تحلیل خیز و تنش در ورق‌های مرکب لایه‌ای با استفاده از تئوری برشی و تابع سکانت

پیمان یوسفی[۱]، سعید جعفری مهرآبادی[۱]، ایمان نجیمی[۱*]

۱.گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی ، دانشگاه آزاد واحد اراک

* نویسنده مسول: imann019@gmail.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۰۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۳۰

چکیده:

کاربردهای روز افزون مواد مرکب در صنایع مختلف ازجمله هوافضا، کشتی‌سازی و سازه‌هایی در ابعاد میکرو و ماکرو باعث شده که محققان این حیطه توجه خاصی بر طراحی این سازه‌ها داشته باشند. در پژوهش حاضر به تحلیل استاتیکی یک ورق مستطیلی به کمک حالتی خاص از تئوری مرتبه بالای تغیر شکل برشی با در نظر گرفتن تابع سکانت در میدان تغییر مکان پرداخته‌شده است. معادله‌های ورق کامپوزیت لایه‌ای مورداستفاده در این پژوهش به کمک رابطه حساب تغییرات و اصل همیلتون با تشکیل ترم‌های مختلف انرژی سیستم به‌دست‌آمده‌است. برای حل معادلات حاکم از روش ناویر با جواب‌هایی متشکل از توابع سینوسی و کسینوسی و با در نظر گرفتن شرایط مرزی سیستم استفاده‌شده است. با حل معادلات مذکور مقادیر خیز ورق با توجه به تغییر در پارامترهای سیستم محاسبه‌شده است و جواب‌های به‌دست‌آمده با نتایج مندرج در مقالات معتبر چاپ‌شده مقایسه و از صحت آن‌ها اطمینان کافی حاصل‌شده است. در خاتمه نتیجه شده که تحلیل خیز به کمک توابع سکانت بسیار نزدیک به جواب‌های حاصل‌شده از پژوهش‌های مشابه است و در موارد خاص می‌توان از این توابع استفاده نمود.

کلمات کلیدی:

مواد مرکب لایه‌ای، تئوری مرتبه بالای تغیر شکل برشی، تابع سکانت، اصل همیلتون، روش ناویر

مقدمه:

ساختارهای مرکب لایه‌ای در بسیاری از کاربردهای مهندسی همچون هوافضا، خودروسازی، زیردریایی‌ها، ورزش و غیره مورداستفاده قرار می‌گیرند. صفحات ترکیبی (ورق‌های مرکب لایه‌ای) یکی از مهم‌ترین عناصر ساختاری هستند که در طول چند دهه گذشته توسط بسیاری از پژوهشگران موردمطالعه قرارگرفته است. اساساً دو رویکرد مختلف برای مطالعه ساختارهای کامپوزیتی مختلف استفاده‌شده: نظریه‌های لایه منفرد و تئوری لایه گسسته. در لایه‌های منفرد، فرض می‌شود که ساختار از یک‌لایه تشکیل‌شده باشد، درحالی‌که در مورد دوم هر لایه مستقل در نظر گرفته می‌شود. نکته مهم دیگر در تحلیل استاتیکی و دینامیکی صفحات کامپوزیت، فرضیه‌هایی است که مورداستفاده قرار می‌گیرد. نظریه‌های تغییر شکل صفحه را می‌توان به دو گروه تقسیم کرد: مبتنی بر تنش و مبتنی بر تغییر شکل. ازآنجاکه در مطالعه حاضر، یک نظریه جابجایی جدید موردبررسی قرار خواهد گرفت، بررسی مختصری از نظریه‌های مربوط به جابجایی نیز ارائه‌شده که عبارت‌اند از تئوری کلاسیک و تغییر شکل برشی. اجزای تنش برشی عرضی که در تئوری تغییر شکل برشی گنجانده‌شده است در تئوری کلاسیک نادیده گرفته‌شده است. تئوری کلاسیک صفحه تنها می‌تواند برای صفحه‌های نازک مورداستفاده قرار گیرد، زیرا نتایج غیردقیقی برای صفحات ضخیم به‌خصوص کامپوزیت‌ها ارائه می‌دهد. اولین نظریه تغییر شکل برشی یکنواخت یا اولین تئوری تغییر شکل برشی توسط میدلین [۱] و رزینر [۲] پیشنهاد شد. بر اساس این نظریه، خطوط عرضی پیش از تغییر شکل و پس از تغییر شکل غیرخطی، اما در وسط بر تار میانی نرمال‌اند. این نظریه

