



## طراحی سیستم‌های جدید فوق‌آشوب آبخاری مرتبه‌ی کسری و تخمین پارامترهای آن با الگوریتم بهینه‌سازی جدید گرگ خاکستری آشوبی تطبیقی

علی اکبر فرجامی<sup>(۱)</sup> مهدی یعقوبی\*<sup>(۲)</sup> ریحانه کاردهی مقدم<sup>(۳)</sup>

(۱) گروه مهندسی برق، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

(۲) گروه مهندسی برق، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران\*

(۳) گروه مهندسی برق، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۰۵

### چکیده

سیستم‌های فوق‌آشوبی آبخاری مرتبه‌ی کسری در مقایسه با سیستم‌های آشوبی مرتبه‌ی صحیح دارای پارامترهای بیشتری بوده و رفتار پیچیده‌تری از خود نشان می‌دهند. بنابراین تخمین پارامتر این نوع از سیستم‌ها یک مسئله‌ی چالش برانگیز است. بدین منظور در این مقاله یک الگوریتم گرگ خاکستری آشوبی تطبیقی جدید برای حل مسئله‌ی تخمین پارامتر این سیستم‌ها پیشنهاد شده است. شبیه‌سازی بر روی سیستم‌های لو - چن، چن - لورنز و لو - لورنز انجام شده است. به منظور ارزیابی روش پیشنهادی، نتایج آن با الگوریتم‌های بهینه‌سازی گرگ خاکستری معمولی، بهینه‌سازی توده ذرات، نهنگ و شعله پروانه مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهند که الگوریتم گرگ خاکستری آشوبی تطبیقی پیشنهادی از نظر معیارهای دقت و سرعت همگرایی در مقایسه با روش‌های مشابه عملکرد بهتری دارد.

واژه‌های کلیدی: سیستم فوق‌آشوبی آبخاری، محاسبات کسری، تخمین پارامتر، الگوریتم گرگ خاکستری آشوبی تطبیقی

\* عهده‌دار مکاتبات:

نشانی: گروه مهندسی برق، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران.

تلفن: پست الکترونیکی: [yaghoobi@mshdiau.ac.ir](mailto:yaghoobi@mshdiau.ac.ir)



مفهوم آشوب یکی از مفاهیم جدید و بنیادی علم نوین است که می‌تواند در بسیاری از پدیده‌های دنیای واقعی اعم از سیستم‌های دارای رفتار به‌ظاهر تصادفی و بی‌نظم و همچنین سیستم‌های دارای رفتار معین رخ دهد. سیستم‌های فوق‌آشوبی رفتار پیچیده‌تری در مقایسه با سیستم‌های آشوبی از خود بروز می‌دهند. سیستم فوق‌آشوبی، سیستمی است که حداقل دارای دو نمای لیاپانوف مثبت باشد [۱]. سیستم آشوبی آبخاری از اتصال سری دو نگاشت آشوبی بوجود می‌آید. خروجی اولین نگاشت به ورودی نگاشت دوم متصل می‌شود. خروجی نگاشت دوم به‌عنوان ورودی نگاشت اول بازخورانده می‌شود و به‌عنوان خروجی سیستم هم مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین سیستم‌های آشوبی آبخاری در مقایسه با سیستم‌های آشوبی معمولی رفتار پیچیده‌تری از خود نشان می‌دهند [۲].

امروزه محاسبات کسری توجه زیادی میان محققان در زمینه‌ی دانش طبیعی و اجتماعی به خود جلب کرده است. در مقایسه با محاسبات مرتبه‌ی صحیح، مزیت عمده‌ی محاسبات کسری، حافظه‌ی آن و توانایی برای توصیف ویژگی‌های ارثی است. محاسبات کسری در موضوعات مختلف مانند فیزیک [۳]، سیستم‌های کنترلی [۴]، اقتصاد [۵]، پردازش تصویر [۶]، واکنش‌های بیوشیمی و غیره کاربردهای زیادی دارد. با توجه به ویژگی‌های محاسبات کسری و پیچیده بودن سیستم‌های فوق‌آشوبی آبخاری در مقایسه با سیستم‌های آشوبی معمولی، در این مقاله مسئله‌ی شناسایی سیستم‌های فوق‌آشوبی آبخاری با مدل مرتبه‌ی کسری مورد توجه قرار گرفته است.

شناسایی سیستم یکی از شاخه‌های مورد توجه بسیاری از محققان و دانشمندان بوده و حوزه وسیعی از پژوهش‌ها را به خود اختصاص داده است. این موضوع کاربردهای مهم و مختلفی در صنعت داشته و نقشی اساسی در تحلیل و کنترل یک سیستم صنعتی دارد. شناسایی سیستم شامل دو بخش یعنی به دست آوردن مدل مناسب و تخمین زدن پارامترهای مدل می‌باشد. خوش‌بختانه اطلاعات کافی در مورد ساختار بسیاری از سیستم‌های مهندسی و فرآیندهای صنعتی در دسترس است. بنابراین مسئله‌ی شناسایی سیستم معمولاً به یک مسئله‌ی تخمین پارامتر کاهش می‌یابد. تحقیقات مختلفی برای شناسایی سیستم‌های آشوبی مرتبه‌ی صحیح توسط محققان انجام شده است که از جدیدترین آن‌ها می‌توان به مراجع [۸-۱۲] اشاره کرد. یوسری و همکاران در ۲۰۱۹ از الگوریتم بهینه‌سازی نهنگ آشوبی برای تخمین پارامتر رفتار آشوبی در موتور سنکرون مغناطیس دائم استفاده نمودند [۸]. موسی‌زاده و شکفته در ۲۰۲۰ یک تابع هزینه بر اساس نگاشت خودسازمانده برای تخمین پارامتر سیستم‌های آشوبی زمان گسسته ارائه دادند [۹]. تخمین پارامتر سیستم‌های آشوبی با تخمین چگالی جاذب‌های عجیب در فضای حالت به‌وسیله‌ی شکفته و همکاران در ۲۰۱۹ مطالعه شد [۱۰]. دینگ و همکاران در ۲۰۱۸ از الگوریتم کلونی زنبور عسل برای شناسایی پارامترهای سیستم‌های آشوبی استفاده نمودند [۱۱]. تخمین پارامتر سیستم‌های آشوبی با استفاده از الگوریتم گرده‌افشانی گل‌ها به‌وسیله‌ی زو و همکاران در ۲۰۱۸ مطالعه شد [۱۲].

