴(۰)	
	pot-WNLS	VaR	-	-	۰/۰۴۳۱(۰/۱۱)	۰/۰۷۳۶(۰)	-	-	۰/۰۴۰۶(۰/۱۴)	۰/۰۴۳۲(۰/۱۱)	۰/۰۴۳۲(۰/۱۱)	۰/۰۶۸۰(۰)	
		ES	-	-	۰/۰۵۶۱(۰)	۰/۰۹۳۲(۰)	-	-	۰/۰۴۹۲(۰)	۰/۰۵۶۸(۰)	۰/۱۳۰۹(۰)	۰/۰۶۸۰(۰)	

انتظار، مقدار نسبتا زیادی دارد. اما در برآورد ۹۹/۹٪ VaR هر چهار برآوردگر برای تمامی شاخصها عملکرد خوبی دارند. نسبتهای تخطی محاسبه شده در برآورد ES به نسبتهای تخطی مورد انتظار در

همانگونه که در جدولهای بالا مشاهده شد، غالباً نسبتهای تخطی محاسبه شده در برآورد VaR برای هر چهار برآوردگر ژانگ، LME، MLE، pot-WNLS یکسان بوده و در مقایسه با نسبتهای تخطی مورد

توزیع پارتوی تعمیم‌یافته ارائه می‌دهد که این خود باعث تخمین بهتر معیارهای ریسک می‌شود. هر چند در موارد زیادی عملکرد هر چهار برآوردگر یکسان است.

پیشنهاد مشخص این مقاله به مدیران ریسک و نهادهای مالی به‌ویژه آنان که به‌گونه‌ای با شاخص‌های بورس و ریسک‌های ناشی از آن مواجه هستند این است که از نظریه ارزش فرین و روش مقادیر فراتر از آستانه به محاسبه‌ی ریسک خود بپردازند. اگر چه VaR و ES دو معیار متداول در تخمین ریسک هستند؛ اما نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که ES پیش‌بینی دقیق‌تری از ریسک را ارائه می‌دهد. به منظور برآورد بهتر پارامترهای توزیع پارتوی تعمیم‌یافته نیز استفاده از برآوردگر pot-WNLS توصیه می‌شود.

فهرست منابع

- * * زمانی، شیوا؛ اسلامی بیدگلی، سعید و کاظمی، معین. (۱۳۹۲). "محاسبه ارزش در معرض ریسک شاخص بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از نظریه ارزش فرین"، فصلنامه بورس اوراق بهادار، شماره بیست‌ویکم.
- * * سجاد، رسول؛ هدایتی، شهره و هدایتی، شراره. (۱۳۹۳). "برآورد ارزش در معرض خطر با استفاده از نظریه ارزش فرین در بورس اوراق بهادار تهران"، فصلنامه علمی- پژوهشی دانش سرمایه گذاری، سال سوم، شماره نهم.
- * * شرکت ماتریس تحلیل گران سیستم های پیچیده. (۱۳۸۸). "ریسک بازار با رویکرد ارزش در معرض خطر"، چاپ اول، نشر آتی نگر.
- * * صادقی، حجت الله و بهبودی، سعیده. (۱۳۹۵). "تخمین ارزش در معرض ریسک با استفاده از نظریه ارزش فرین (مطالعه‌ای در نرخ ارز)"، فصلنامه علمی- پژوهشی مدیریت دارایی و تامین مالی، سال چهارم، شماره دوم.

مقایسه با VaR نزدیک‌تر است. عملکرد هر چهار برآوردگر در برآورد ES شبیه به هم می‌باشند اما برای بعضی از شاخص‌ها (مانند مواد غذایی به جز قند، بانک‌ها، بازار دوم، ۵۰ شرکت، بانک‌ها...) برآوردگر Pot-WNLS عملکرد بهتری نسبت به ژانگ، LME، MLE نشان می‌دهد و اینکه مشاهده می‌شود برای سطوح اطمینان مختلف برآوردگر Pot-WNLS با نسبت تخطی یکسان مقدار کمتری برای ریسک نسبت به برآوردگرهای دیگر ارائه می‌دهد.

نتیجه‌گیری و بحث

نهادهای و مؤسسات مالی همواره در معرض ریسک ناشی از سرمایه‌گذاری قرار دارند. کمی‌سازی و اندازه‌گیری ریسک یکی از موضوعات مهم در زمینه‌ی مباحث مالی می‌باشد، زیرا ریسک موجود در دارایی‌های مالی، از عوامل تعیین کننده‌ی نرخ بازده مورد انتظار سرمایه‌گذاران است و این نرخ تعیین کننده‌ی قیمت دارایی‌های مالی می‌باشد. ورشکستگی‌های تاریخی و بحران‌های مالی به ما نشان داده است که برای مطالعه‌ی آماری دنیای مالی تمرکز بر توزیع‌های متقارن، مانند نرمال و تی-استیودنت، کافی نیست و آن چه قابل چشم‌پوشی نیست، دم‌های توزیع است (زمانی و همکاران، ۱۳۹۲). در واقع این موضوع اهمیت نظریه ارزش فرین در مباحث مالی را آشکار می‌کند. پژوهش حاضر، به محاسبه‌ی معیارهای ریسک با استفاده از نظریه ارزش فرین و روش مقادیر فراتر از آستانه پرداخته است. به این منظور عملکرد چهار برآوردگر ژانگ، LME، MLE و pot-WNLS برای برآورد پارامترهای توزیع پارتوی تعمیم‌یافته به منظور تخمین ارزش در معرض خطر و ریزش مورد انتظار چندین شاخص بورس اوراق بهادار تهران مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که ES معیار قابل اطمینان‌تری برای محاسبه‌ی ریسک در مقایسه با VaR می‌باشد. برای مقایسه‌ی برآوردگرها هم می‌توان این‌طور اشاره کرد که برآوردگر pot-WNLS برآوردهای بهتری برای پارامترهای