تنش برشی عرضی را ثابت فرض می‌کند و به یک ضریب تصحیح برش نیاز دارد تا شرایط مرزی صفحه را در سطوح پایین و بالا ارضاء نماید. همچنین تئوری‌های مرتبه بالاتر مختلف به‌منظور برآورده کردن شرایط مرزی صفحه پیشنهادشده است. امبرسومیان [۳]، یک تابع تنش برشی عرضی را برای توضیح تغییر شکل صفحه پیشنهاد کرده. روش مشابهی بعداً توسط سولداتوس و تیمارکی [۴]، برای آنالیز دینامیکی پوسته‌های مرکب لایه‌ای مورداستفاده قرارگرفته است. در پی آن برخی توابع جدید توسط ردی [۵]، توریتیر [۶]، کاراما و همکاران [۷] پیشنهادشده و نظریه‌های تغییر شکل برشی مختلف برای آنالیز استاتیک و دینامیکی موردبررسی و مقایسه قرارگرفته است. سوامیناتان و پاتیل [۸] از یک مدل محاسباتی مرتبه بالاتر برای آنالیز ارتعاش آزاد صفحات استفاده کردند. لئو و همکاران [۹] ارتعاش آزاد و کمانش کامپوزیت را با استفاده از روش تابع پایه شعاعی مبتنی بر مش بررسی کردند.در سال‌های اخیر، نظریه‌های مربوطه برای به دست آوردن اطلاعات دقیق‌تر توسط افرادی مانند و و چن [۱۰]، چو و همکاران [۱۱]، پلاژیاناکوس ساراوانوس [۱۲] و فارس و المرقانی [۱۳]. ارائه‌شده است. این نظریه‌های مختلف برای صفحات چندلایه اغلب برای به دست آوردن نتایج دقیق، هزینه محاسباتی زیادی دارند.

در مطالعه حاضر یک تابع تغییر شکل برشی عرضی جدید پیشنهادشده است. این نظریه شرایط مرزی صفحه را برآورده می‌کند... اعتبار نتایج نیز با مقایسه برخی پژوهش‌های مشابه مانند آیدوگدو [۱۵] و محمد عارفی [۱۶] و همکاران برای خیز و تنش‌ها، موردبررسی قرارگرفته است.سپس برای صحت سنجی نتایج نهایی حاصل در جداول و نمودارها آورده شده است.

فرمول‌بندی مسئله:

میدان جابجایی:

در این بخش معادلات حاکم بر روی صفحات کامپوزیت لایه‌ای به‌طور خلاصه توضیح داده‌شده است. یک ورق مستطیل شکل دارای طول a، عرض b و ضخامت یکنواخت h را در نظر بگیرید. فرض می‌شود که صفحه از تعداد دلخواه N، لایه ارتوتروپیک (دارای محور اصلی عمودی)الاستیک خطی ساخته‌شده است. در این مطالعه، یک نظریه جابجایی برشی جدید مبتنی بر تغییر شکل برای سازه‌های کامپوزیتی ارائه‌شده است. این نظریه با فرض میدان جابجایی زیر شروع می‌شود.

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)u_1(x,y) \\ V(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)v_1(x,y) \\ W(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن u_1, u_0, v_1, v_0, w_0 پنج تابع جابجایی لایه میانی در امتدادهای x, y, z صفحه هستند درحالی‌که $f(z)$ تابع شکل را نشان می‌دهد که توزیع کرنش‌های برشی عرضی را تعیین می‌کند و بر روی ضخامت تغییر می‌کند. در اینجا u_1, v_1 تغییر شکل برشی در وسط صفحه هستند. در این مطالعه توابع تغییر شکل برشی به‌عنوان توابعی در جهات x و y انتخاب‌شده است. مدل حاضر پارامتر تنش برشی عرضی و شرایط آزاد کشش در سطوح بالا و پایین ورق را برآورده می‌کند.

مقدار $f(z)$ در این پژوهش عبارت است از:

$$f(z) = z\left(sec\left(\frac{rz}{h}\right) - \sec\left(\frac{r}{2}\right) * (1 + \frac{r}{2}\ tan\left(\frac{r}{2}\right))\right) \tag{۲}$$

که r پارامتر شکل و مقدار آن در این پژوهش ۰/۱ در نظر گرفته‌شده است.

معادلات پایه روابط جابجایی- کرنش:

در این مطالعه برای توصیف میدان جابجایی، نظریه تغییر شکل برشی مورد استفاده قرارگرفته است. این نظریه شامل شرایط کلاسیک و مرتبه بالاتر صفحه است که در رابطه (۱) بیان گردید.

روابط کرنش به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f(z)\frac{\partial u_1}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + f(z)\frac{\partial v_1}{\partial y} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + f(z)\frac{\partial u_1}{\partial x}(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}) \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = f'(z)v_1 \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = f'(z)u_1
\end{aligned} \tag{۳}$$

قانون هوک:

رابطه تنش- کرنش در لایه k ام توسط قانون هوک به‌صورت زیر شرح داده می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{۴}$$

که مقادیر کرنش عبارت است از :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}{}^{(0)} \\ \gamma_{xy}{}^{(0)} \end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}{}^{(1)} \\ \gamma_{xy}{}^{(1)} \end{Bmatrix} + f(z)\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}{}^{(2)} \\ \gamma_{xy}{}^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{۵}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}{}^{(0)} \\ \gamma_{xy}{}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}{}^{(1)} \\ \gamma_{xy}{}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}{}^{(2)} \\ \gamma_{xy}{}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{۶}$$

و

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'(z)u_1 \\ f'(z)v_1 \end{Bmatrix} \tag{۷}$$

معادلات بنیادی:

انرژی کرنشی برای یک جسم تغییر شکل‌پذیر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$U=\frac{1}{2}\iiint\Big(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}+2\big(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}\big)\Big)\,dV$$
$$T=\frac{1}{2}\int_V\rho(U_{,t}^2+V_{,t}^2+W_{,t}^2)\,dV \quad (۸)$$

در اینجا ρ و V چگالی و حجم ماده مرکب هستند و t, مشتق جزی با توجه به زمان است. معادلات حاکم بر صفحه مرکب برای رفتار استاتیک و پویا را می‌توان با استفاده از اصل همیلتون به شکل زیر یافت.

$$\int_{t_0}^{t}(\delta U_G-\delta T)dt=0 \quad (۹)$$

میزان تغییر نیرو و ممان که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left(N_x^c,N_y^c,N_{xy}^c\right)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}\right)dz\,,\quad \left(M_x^c,M_y^c,M_{xy}^c\right)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}\right)zdz\,,$$
$$\left(M_x^a,M_y^a,M_{xy}^a\right)=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy})f(z)dz\,,\quad (Q_x^a,Q_x^a)=\int_{-h/2}^{h/2}(\tau_{xz},\tau_{yz})f'(z)dz \quad (۱۰)$$

برآیندهای نیرو و گشتاور که با علامت "c" نشان داده‌شده‌اند به تئوری کلاسیک صفحه تعلق دارند که در آن از بالانویس برای منتج‌های نیرو تغییر شکل برشی و ممان استفاده می‌شود. با جایگزینی روابط تنش-کرنش تعاریف منتج‌های نیرو و گشتاور نظریه حاضر ارائه‌شده. با جایگذاری روابط (۴) درروابط (۱۰) روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix}N_x^c\\N_y^c\\N_{xy}^c\\M_x^c\\M_y^c\\M_{xy}^c\\M_x^a\\M_y^a\\M_{xy}^a\\M_{yx}^a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&0&B_{11}&B_{12}&0&E_{11}&E_{12}&0&0\\A_{12}&A_{22}&0&B_{12}&B_{22}&0&E_{12}&E_{22}&0&0\\0&0&A_{66}&0&0&B_{66}&0&0&E_{66}&E_{66}\\B_{11}&B_{12}&0&D_{11}&D_{12}&0&F_{11}&F_{12}&F_{16}&0\\B_{12}&B_{22}&0&D_{12}&D_{22}&0&F_{12}&F_{22}&0&0\\0&0&B_{66}&0&0&D_{66}&0&0&F_{66}&F_{66}\\E_{11}&E_{12}&0&F_{11}&F_{12}&F_{16}&H_{11}&H_{12}&0&0\\E_{12}&E_{22}&0&F_{12}&F_{22}&0&H_{12}&H_{22}&0&0\\0&0&E_{66}&0&0&F_{66}&0&0&H_{66}&H_{66}\\0&0&E_{66}&0&0&F_{66}&0&0&H_{66}&H_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\v_y\\u_x+v_y\\-w_{xx}\\-w_{yy}\\-2w_{xy}\\u_{1,x}\\v_{1,y}\\u_{1,y}\\v_{1,x}\end{bmatrix}, \quad (۱۱)$$

$$\begin{bmatrix}Q_y^a\\Q_x^a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{44}&0\\0&A_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\u_1\end{bmatrix}$$

در روابط فوق ضرایب سختی به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\left(A_{ij},B_{ij},D_{ij},E_{ij},F_{ij},H_{ij}\right)=\sum_{k=1}^{N_L}\int_{z_k}^{z_{k+1}}Q_{ij}^{(k)}(1,z,z^2,f(z),zf(z),f(z)^2)dz \quad (i,j=1,2,6)$$
$$A_{pq}=\sum_{k=1}^{N_L}Q_{pq}^{(k)}(f'(z))^2dz\ \ (p,q=4,5) \quad (۱۲)$$

در رابطه فوق $f'(z)=\mathrm{d}(f(z))/\mathrm{dz}$ است. بر اساس اصل کار مجازی، معادلات زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\delta u_0:\ \frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}=0\\
&\delta v_0:\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}=0\\
&\delta u_1:\ \frac{\partial s_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial s_{xy}}{\partial y}-Q_{xz}=0\\
&\delta v_1:\ \frac{\partial s_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial s_{yy}}{\partial y}-Q_{yz}=0\\
&\delta w_0:\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}=-q
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

معادلات ورق:

با استفاده از اصل همیلتون، پنج معادله ثابت صفحه به دست آمد. با جایگزین کردن روابط (۱۱) در معادله‌های (۱۳) پنج معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+A_{12}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}-B_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}-B_{12}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}+C_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+C_{12}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}\\
&\qquad+A_{66}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right)-2B_{66}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}+C_{66}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right)=0\\
&A_{21}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}-B_{21}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}-B_{22}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}+C_{21}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+C_{22}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\\
&\qquad+A_{66}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x}\right)-2B_{66}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y\partial x^2}+C_{66}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}\right)=0\\
&C_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+C_{12}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}-F_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}-F_{12}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}+H_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+H_{12}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}\\
&\qquad+C_{66}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right)-2F_{66}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}+H_{66}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right)=0\\
&C_{21}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+C_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}-F_{21}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}-F_{22}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}+H_{21}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+H_{22}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\\
&\qquad+C_{66}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x}\right)-2F_{66}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y\partial x^2}+H_{66}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}\right)=0\\
&B_{11}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+B_{12}\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}-D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}-D_{12}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2\partial x^2}+F_{11}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2\partial y}+F_{12}\frac{\partial^3 v_1}{\partial x\partial y}\\
&\qquad+2\left(B_{66}\left[\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2\partial x}\right]-2D_{66}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2\partial x^2}+F_{66}\left[\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u_1}{\partial y^2\partial x}\right]\right)\\
&\qquad+B_{21}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2\partial y}+B_{22}\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}-D_{21}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^4}-D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}+F_{21}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x\partial y^2}\\
&\qquad+F_{22}\frac{\partial^3 v_1}{\partial y^3}=-q
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

حل دقیق برای صفحات ارتوتروپ خاص متقارن:

پاسخ دقیق برای معادله‌های (۱۴) برای یک ورق مرکب مستطیلی ارتوتروپ خاص متقارن با استفاده از روش ناویر به‌دست‌آمده. برای ورق مرکب مستطیلی ارتوتروپ خاص متقارن، تعدادی از مؤلفه‌های سختی ورق به ترتیب زیر صفر است.

$$A_{16}=A_{26}=D_{16}=D_{26}=F_{16}=F_{26}=H_{16}=H_{26}=0\,,\quad B_{ij}=0\,,\quad A_{pq}=0,\qquad p,qj=1,2$$

بنابراین کوپلینگ بین مؤلفه‌های محوری و خمشی صفر است. شرایط مرزی برای ورق با چهار لبه بر تکیه‌گاه ساده به ترتیب چنین است که: در a و$x=0$ داریم $N_x^c=u_0=w_0=M_x^c=M_x^a=u_1=0$ و در b و$y=0$ داریم $N_y^c=v_0=w_0=M_y^c=M_y^a=v_1=0$. این شرایط مرزی و معادلات حاکم با پاسخ‌های جابجایی سطح زیر برآورده می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix}(u_0,u_1)\\(v_0,v_1)\\w_0\end{Bmatrix}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}(U_0,U_1)\cos(\lambda_n x)\sin(\lambda_m y)\\(V_0,V_1)\sin(\lambda_n x)cos(\lambda_m y)\\w_0\sin(\lambda_n x)sin(\lambda_m y)\end{Bmatrix} \tag{۱۵}$$

که در آن $\lambda_m=m\pi/a$ ،$\lambda_n=n\pi/b$ و m و n اعداد نیم موج هستند به ترتیب در امتداد محورهای x و y.
بار قائم اعمال‌شده q را می‌توان به‌صورت سری فوریه دوگانه بسط داد :

$$q=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}Q_{mn}\ \sin(\lambda_n x)sin(\lambda_m y) \tag{۱۶}$$

دسته معادله‌های زیر برای هر مقدار ثابت m و n به دست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix}L_{11}&L_{12}&L_{13}\\&L_{22}&L_{23}\\sim&&L_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_{mn}\\X_{mn}\\Y_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{mn}\\0\\0\end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

عناصر ماتریس ضرایب [L] در ضمیمه ذکرشده‌اند؛ که راه‌حل دقیق برای هر بار سینوسی که می‌تواند برحسب سری فوریه بسط داده شود را ارائه می‌دهد. نتایج ارائه‌شده برای حالتی ساده:

$$q(x,y)=q_0 sin\frac{m\pi x}{a}sin\frac{n\pi y}{b} \tag{۱۸}$$

در نظر گرفته‌شده که در آن $m=n=۱$ و $q_0=Q_{11}$ است.

نتایج عددی:

در مدل حاضر به ازا $r=۰٫۱$ خطای بین روش ارائه‌شده بر اساس تابع سکانت و نتایج حاصل از الاستیسیته سه‌بعدی حداقل است. همان‌طور که توسط پاگانو و هات فیلد بیان شد، افزایش تعداد لایه‌ها باعث هم‌گرایی سریع‌تر می‌شود. نتایج عددی ارائه‌شده با استفاده از خواص مواد و ویژگی‌های هندسی ارائه‌شده در پژوهش‌های گذشته به‌صورت زیر حاصل‌شده:

$$E_1=174.6\,GPa\,,\quad E_2=7\,GPa\,,\quad G_{12}=G_{13}=3.5\,GPa\,,\quad G_{23}=1.4\,GPa\,,$$
$$\nu_{12}=\nu_{13}=0.25$$