در حوزه‌ی تخمین پارامتر سیستم‌های آشوبی مرتبه‌ی کسری، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. در [۱۳] از الگوریتم بهینه‌سازی ملخ برای شناسایی سیستم آشوبی مرتبه‌ی کسری استفاده شده است. در [۱۴] الگوریتم بهینه‌سازی کلونی زنبور عسل برای تخمین پارامتر سیستم آشوبی مرتبه‌ی کسری با تاخیر زمانی ارایه شده است. در [۱۵] تخمین پارامتر سیستم‌های فوق‌آشوب مرتبه‌ی کسری با ابعاد دلخواه با الگوریتم کلونی زنبور عسل مصنوعی و بازیخت شبیه‌ساز شده به‌صورت ترکیبی انجام شده است. در [۱۶] شناسایی پارامتر سیستم‌های آشوبی مرتبه‌ی کسری گسسته با استفاده از یک الگوریتم بهینه‌سازی توده‌ی ذرات بهبودیافته انجام شده است. یک الگوریتم بهینه‌سازی توده‌ی ذرات آشوبی برای تخمین پارامتر سیستم‌های آشوبی مرتبه‌ی کسری با مقادیر اولیه‌ی مجهول در [۱۷] به‌کار برده شده است. در [۱۸] شناسایی سیستم‌های آشوبی مرتبه‌ی کسری با شرایط اولیه

مجهول و ساختار نامعلوم با الگوریتم تکامل تفاضلی مرکب مطالعه شده است. در [۱۹] شناسایی پارامتر سیستم‌های آشوبی مرتبه‌ی کسری با الگوریتم جستجوی فرکتال تصادفی ترکیبی انجام شده است. مرور تخمین پارامترهای سیستم‌های آشوبی مرتبه‌ی کسری با الگوریتم‌های بهینه‌سازی فرااکتشافی مختلف در [۲۰] انجام شده است. یوسری و میرجلیلی در ۲۰۲۰ از الگوریتم فاخته‌ی مرتبه‌ی کسری برای شناسایی پارامترهای سیستم آشوبی مرتبه‌ی کسری با نویز و سیستم‌های مالی فوق‌آشوب استفاده کردند [۲۱].

با توجه به تحقیقات گذشته، تخمین پارامتر سیستم‌های فوق‌آشوب مرتبه‌ی کسری توسط برخی از نویسندگان مورد بررسی قرار گرفته است. اما موضوع تخمین پارامتر سیستم‌های فوق‌آشوب آبشاری مرتبه‌ی کسری تاکنون انجام نشده است. بنابراین در این مقاله، تخمین پارامتر این سیستم‌ها مورد توجه قرار گرفته است. برای این منظور یک الگوریتم بهینه‌سازی گرگ خاکستری آشوبی تطبیقی جدید معرفی شده است. الگوریتم بهینه‌سازی گرگ خاکستری یک الگوریتم فراابتکاری ملهم شده از رفتار جمعی شکار و رهبری گرگ‌ها در طبیعت است که توسط میرجلیلی و همکاران در ۲۰۱۴ ارائه شد [۲۲]. از طرف دیگر، یکی از کاربردهای آشوب، استفاده از آن در مسائل بهینه‌سازی است. تاکنون آشوب در مسائل بهینه‌سازی مختلفی به‌طور موفقیت‌آمیزی به کار برده شده است. به علت خاصیت ارگودیکی و پیچیدگی آشوب، الگوریتم‌ها می‌توانند جستجوی مبتنی بر تکرار بیشتری در مقابل با جستجوی تصادفی با توزیع احتمال استاندارد، ارائه دهند [۲۳]. بنابراین می‌تواند تنوع بهتری به جمعیت داده و عملکرد الگوریتم را بهبود ببخشد. الگوریتم‌های بهینه‌سازی مختلف زیادی تاکنون توسط محققان به‌کمک تئوری آشوب بهبود داده شده‌اند که می‌توان به مراجع [۲۴-۳۳] اشاره نمود.

هدف اصلی این مقاله، ارائه‌ی یک الگوریتم گرگ خاکستری بهبودیافته با نگاشت‌های آشوبی و عملگرهای جدید برای افزایش توانایی جستجوی محلی و سراسری و استفاده از این الگوریتم در شناسایی سیستم‌های فوق‌آشوب آبشاری مرتبه‌ی کسری است. به منظور سنجش عملکرد و کارایی الگوریتم پیشنهادی، شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده و نتایج با روش‌های مشابه شامل گرگ خاکستری (GWO<sup>۱</sup>)، بهینه‌سازی توده ذرات (PSO<sup>۲</sup>)، نهنگ (WOA<sup>۳</sup>) و شعله پروانه (MFO<sup>۴</sup>) از نظر معیارهای سرعت و دقت مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهند که روش پیشنهادی یک نامزد خوب در تخمین پارامتر سیستم‌های فوق‌آشوب آبشاری مرتبه‌ی کسری است.

سازماندهی این مقاله به این صورت است. در بخش دوم محاسبات مرتبه‌ی کسری و مفاهیم پایه‌ی آن توصیف شده است. بخش سوم به معرفی سیستم‌های فوق‌آشوب آبشاری مدل مرتبه‌ی کسری اختصاص یافته است. در بخش چهارم پس از توضیح الگوریتم بهینه‌سازی گرگ خاکستری، الگوریتم پیشنهادی تشریح شده است. در بخش پنجم فرمول‌بندی مسئله‌ی شناسایی سیستم غیرخطی آشوبی آبشاری مرتبه‌ی کسری بیان شده است. در بخش ششم شبیه‌سازی‌ها و نتایج آن ارائه شده است. در نهایت نتیجه‌گیری در بخش هفتم بیان شده است.