- * Basel, I. I. (2006). Bank for International Settlements BIS: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: Revised Framework—Comprehensive Version.
- * de Zea Bermudez, P. and Kotz, S. (2010). Parameter estimation of the generalized Pareto distribution Part I. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140(6), 1353–1373.
- * Grimshaw, S.D. (1993). Computing maximum likelihood estimates for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*, 35(2), 185–191.
- * Gilli, M. and Kellezi, E. (2006), An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk, *Computational Economics*, pp. 1-23.
- * He, X., and Fung, W. K. (1999). Method of medians for lifetime data with Weibull models. *Statistics in medicine*, 18(15), 1993-2009.
- * Hosking, J.R. and Wallis, J.R. (1987). Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*, 29(3), 339–349.
- * McNeil, A.J. and Saladin, T. (1997, April). The peaks over thresholds method forestimating high quantiles of loss distributions. In: *Proceedings of 28th International ASTIN Colloquium*, 23–43.
- * McNeil, A. J. (1997). Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 27(1), 117-137.
- * Maghyereh, A. I., & Al-Zoubi, H. A. (2006). Value-at-risk under extreme values: the relative performance in MENA emerging stock markets. *international journal of managerial finance*, 2(2), 154-172.
- * Marinelli, C., d'Addona, S., & Rachev, S. T. (2007). A comparison of some univariate models for value-at-risk and expected shortfall. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 10(06), 1043-1075.
- * Park, M.H. and Kim, J.H. (2016). Estimating extreme tail risk measures with generalized Pareto distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, 98, 91–104.
- * Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *Annals of Statistics*, 3(1), 119–131.
- * Rasmussen, P.F. (2001). Generalized probability weighted moments: application
- * فلاح شمس، میرفیض؛ ثقفی، علی و ناصرپور، علیرضا. (۱۳۹۶). "ارزش در معرض خطر شرطی (CVaR) مبتنی بر نظریه مقدار کرانی در پیش-بینی وجه تضمین قراردادهای آتی سکه طلا، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره سی و دوم.
- * *کاشی، منصور؛ حسینی، حسن؛ قلیلو، محمدموسی و گلکاریان آرانی، سعید. (۱۳۹۶). "محاسبه ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار بر اساس نظریه مقدار حدی: شواهدی از بورس اوراق بهادار تهران"، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره سی و دوم.
- * *گرگانی فیروزجاه، مصطفی و پیروی، علی. (۱۳۹۲). "تعیین نرخ بازده انتظاری اوراق بهادار فاجعه آمیز با استفاده از رویکرد نظریه مقدار کرانی"، فصلنامه پژوهش‌ها و سیاست‌های اقتصادی، سال بیست و یکم، شماره شصت و پنجم.
- * *مهدوی، غدیر و ماجدی، زهرا. (۱۳۸۹). "کاربرد نظریه مقدار کرانگینی در برآورد مقدار در معرض خطر: بررسی موردی بیمه مسئولیت شرکت بیمه ایران"، مجله علوم آماری، جلد چهارم، شماره اول.
- * *هال، جال. (۲۰۰۲). "مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک". ترجمه: سیاح، سجاد و صالح آبادی، علی (۱۳۸۴). انتشارات گروه رایانه تدبیر پرداز.
- * Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3), 203-228.
- * Ashkar, F. and Ouarda, T.B. (1996). On some methods of fitting the generalized Pareto distribution. *Journal of Hydrology*, 177(1-2), 117–141.
- * Assaf, A. (2009). Extreme observations and risk assessment in the equity markets of MENA region: Tail measures and Value-at-Risk. *International Review of Financial Analysis*, 18(3), 109-116.
- * Balkema, A.A. and De Haan, L. (1974). Residual life time at great age. *The Annals of Probability*, 2(5), 792–804.

- to the generalized Pareto distribution. *Water Resources Research*, 37(6), 1745–1751.
- * Smith, R.L. (1984). Threshold methods for sample extremes, In: *Statistical Extremes and Applications*, Springer, pp. 621–638.
 - * Song, J. and Song, S. (2012). A quantile estimation for massive data with generalized Pareto distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, 56(1), 143–150.
 - * Zhang, J. (2010). Improving on estimation for the Generalized Pareto Distribution. *Technometrics*, 52(3), 335–339.
 - * Zhang, J. (2007). Likelihood moment estimation for the generalized Pareto distribution. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 49(1), 69–77.
 - * Zhang, J. and Stephens, M.A. (2009). A new and efficient estimation method for the Generalized Pareto Distribution. *Technometrics*, 51(3), 316–325.

یادداشت‌ها

1. Extreme Value Theory
2. Generalized Pareto Distribution
3. Pickands
4. Peaks over Threshold
5. Value at Risk
6. Expected Shortfall
7. Advanced Measurement Approach
8. Maximum Likelihood Estimator
9. Grimshaw
10. Smith
11. Hosking and Wallis
12. Method of Moments
13. Probability Weighted Moments
14. Ashkar and Ouarda
15. Generalized Probability Weighted Moments
16. Rasmussen
17. Zhang
18. Likelihood Moment Estimator
19. Zhang and Stephens
20. Song and Song
21. Nonlinear Least Squares
22. Park and Kim
23. Balkema and De Haan
24. de Zea Bermudez and Kotz
25. McNeil and Saladin
26. Assaf
27. Maghyereh and Zoubi
28. Marinelli et al
29. Gilli and Këllezzi
30. He and Fung