نتایج عددی حاصل، به ترتیب زیر بدون بعد شده و در جدول‌ها ارائه‌شده:

$$\overline{w} = \frac{\left(w\left(\frac{a}{2}\right),\left(\frac{a}{2}\right),0\right)E_2h^3}{q_0a^4}\times 100\,,\quad \overline{\sigma}_x = \sigma_x\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)\frac{h^2}{q_0a^2}\,,$$
$$\overline{\sigma}_y = \sigma_y\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right)\frac{h^2}{q_0a^2}\,,\quad \overline{\tau}_{xy} = \tau_{xy}\left(0,0,\frac{h}{2}\right)\frac{h^2}{q_0a^2}\,, \qquad (۱۹)$$
$$\overline{\tau}_{yz} = \tau_{yz}\left(\frac{a}{2},0,0\right)\frac{h}{q_0a}\,,\quad \overline{\tau}_{xz} = \tau_{xz}\left(0,\frac{a}{2},0\right)\frac{h}{q_0a}$$

برای نشان دادن صحت مدل تغییر شکل ارائه‌شده، نتایج حاصل با نتایج راه‌حل‌های دقیق بر اساس تئوری‌های تغییر شکل برشی مختلف جهت مقایسه آورده شده است. به‌عنوان نمونه مقادیر خیز و تنش تحت بارگذاری تعریف‌شده فوق بر ورق مرکب چهار لایه با مشخصات لایه ذکرشده بالا و امتداد الیاف (۰,۹۰,۹۰,۰) برای a/h های متفاوت تعیین و با نتایج موجود در مقاله‌ها مقایسه شده که در جدول ۲ آمده است. در جدول ۳ نیز مقایسه مقادیر خیز با مقاله‌های مختلف برای a/h های متفاوت ورق مرکب سه لایه و امتداد الیاف (۰,۹۰,۰) آورده شده است.

برای مقایسه مدل تانژانتی پژوهش فعلی, از سایر مدل‌هایی که در جدول زیر آمده است استفاده‌شده است:

جدول (۱): توابع مختلف تغییر شکل برشی

مدل	تابع
[۶]امبارتسوماین	$f(z) = \frac{z}{2}(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3})$
[۱۸]کاچکوفسکی	$f(z) = \frac{5z}{4}(1 - \frac{4z^2}{3h^3})$
[۱۹]لوینسون	$f(z) = z(1 - \frac{4z^2}{3h^3})$
[۲]توراتیر	$f(z) = \frac{h}{\pi}\sin(\frac{\pi z}{h})$
[۸]سولداتوس	$f(z) = h\sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z\sinh(\frac{1}{2})$
[۳]کاراما	$f(z) = ze^{-2(z/h)^2}$
[۱۵]آیدوگدو	$f(z) = z\alpha^{\frac{-2(z/h)^2}{\ln\alpha}}\quad \alpha>0$
مطالعه حاضر	$f(z) = z\left(\sec\left(\frac{rz}{h}\right) - \sec\left(\frac{r}{2}\right)\times\left(1 + \frac{1}{2}r\tan\left(\frac{r}{2}\right)\right)\right)$

جدول(۲): مقایسه نتایج به‌دست‌آمده از خیز و تنش در این پژوهش با نتایج منتشرشده قبلی برای (۰,۹۰,۹۰,۰) و a/b =۱

a/h	منبع	$\overline{W}$	$\overline{\sigma}_x$	$\overline{\sigma}_y$	$\overline{\tau}_{xz}$	$\overline{\tau}_{yz}$	$\overline{\tau}_{xy}$
۴	الاستیسیته[1]	۱/۹۵۴	۰/۷۲۰	۰/۶۶۳	۰/۲۹۲	۰/۲۹۱	۰/۰۴۶۷
	مدل آیدوگدو[2]	۱/۹۵۹	۰/۷۰۴	۰/۶۳۶	۰/۲۶	۰/۲۳۲	۰/۰۴۶۵
	مدل KAM[3]	۱/۹۲۰	۰/۶۹۹	۰/۶۳۶	۰/۲۵۳	۰،۲۲۶	۰/۰۴۵۹
	مدل پارابولیک[4]	۱/۸۹۳	۰/۶۶۵	۰/۶۳۲	۰/۲۳۸	۰/۲۰۶	۰/۰۴۴
	مطالعه حاضر	۱/۸۶۴	۰/۶۶۴	۰/۶۳۱	۰/۲۳۸	۰/۲۰۶	۰/۰۴۴
۱۰	الاستیسیته	۰/۷۴۳	۰/۵۵۹	۰/۴۰۱	۰/۱۹۶	۰/۳۰۱	۰/۰۲۷۵
	مدل آیدوگدو	۰/۷۳۴	۰/۵۵۲	۰/۳۹۶	۰/۱۶۷	۰/۳۰۳	۰/۰۲۷۳
	مدل KAM	۰/۷۲۴	۰/۵۵۲	۰/۳۹۲	۰/۱۶۳	۰/۲۹۴	۰/۰۲۷۲
	مدل پارابولیک	۰/۷۱۴	۰/۵۴۵	۰/۳۸۸	۰/۱۵۳	۰/۲۶۴	۰/۰۲۶۸
	مطالعه حاضر	۰/۷۱۵	۰/۵۴۳	۰/۳۸۸	۰/۱۵۲	۰،۲۶۳	۰/۰۲۶۷
۲۰	الاستیسیته	۰/۵۱۷	۰/۵۴۳	۰/۳۰۸	۰/۱۵۶	۰/۳۲۸	۰/۰۲۳
	مدل آیدوگدو	۰/۵۱۲	۰/۵۴	۰/۳۰۶	۰/۱۳۴	۰/۳۲۶	۰/۰۲۳
	مدل KAM	۰/۵۰۹	۰/۵۴۱	۰/۳۰۵	۰/۱۳۱	۰/۳۱۵	۰/۰۲۲۹
	مدل پارابولیک	۰/۵۰۶	۰/۵۳۹۳	۰/۳۰۴	۰/۱۲۳	۰/۲۸۲	۰/۰۲۲۸
	مطالعه حاضر	۰/۵۰۶۸	۰/۵۳۹۱	۰/۳۰۴	۰/۱۲۳	۰/۲۸۲	۰/۰۲۲۸
۱۰۰	الاستیسیته	۰/۴۳۵۸	۰/۵۳۹	۰/۲۷۶	۰/۱۴۱	۰/۳۳۷	۰/۰۲۱۶
	مدل آیدوگدو	۰/۴۳۵	۰/۵۳۸	۰/۲۷	۰/۱۲	۰/۳۳۶	۰/۰۲۱۳
	مدل KAM	۰/۴۳۵	۰،۵۳۸	۰/۲۷	۰/۱۱۸	۰/۳۲۴	۰/۰۲۱۳
	مدل پارابولیک	۰/۴۳۴۳	۰/۵۳۸	۰/۲۷	۰/۱۱۱	۰/۲۸۹	۰/۰۲۱۳
	مطالعه حاضر	۰/۴۳۵	۰/۵۳۸	۰/۲۷	۰/۱۱۱	۰/۲۸۹	۰/۰۲۱۳