<sup>1</sup> Grey wolf optimizer

<sup>2</sup> Particle swarm optimization

<sup>3</sup> Whale optimization algorithm

<sup>4</sup> Moth flame optimization algorithm

## ۲. محاسبات مرتبه‌ی کسری

معادلات مرتبه‌ی کسری قادرند پدیده‌های گوناگون را مناسب‌تر از مرتبه‌ی صحیح آن مدل کنند. این معادلات یک ابزار قوی برای توصیف ساختارهای یک سیستم با دینامیک پیچیده می‌باشند. اکثر سیستم‌های موجود در طبیعت با دینامیک کسری بوده و با تقریب، مرتبه‌ی آن‌ها صحیح در نظر گرفته می‌شود. استفاده از محاسبات مرتبه‌ی کسری در بیشتر مواقع، پارامترهای جدیدی در اختیار طراح قرار می‌دهد. این پارامترهای اضافی به‌عنوان ابزاری در دست طراح، موجب به‌دست آمدن نتایج بهتری می‌گردد. روش‌های معمول برای مشتق مرتبه‌ی کسری شامل روش‌های گرانوالد - لتنیکوف<sup>۵</sup> [۱۳]، ریمان- لیویل<sup>۶</sup> [۷] و کاپوتو<sup>۷</sup> [۷] می‌باشد که در این مقاله روش گرانوالد - لتنیکوف در نظر گرفته شده است.

مشتق و انتگرال کسری را می‌توان در یک بیان به‌صورت معادله (۱) زیر در نظر گرفت و جزئیات محاسبه‌ی مشتق مرتبه‌ی کسری به شرح معادلات ۲ الی ۵ می‌باشد [۱۳].

$${}_a D_t^q = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q}, & q > 0, \\ 1, & q = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^q, & q < 0. \end{cases} \quad (1)$$

که  $a$  و  $t$  به ترتیب نشان‌دهنده‌ی محدوده‌های زمانی پایین و بالای انتگرال کسری می‌باشند و  $q \in R$  مقدار عددی مرتبه‌ی کسری است. عبارت  $\tau$  متغیر مستقل در انتگرال کسری است. بر طبق تقریب گرانوالد - لتنیکوف، مشتق مرتبه کسری  $q$  به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_t^q f(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h^q} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{q}{j} f(t - jh) \quad (2)$$

که در آن  $h$  اندازه گام زمانی است. در محاسبه‌ی عددی مشتقات مرتبه کسری، تقریب عددی آشکار مشتق  $q$  ام در نقاط  $kh$  ( $k=1,2,\dots$ ) حالت زیر را نگه می‌دارد:

$$(k - L_m / h) D_{t_k}^q f(t) \approx h^{-q} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{q}{j} f(t_k - j) \quad (3)$$

که  $L_m$  طول حافظه است.  $t_k = kh$  و  $(-1)^j \binom{q}{j}$  ضرایب دو قطبی می‌باشند. برای محاسبه‌ی آن‌ها می‌توانیم بیان زیر را استفاده کنیم:

$$c_0^{(q)} = 1, \quad c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)} \quad (4)$$

<sup>5</sup> Grunwald-Letenikov

<sup>6</sup> Riemann-Liouville

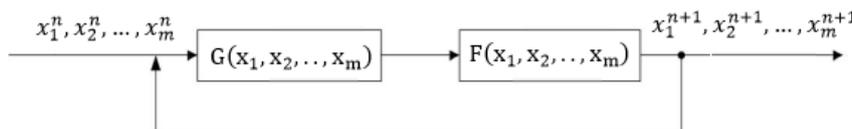
<sup>7</sup> Caputo

معادله تفاضلی با مشتق کسری  $D_t^q y(t_k) = f(y(t_k), t_k)$  در نظر می‌گیریم که در آن  $y(t_k)$  متغیر حالت در زمان  $t_k$  است. با توجه به معادله (۴)، به کمک  $c_j^{(q)}$  می‌توان معادله تفاضلی مرتبه‌ی کسری را حل نمود که جواب عددی عمومی معادله‌ی تفاضلی مرتبه‌ی کسری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y(t_k) = f(y(t_k), t_k) h^q - \sum_{j=1}^k c_j^{(q)} y(t_{k-j}) \quad (5)$$

### ۳. سیستم فوق‌آشوب آبشاری مدل مرتبه‌ی کسری

سیستم فوق‌آشوب آبشاری، از اتصال سری دو نگاشت  $m$  بعدی فوق‌آشوب به‌عنوان دانه به دست می‌آید. در این سیستم، خروجی‌های اولین نگاشت به ورودی‌های نگاشت دوم متصل می‌شوند. خروجی‌های نگاشت دوم به‌عنوان ورودی برای نگاشت اول بازخورانده شده و هم‌چنین به‌عنوان خروجی‌های سیستم فوق‌آشوب آبشاری نیز در نظر گرفته می‌شوند. شکل (۱) ساختار سیستم فوق‌آشوب آبشاری را نشان می‌دهد که  $G(x_1, x_2, \dots, x_m)$  و  $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$  دو نگاشت دانه می‌باشند.



شکل ۱. ساختار سیستم فوق‌آشوب آبشاری

به‌طور ریاضی، سیستم فوق‌آشوب آبشاری طبق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$(x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, \dots, x_m^{n+1}) = \mathcal{T}(x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n) = F(G(x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n)) \quad (6)$$

هر نگاشت فوق‌آشوب  $m$  بعدی را می‌توان برای  $G(x_1, x_2, \dots, x_m)$  و  $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$  بکاربرد و این نگاشت‌ها می‌توانند سیستم‌های فوق‌آشوب یکسان یا متفاوت با بعد یکسان باشند.

سیستم فوق‌آشوب آبشاری به کاربران انعطاف‌پذیری بیشتری می‌دهد تا تعداد زیادی نگاشت‌های فوق‌آشوب جدید را با تنظیمات متفاوت نگاشت‌های فوق‌آشوب  $G$  و  $F$  تولید نمایند. این سیستم تمام پارامترهای نگاشت‌های دانه‌اش را شامل می‌شود. بنابراین پارامترهای بیشتر و خاصیت‌های پیچیده‌تری نسبت به نگاشت‌های دانه دارد. با توجه به قابلیت‌های محاسبات مرتبه‌ی کسری در توصیف سیستم‌ها، در شناسایی سیستم فوق‌آشوب آبشاری، مدل مرتبه‌ی کسری مورد استفاده قرار گرفته است.