۱. پاگانو و هات فیلد [۱۶]
۲. متین آیدوگدو[۱۵]
۳ . کاراما ام و همکاران[۳]
۴. ردی [۱]

جدول(۳): مقایسه نتایج به‌دست‌آمده از خیز و تنش در این پژوهش با نتایج منتشرشده قبلی برای: (۰,۹۰,۰) و a/b =۱

a/h	منبع	$\overline{W}$	$\overline{\sigma}_x$	$\overline{\sigma}_y$	$\overline{\tau}_{xz}$	$\overline{\tau}_{yz}$	$\overline{\tau}_{xy}$
۴	الاستیسیته	-	۰/۷۵۵	۰/۵۵۶	۰/۲۱۷	۰/۲۸۲	۰/۰۵۰۵
	مدل آیدوگدو	۱/۹۸۵	۰/۷۸۱	۰/۵۰۹	۰/۲۲۶	۰/۱۹۷	۰/۰۵۲۴
	مدل KAM	۱/۹۴۴	۰/۷۷۵	۰/۵۰۲	۰/۲۲	۰/۱۹۱	۰/۰۵۱۶
	مدل پارابولیک	۱/۹۲۱	۰/۷۳۴	-	-	۰/۱۸۳	-
	مطالعه حاضر	۱/۹۲۲	۰/۷۳۳	۰/۵۰۲	۰/۲۰۲	۰,/۱۸۳	۰/۰۴۹۶
۱۰	الاستیسیته	-	۰/۵۹	۰/۲۸۸	۰,۳۵۷	۰/۱۲۲	۰/۰۲۸۹
	مدل آیدوگدو	۰/۷۳۳	۰/۵۷۸	۰/۲۷۵	۰/۲۸۲	۰/۱۱۱	۰/۰۲۸۴
	مدل KAM	۰/۷۲۳	۰/۵۷۶	۰/۲۷۲	۰/۲۷۲	۰/۱۰۸	۰/۰۲۸۱
	مدل پارابولیک	۰/۷۱۲	۰/۵۶۸	-	-	۰/۱۰۳	-
	مطالعه حاضر	۰/۷۱۳	۰/۵۶۸	۰/۲۶۸	۰/۲۴۴	۰/۱۰۳	۰/۰۲۷۷
۲۰	الاستیسیته	-	۰/۵۵۲	۰/۲۱	۰/۳۸۵	۰/۰۹۳۸	۰/۰۲۳۴
	مدل آیدوگدو	۰/۵۱۱	۰/۵۴۸	۰/۲۰۶	۰/۲۹۵	۰/۰۸۷۷	۰/۰۲۳۲
	مدل KAM	۰/۵۰۸	۰/۵۴۸	۰/۲۰۵	۰/۲۸۵	۰/۰۸۶	۰/۰۲۳۱
	مطالعه حاضر	۰/۵۰۴	۰/۵۴۵	۰/۲۰۴	۰/۲۵۴	۰/۰۸۲۶	۰/۰۲۳
۵۰	الاستیسیته	-	۰/۵۴۱	۰/۱۸۵	۰/۳۹۳	۰/۰۸۴۲	۰/۰۲۱۶
	مدل آیدوگدو	۰/۴۴۴	۰/۵۴	۰/۱۸۳	۰/۲۹۹	۰/۰۸۰۱	۰/۰۲۱۶
	مدل KAM	۰/۴۴۴	۰/۵۴	۰/۱۸۳	۰/۲۸۹	۰/۰۷۸۸	۰/۰۲۱۶
	مطالعه حاضر	۰/۴۴۳	۰/۵۳۹	۰/۱۸۳	۰/۲۵۷	۰/۰۷۶۷	۰/۰۲۱۶
۱۰۰	الاستیسیته	-	۰/۵۳۹	۰/۱۸۱	۰/۳۹۵	۰/۰۸۲۸	۰/۰۲۱۳
	مدل آیدوگدو	۰/۴۳۵	۰/۵۳۸	۰/۱۸	۰/۳	۰/۰۷۹	۰/۰۲۱۴
	مدل KAM	۰/۴۳۵	۰/۵۳۸	۰/۱۸	۰/۲۸۹	۰/۰۷۷۸	۰/۰۲۱۳
	مدل پارابولیک	۰/۴۳۴	۰/۵۳۹	-	-	۰/۰۷۵	-
	مطالعه حاضر	۰/۴۳۵	۰/۵۳۸	۰/۱۸	۰/۲۵۸	۰/۰۷۵	۰/۰۲۱۳

جدول(۴): مقایسه نتایج به‌دست‌آمده از خیز و تنش در این پژوهش با نتایج منتشرشده قبلی برای: (۰،۹۰،۰) و ۳= a/b

a/h	منبع	$\overline{W}$	$\overline{\sigma}_x$	$\overline{\sigma}_y$	$\overline{\tau}_{xz}$	$\overline{\tau}_{yz}$	$\overline{\tau}_{xy}$
۴	الاستیسیته	۲/۸۲	۱/۱	۰/۱۱۹	۰,۰۳۳۴	۰,۳۵۱	۰/۰۲۸۱
	مدل آیدوگدو	۲/۷۵۶	۱/۱۱۲	۰/۱۱۸	۰,۰۳۷۳	۰,۳۰۸	۰/۰۲۷۸
	مدل KAM	۲/۶۸۵	۱/۰۹۶	۰/۱۱۶	۰,۰۳۶	۰,۲۹۸	۰/۰۲۷۲
	مدل پارابولیک	۲/۶۴۱	۱/۰۳۵	۰/۱۰۲	۰,۰۳۴۸	۰,۲۷۲	۰/۰۲۶۳
	مدل توراتیه[5]	۲/۶۶۶	۱/۰۶	۰/۱۰۳	۰,۰۳۵۵	۰,۲۸۵	۰/۰۲۶۸
	مطالعه حاضر	۲/۶۴۲	۱/۰۳	۰/۱۰۲	۰,۰۳۴۷	۰,۲۷۲	۰/۰۲۶۳
۱۰	الاستیسیته	۰/۹۱۹	۰/۷۲۵	۰/۰۴۳۵	۰/۰۱۵۲	۰/۴۲	۰/۰۱۲۳
	مدل آیدوگدو	۰/۸۹۱	۰/۷۰۶	۰/۰۴۱۸	۰/۰۱۷۹	۰/۳۳۴	۰/۰۱۱۸
	مدل KAM	۰/۸۷۷	۰/۷۰۴	۰/۰۴۱۲	۰/۰۱۷۵	۰/۳۱۹	۰/۰۱۱۷
	مدل پارابولیک	۰/۸۶۲	۰/۶۹۲	۰/۰۳۹۸	۰/۰۱۷	۰/۲۸۵	۰/۰۱۱۵
	مدل توراتیه	۰/۸۷	۰,۶۹۸	۰/۰۴	۰/۰۱۷	۰/۳۰۲	۰/۰۱۱۶
	مطالعه حاضر	۰/۸۶۳	۰/۶۹۲	۰/۰۳۹۷	۰/۰۱۶۸	۰/۲۸۵	۰/۰۱۱۵
۲۰	الاستیسیته	۰/۶۱	۰/۶۵	۰/۰۲۹۹	۰/۰۱۱۹	۰/۴۳۴	۰/۰۰۹۳
	مدل آیدوگدو	۰/۶۰۲	۰/۶۴۴	۰/۰۲۹۳	۰/۰۱۴۵	۰/۳۳۴	۰/۰۰۹۲
	مدل KAM	۰/۵۹۴	۰/۶۴	۰/۰۲۸۹	۰/۰۱۳۹	۰/۲۸۸	۰/۰۰۹۱
	مدل پارابولیک	۰/۵۹۸	۰/۶۴۳	۰/۰۲۹۲	۰/۰۱۴۳	۰/۳۲۲	۰/۰۰۹۱
	مدل توراتیه	۰/۵۹۶	۰/۶۴۲	۰/۰۲۹	۰/۰۱۴۱	۰/۳۰۴	۰/۰۰۹۱
	مطالعه حاضر	۰/۵۹۴	۰/۶۴	۰/۰۲۸۸	۰/۰۱۳۹	۰/۲۸۷	۰/۰۰۹۱
۵۰	الاستیسیته	۰/۵۲	۰/۶۲۸	۰/۰۲۵۹	۰/۰۱۱	۰/۴۳۹	۰/۰۰۸۴
	مدل آیدوگدو	۰/۵۲	۰/۶۲۶	۰/۰۲۵۸	۰/۰۱۳۵	۰/۳۳۵	۰/۰۰۸۴
	مدل KAM	۰/۵۱۹	۰/۶۲۶	۰/۰۲۵۷	۰/۰۱۳۳	۰/۳۲۳	۰/۰۰۸۴
	مطالعه حاضر	۰/۵۱۸	۰/۶۲۶	۰/۰۲۵۸	۰/۰۱۳	۰,۲۸۸	۰/۰۰۸۴
۱۰۰	الاستیسیته	۰/۵۰۸	۰/۶۲۴	۰/۰۲۵۳	۰/۰۱۰۸	۰/۴۳۹	۰/۰۰۸۳
	مدل آیدوگدو	۰/۵۰۸	۰/۶۲۴	۰/۰۲۵۳	۰/۰۱۳۴	۰/۳۳۵	۰/۰۰۸۳
	مدل KAM	۰/۵۰۸	۰/۶۲۴	۰/۰۲۵۳	۰/۰۱۳۲	۰/۳۲۳	۰/۰۰۸۲
	مدل پارابولیک	۰/۵۰۷	۰/۶۲۴	۰/۰۲۵۳	۰/۰۱۲۹	۰/۲۸۸۶	۰/۰۰۸۳
	مطالعه حاضر	۰/۵۰۸	۰/۶۲۴	۰,/۰۲۵۳	۰/۰۱۲۹	۰/۲۸۸۴	۰/۰۰۸۳