برای تشکیل سیستم‌های فوق‌آشوب آبشاری مرتبه‌ی کسری، از سیستم‌های فوق‌آشوب لو<sup>۸</sup>، چن<sup>۹</sup> و لورنز<sup>۱۰</sup> به‌عنوان نگاشت‌های دانه استفاده شده است. در جدول ۱ پارامترها و متغیرهای مهم این سیستم‌ها آورده شده‌اند.

<sup>8</sup> Lu

<sup>9</sup> Chen

<sup>10</sup> Lorenz

جدول ۱. نمادهای پارامترهای مهم

نام پارامتر یا متغیر	توضیحات
q	مقدار مشتق کسری
x, y, z, w	متغیرهای حالت سیستم فوق آشوب
a, b, c, d	پارامترهای سیستم‌های فوق آشوب چن و لورنز
$\theta, \Upsilon, \beta, \alpha$	پارامترهای سیستم فوق آشوب لورنز

الف) سیستم فوق آشوب لو: معادلات این سیستم عبارتند از:

$$\begin{cases} D^q x = a(y - x) \\ D^q y = cy - xz + w \\ D^q z = xy - bz \\ D^q w = z - dw \end{cases} \quad (7)$$

این سیستم به ازای  $d=1.5$  و  $c=10$ ,  $b=5$ ,  $a=20$  فوق آشوب می‌باشد.

ب) سیستم فوق آشوب چن: معادلات این سیستم عبارتند از:

$$\begin{cases} D^q x = a(y - x) + w \\ D^q y = dx - xz + cy \\ D^q z = xy - bz \\ D^q w = yz + rw \end{cases} \quad (8)$$

این سیستم به ازای  $d=7$ ,  $c=12$ ,  $b=3$ ,  $a=35$  و  $r \in [0.798, 0.9]$  فوق آشوب می‌باشد.

ج) سیستم فوق آشوب لورنز: معادلات این سیستم عبارتند از:

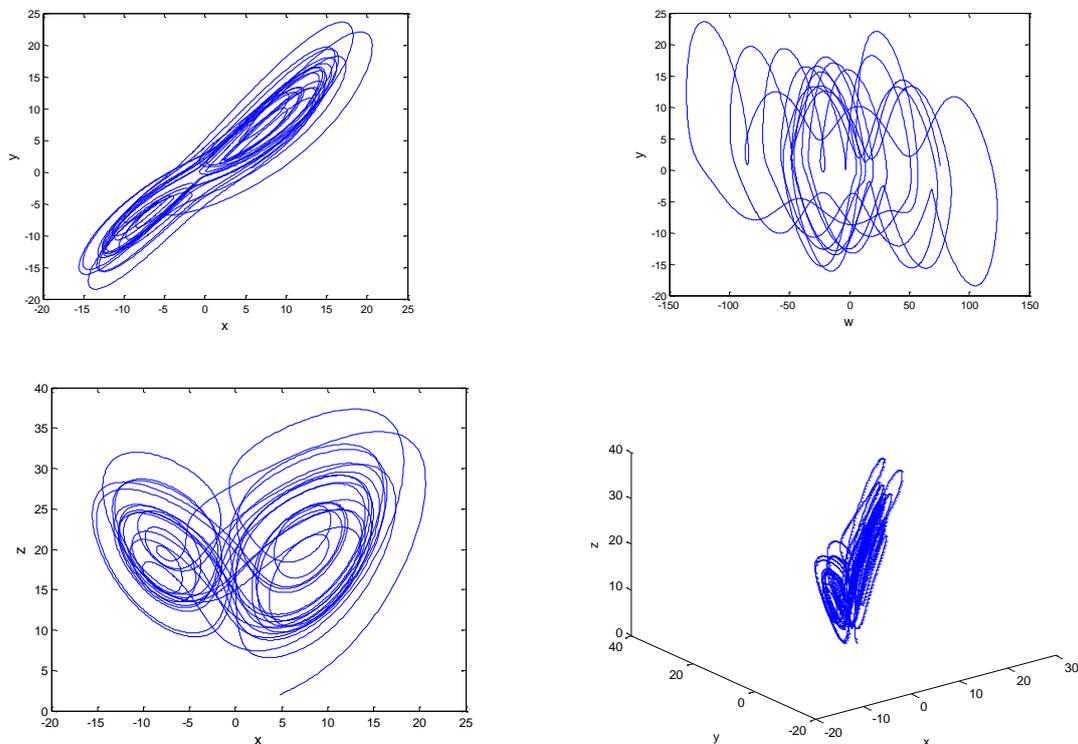
$$\begin{cases} D^q x = \alpha(y - x) \\ D^q y = \beta z + y - xz - w \\ D^q z = xy - \Upsilon z \\ D^q w = \theta yz \end{cases} \quad (9)$$

این سیستم به ازای  $\theta=0.1$  و  $\Upsilon=8/3$ ,  $\beta=28$ ,  $\alpha=10$  فوق آشوب می‌باشد.

با توجه به مباحث بیان شده در زمینه‌ی سیستم‌های فوق آشوب آبخاری، سیستم‌های آبخاری لو - چن، چن - لورنز و لو - لورنز به صورت زیر می‌باشند.

### ۱-۳. سیستم لو - چن

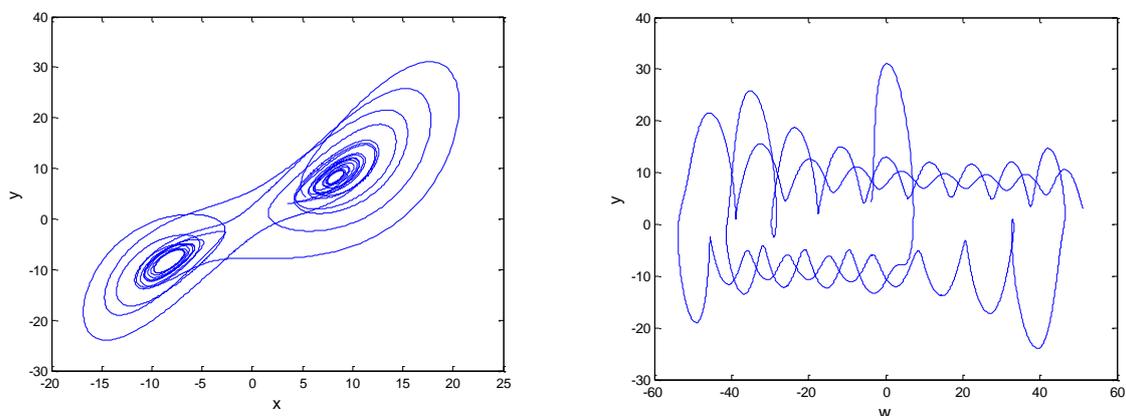
در این سیستم خروجی سیستم فوق آشوب مرتبه‌ی کسری لو به‌عنوان ورودی سیستم فوق آشوب مرتبه‌ی کسری چن به‌کاررفته و خروجی سیستم چن، ضمن استفاده به‌عنوان خروجی نهایی سیستم، به‌عنوان ورودی لو پس‌خورانده می‌شود. شکل ۲ مسیرهای فاز این سیستم را نشان می‌دهد. برای هر کدام از سیستم‌های دانه،  $q=0.99$  می‌باشد.

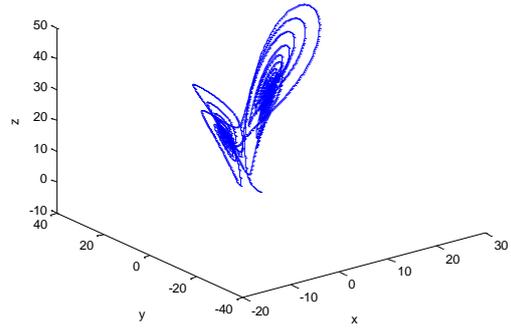
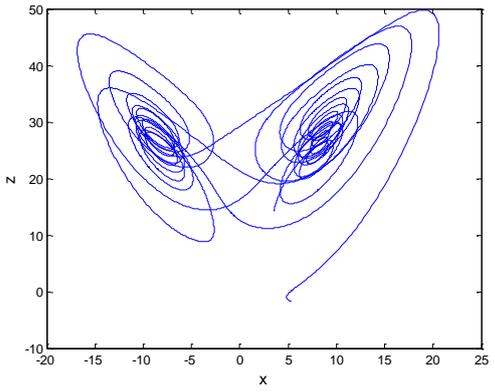


شکل ۲- مسیرهای فاز سیستم فوق آشوب آبخاری مرتبه‌ی کسری لو - چن

### ۲-۳. سیستم آبخاری مرتبه‌ی کسری چن- لورنز

مسیرهای فاز این سیستم در شکل ۳ نشان داده شده است. برای سیستم چن  $q=0.99$  و برای سیستم لورنز  $q=0.96$  در نظر گرفته شده است.

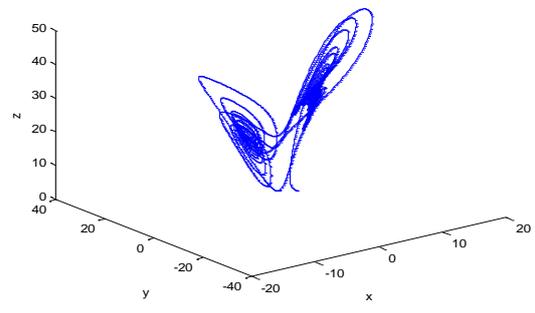
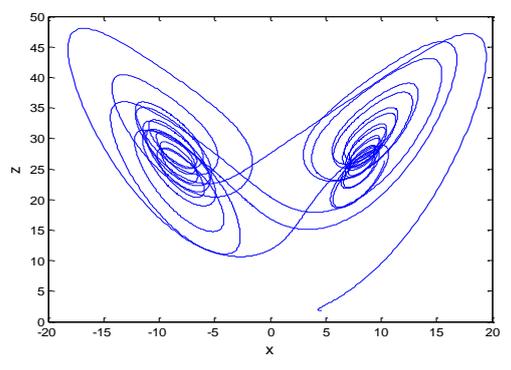
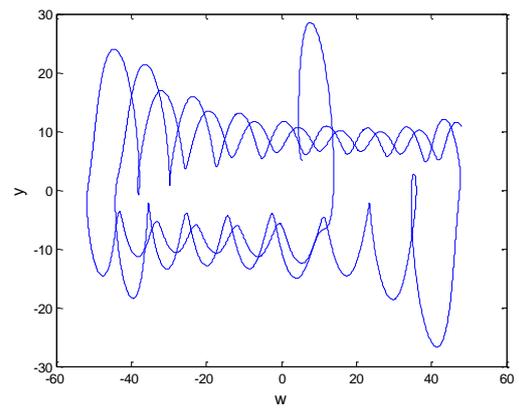
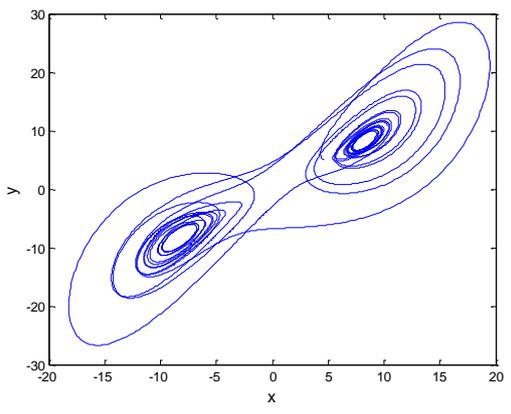




شکل ۳- مسیرهای فاز سیستم فوق‌آشوب آبشاری مرتبه‌ی کسری چن - لورنز

### ۳-۳. سیستم آبشاری مرتبه‌ی کسری لو- لورنز

مسیرهای فاز این سیستم در شکل ۴ نشان داده شده است. برای سیستم لو  $q=0.99$  و برای سیستم لورنز  $q=0.96$  در نظر گرفته شده است.