دلیل انتخاب مدلها در جدول‌های فوق نزدیک بودن جواب‌های مربوطه به تئوری الاستیسته سه‌بعدی و تئوری‌های دیگر با بارگذاری مشابه است. در مورد تابع $f(z)$ تعریف‌شده باید به این موضوع اشاره کرد که با افزایش a/h جواب‌ها به‌دست‌آمده دقتی مناسب دارند.

۵. ایدیبی ۱۹۹۷ [۱۷]

نتیجه‌گیری:

مدل ارائه‌شده برای تجزیه‌وتحلیل رفتار استاتیکی شامل خیز و تنش با سادگی بیشتر نسبت به راه‌حل‌های الاستیسیته سه‌بعدی برای کامپوزیت‌ها نتایجی مناسب ارائه می‌کند که با نتایج قبلی هم مقایسه شده و می‌توان دقت روش پیشنهادی را برای سایر انواع مواد پیشرفته و پیچیده دیگر با شرایط مرزی و معادلات بارگزاری متفاوت بررسی نمود.

فهرست منابع:

[1] Mindlin, R. (1951). "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates."
[2] Reissner, E. (1985). "Reflections on the theory of elastic plates."
[3] Ambartsumian, S. (1958). "On the theory of bending plates." Izv Otd Tech Nauk AN SSSR 5(5): 69-77.
[4] Soldatos, K. and T. Timarci (1993). "A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories." Composite structures 25(1-4): 165-171.
[5] Reddy, J. N. (1984). "A simple higher-order theory for laminated composite plates."
[6] Touratier, M. (1991). "An efficient standard plate theory." International journal of engineering science 29(8): 901-916.
[7] Karama, M., et al. (2003). "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity." International Journal of solids and structures 40(6): 1525-1546.
[8] Soldatos, K. (1992). "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates." Acta Mechanica 94(3): 195-220.
[9] Aydogdu, M. (2006). "Comparison of various shear deformation theories for bending, buckling, and vibration of rectangular symmetric cross-ply plate with simply supported edges." Journal of Composite materials 40(23): 2143-2155.
[10] Swaminathan, K. and S. Patil (2008). "Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angle-ply plates." Composite structures 82(2): 209-216.
[11] Liu, L., et al. (2007). "Mesh-free radial basis function method for static, free vibration and buckling analysis of shear deformable composite laminates." Composite structures 78(1): 58-69.
[12] Wu, C.-P. and W.-Y. Chen (1994). "Vibration and stability of laminated plates based on a local high order plate theory." Journal of sound and vibration 177(4): 503-520.
[13] Cho, K., et al. (1991). "Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual-layer theory." Journal of sound and vibration 145(3): 429-442.
[14] Plagianakos, T. S. and D. A. Saravanos (2009). "Higher-order layerwise laminate theory for the prediction of interlaminar shear stresses in thick composite and sandwich composite plates." Composite structures 87(1): 23-35.
[15] Aydogdu, M. (2009). "A new shear deformation theory for laminated composite plates." Composite structures 89(1): 94-101.
[16] Pagang, N. and S. J. Hatfield (1972). "Elastic behavior of multilayered bidirectional composites." AIAA journal 10(7): 931-933.
[17] Idlbi, A., et al. (1997). "Comparison of various laminated plate theories." Composite structures 37(2): 173-184.
[18] Kaczkowski Z.Plates-statistical calculations. Warsaw: Arkady ; 1968
[19] Levinson, M. (1980). "An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates." Mechanics Research Communications **7**(6): 343-350.