شکل ۴- مسیرهای فاز سیستم فوق‌آشوب آبشاری مرتبه‌ی کسری لو - لورنز

#### ۴. روش پیشنهادی

در این بخش ابتدا الگوریتم بهینه‌سازی گرگ خاکستری معرفی شده و سپس الگوریتم جدید بهینه‌سازی گرگ خاکستری آشوبی تطبیقی پیشنهاد می‌گردد.

#### ۴-۱. الگوریتم بهینه‌سازی گرگ خاکستری

الگوریتم بهینه‌سازی گرگ خاکستری یک روش جدید فراابتکاری می‌باشد که از رفتار شکار اجتماعی گرگ‌های خاکستری الهام گرفته شده است [۲۲]. این الگوریتم دارای توانایی خوب همگرایی به جواب بهینه می‌باشد و تا اندازه‌ای، قابلیت غلبه بر گیرافتادن در بهینه محلی را دارا می‌باشد. این الگوریتم مبتنی بر جمعیت بوده و فرآیند ساده‌ای برای تنظیمات دارد. همچنین به راحتی قابل تعمیم به مسائل با ابعاد بزرگ می‌باشد. در پیاده‌سازی این الگوریتم، چهار نوع از گرگ‌های خاکستری به نام آلفا، بتا، دلتا و امگا برای شبیه‌سازی سلسله مراتب رهبری استفاده می‌شود. در آن سه گام اصلی شکار یعنی جستجو برای طعمه، محاصره طعمه و حمله به طعمه، اجرا می‌شود. در این الگوریتم، بهینه‌سازی با استفاده از گرگ‌های آلفا، بتا و دلتا انجام می‌شود. یک گرگ به‌عنوان آلفا (دارای بهترین برازندگی) هدایت‌کننده‌ی اصلی الگوریتم فرض می‌شود و یک گرگ بتا و دلتا نیز مشارکت دارند و بقیه‌ی گرگ‌ها به‌عنوان دنبال‌کننده‌ی آن‌ها محسوب می‌شوند.

مدل‌سازی فرآیند محاصره شکار با استفاده از روابط زیر انجام می‌شود.

$$\vec{D} = \left| \vec{C} \cdot \vec{X}_p(t) - \vec{X}(t) \right| \quad (10)$$

$$\vec{X}(t+1) = \vec{X}_p(t) - \vec{A} \cdot \vec{D} \quad (11)$$

در روابط مذکور  $t$  شماره تکرار،  $\vec{A}$  و  $\vec{C}$  بردار ضرایب،  $\vec{X}_p$  بردار موقعیت شکار و  $\vec{X}$  بردار موقعیت یک گرگ خاکستری می‌باشد. بردارهای  $\vec{A}$  و  $\vec{C}$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\vec{A} = 2\vec{a} \cdot \vec{r}_1 - \vec{a} \quad (12)$$

$$\vec{C} = 2\vec{r}_2 \quad (13)$$

که در آن مولفه‌های  $\vec{a}$  در طی تکرارهای متوالی به صورت خطی از ۲ تا صفر کاهش می‌یابند و  $\vec{r}_1$  و  $\vec{r}_2$  بردارهای تصادفی در بازه  $[0, 1]$  هستند.

فرآیند شکار این الگوریتم به این صورت است. شکار به وسیله‌ی گرگ آلفا هدایت می‌شود. در جستجوی اولیه هیچ ایده‌ای در مورد موقعیت شکار نداریم. فرض می‌شود گرگ‌های آلفا، بتا و دلتا دانش اولیه‌ی بهتری در خصوص موقعیت شکار (نقطه بهینه جواب) دارند. در واقع گرگ‌های آلفا، بتا و دلتا موقعیت شکار را تخمین می‌زنند و بقیه گرگ‌ها موقعیت خود را به طور تصادفی حول شکار به‌روز می‌کنند. موقعیت ۳ جواب برتر همواره حفظ می‌شود. روابط به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{D}_\alpha = |\vec{C}_1 \cdot \vec{X}_\alpha - \vec{X}|, \vec{D}_\beta = |\vec{C}_2 \cdot \vec{X}_\beta - \vec{X}|, \vec{D}_\delta = |\vec{C}_3 \cdot \vec{X}_\delta - \vec{X}| \quad (14)$$

$$\vec{X}_1 = \vec{X}_\alpha - \vec{A}_1 \cdot (\vec{D}_\alpha), \vec{X}_2 = \vec{X}_\beta - \vec{A}_2 \cdot (\vec{D}_\beta), \vec{X}_3 = \vec{X}_\delta - \vec{A}_3 \cdot (\vec{D}_\delta) \quad (15)$$

$$\vec{X}(t+1) = \frac{\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3}{3} \quad (16)$$

وقتی شکار توسط گرگ‌ها احاطه شده و از حرکت بایستد، در مرحله‌ی بعدی حمله به رهبری گرگ آلفا شروع می‌شود. مدل کردن این فرآیند با استفاده از کاهش بردار  $\vec{a}$  انجام می‌شود. از آنجا که  $\vec{A}$  برداری تصادفی در بازه  $[-2a, 2a]$  می‌باشد، با کاهش  $\vec{a}$  بردار ضرایب  $\vec{A}$  هم کاهش می‌یابد. اگر  $|A| < 1$  باشد، گرگ آلفا به شکار و بقیه گرگ‌ها نزدیک می‌شود (استخراج) و اگر  $|A| > 1$  گرگ از شکار و بقیه گرگ‌ها دور خواهد شد (اکتشاف). بردار  $\vec{C}$  به‌عنوان موانع موجود در طبیعت که نزدیک شدن گرگ‌ها به شکار را کند می‌کنند در نظر گرفته می‌شود. بردار  $\vec{C}$  به شکار وزن داده و دست‌یابی به آن را برای گرگ‌ها مشکل‌تر می‌کند. این بردار برخلاف  $\vec{a}$  به‌صورت خطی از ۲ تا صفر کاهش نمی‌یابد.

پس به‌طور خلاصه می‌توان الگوریتم بهینه‌ساز گرگ خاکستری را به ترتیب زیر جمع‌بندی نمود:

- ۱- برازندگی کلیه جواب‌ها محاسبه شده و سه جواب برتر به‌عنوان آلفا، بتا و دلتا انتخاب می‌شوند.
- ۲- در هر تکرار، سه جواب برتر قابلیت تخمین موقعیت شکار را داشته و این کار را با استفاده از رابطه (۱۴) انجام می‌دهند.
- ۳- در هر تکرار بعد از تعیین موقعیت گرگ‌های آلفا، بتا و دلتا، به‌روزرسانی موقعیت بقیه جواب‌ها با تبعیت از آن‌ها با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) انجام می‌شود.
- ۴- در هر تکرار بردارهای  $\vec{A}$  و  $\vec{C}$  با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) به‌روزرسانی می‌شوند.
- ۵- در پایان تکرارها، موقعیت گرگ آلفا به‌عنوان نقطه بهینه معرفی می‌شود.

#### ۲-۴. الگوریتم پیشنهادی: الگوریتم بهینه‌ساز گرگ خاکستری آشوبی تطبیقی<sup>۱۱</sup>

با افزایش پیچیدگی در مسایل بهینه‌سازی، سرعت همگرایی الگوریتم گرگ خاکستری کاهش می‌یابد و سبب افزایش زمان محاسبات می‌شود. برای رفع این مشکل، توسعه‌های جدیدی از این الگوریتم در مقالات مختلف ارائه شده است. به‌عنوان نمونه می‌توان به استفاده از نگاشت‌های آشوبی در تنظیم پارامترهای آن اشاره نمود [۳۳]. استفاده از نگاشت‌های آشوبی، تاثیر مثبتی بر میزان همگرایی الگوریتم دارد، زیرا این نگاشت‌ها باعث ایجاد آشوب در منطقه قابل اجرا می‌شود که تنها برای زمان اولیه بسیار کوتاه قابل پیش‌بینی است و برای مدت زمان طولانی تصادفی است.

<sup>11</sup> Adaptive chaotic grey wolf optimizer - ACGWO

در این مقاله نگاهت آشوبی چبیشف<sup>۱۲</sup> در نظر گرفته شده است.

$$x_{k+1} = \cos(k \cos^{-1}(x_k)) \quad (17)$$

در الگوریتم پیشنهادی، پارامتر  $a$  به صورت یک معادله‌ی کاهش‌ی غیرخطی به کمک نگاهت‌های آشوبی در هر تکرار به‌روزرسانی می‌شود که به صورت زیر است:

$$a(it) = \left( \frac{(MaxIt - it)^{Exponent}}{(MaxIt - 1)} \right) (a_{\max} - a_{\min}) + 0.15z(it) \quad (18)$$

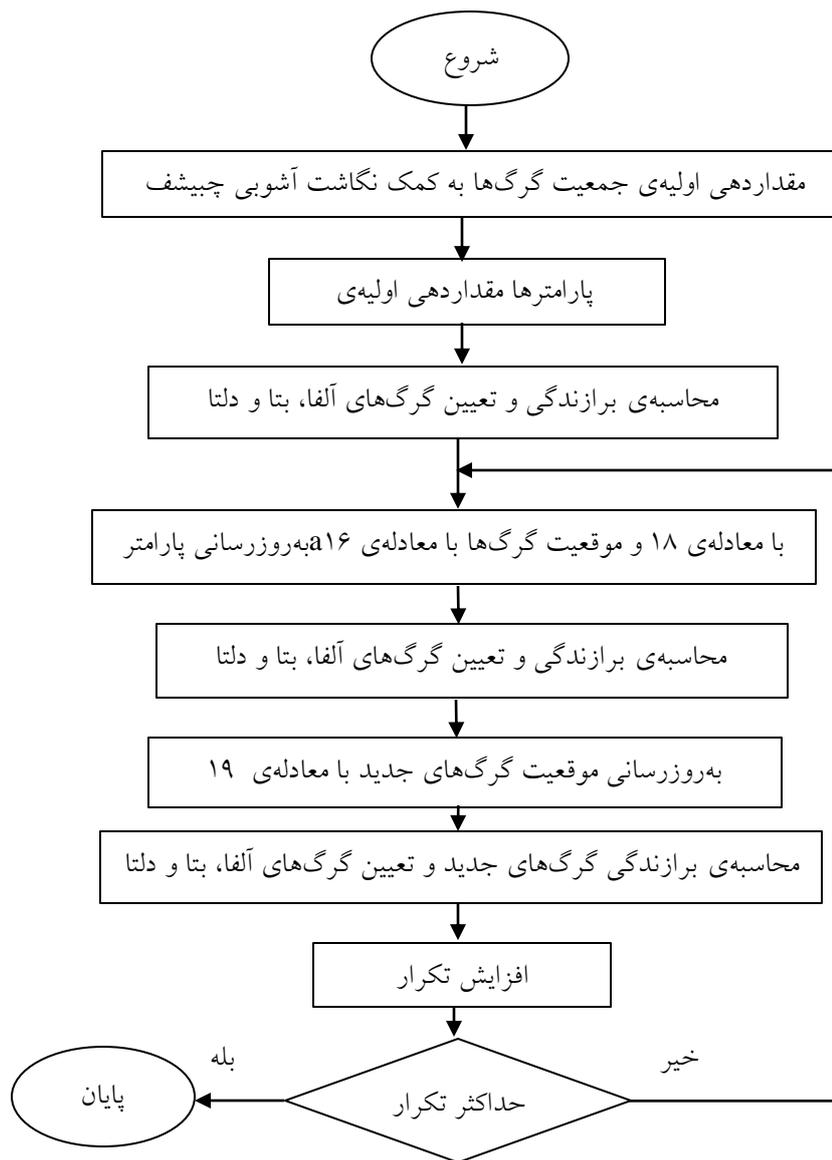
که در آن  $z$  نگاهت آشوبی است. در این معادله **Exponent** مربوط به مقدار توان است و بزرگ‌تر از یک انتخاب می‌شود. مقادیر  $a_{\max}$  و  $a_{\min}$  به ترتیب بیشترین مقدار  $a$  و کمترین مقدار آن می‌باشند.

به منظور بهبود در جستجوی سراسری و محلی الگوریتم، معادلات جدید ۱۹ در الگوریتم اعمال شده‌اند.

$$\begin{aligned} m1 &= randi([1 \quad dim]) \\ m2 &= randi([1 \quad dim]) \\ m3 &= randi([1 \quad dim]) \\ \text{if } rand > 0.6 \\ &Xnew^i(m1) = round(X^i(m1)) + randi([-2, 2]) \\ &Xnew^i(m2) = round(X^i(m2)) + randi([-2, 2]) \\ &Xnew^i(m3) = round(X^i(m3)) + randi([-2, 2]) \\ \text{else} \\ &Xnew^i(m1) = round(XAlpha(m1)) + randi([-1, 1]) \\ &Xnew^i(m2) = round(XAlpha(m2)) + randi([-1, 1]) \\ &Xnew^i(m3) = round(XBeta(m3)) + randi([-1, 1]) \\ \text{end} \end{aligned} \quad (19)$$

در معادله (۱۹) سه بعد  $m1$ ،  $m2$  و  $m3$  از میان ابعاد مسأله به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند. اگر یک عدد تصادفی بزرگتر از  $0/6$  باشد، سه جهش بر روی سه بعد انتخاب‌شده از عضو  $i$  ام اعمال می‌شود. بعد  $m1$  ام عضو جدید برابر با مجموع روند مقدار بعد  $m1$  ام از عضو  $i$  ام با یک عدد صحیح تصادفی در محدوده‌ی  $[-2 \quad 2]$  خواهد شد. به طور مشابه برای ابعاد  $m2$  و  $m3$  نیز این معادله تکرار می‌شود. اگر عدد تصادفی کوچکتر از  $0/6$  شود بر روی جستجوی محلی حول بهترین عضو تمرکز می‌شود. به این صورت که در دو معادله، مقدار عضو جدید برابر با مجموع روند گرگ آلفا در ابعاد  $m1$  و  $m2$  آن با یک عدد تصادفی در محدوده‌ی  $[-1 \quad 1]$  خواهد شد. برای افزایش تنوع در جستجوها، در بعد  $m3$  به جای گرگ آلفا، گرگ بتا جایگزین می‌گردد. فلوچارت الگوریتم پیشنهادی در شکل ۵ نشان داده شده است.

<sup>12</sup> Chebyshev



شکل ۵. فلوجارت الگوریتم بهینه‌سازی گرگ خاکستری آشوبی تطبیقی

##### ۵. فرمول‌بندی مسئله

در این مقاله، فرآیند شناسایی به صورت یک مسئله بهینه‌سازی چندبعدی در نظر گرفته شده است. در این فرآیند، پارامترهای سیستم فوق‌آشوب آبشاری مرتبه‌ی کسری تخمین زده شده<sup>۱۳</sup> با استفاده از روش بهینه‌سازی هوشمند و خروجی‌های سیستم فوق‌آشوب آبشاری مرتبه‌ی کسری اصلی<sup>۱۴</sup> تخمین زده می‌شوند. ایده این است که  $FOCHC_E$  بهترین ارتباط بین پارامتری را با  $FOCHC_O$  نشان می‌دهد. تحت این شرایط، سیستم فوق‌آشوب آبشاری مرتبه‌ی کسری اصلی ( $FOCHC_O$ ) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_a D_t^q = F(X, X_0, \theta), \quad (20)$$

<sup>13</sup> Estimated Fractional Order Cascade Hyper Chaotic –  $FOCHC_E$

<sup>14</sup> Original Fractional Order Cascade Hyper Chaotic –  $FOCHC_O$

که  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$  بردار حالت  $n$  بعدی سیستم اصلی را نشان می‌دهد.  $X_0$  نشان‌دهنده‌ی حالت اولیه است. پارامترهای سیستم اصلی است.  $q = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)^T \in R^n$  یک مجموعه مرتبه‌ی کسری از سیستم اصلی و  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D)^T \in R^D$  مقدار

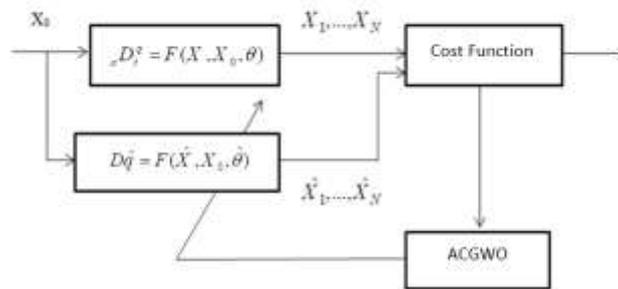
از طرف دیگر، سیستم تخمین زده شده (FOCHCE) به صورت زیر توصیف شده است:

$$D\hat{q} = F(\hat{X}, X_0, \hat{\theta}), \quad (21)$$

که  $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T \in R^n$  بردار حالت  $n$  بعدی سیستم تخمین زده شده را بیان می‌کند.  $\hat{q} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_n)^T \in R^n$  مرتبه‌ی سیستم است که تخمین زده می‌شود.  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_D)^T \in R^D$  یک مجموعه از پارامترهای تخمین زده شده است. در این مقاله تخمین پارامتر شامل پارامترهای  $\hat{q}$  و  $\hat{\theta}$  در نظر گرفته شده است. شاخص عملکرد برای کمینه‌سازی به صورت زیر می‌باشد:

$$\min J = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \|X_k - \hat{X}_k\|^2 \quad (22)$$

بلوک دیاگرام طرح تخمین پارامتر به کمک الگوریتم پیشنهادی در شکل (۶) نشان داده شده است.



شکل ۶ - بلوک دیاگرام طرح تخمین پارامتر به کمک الگوریتم پیشنهادی

## ۶. نتایج شبیه‌سازی

در این بخش نتایج تخمین پارامترهای سیستم‌های فوق‌آشوب آبخاری مرتبه‌ی کسری با استفاده از الگوریتم پیشنهادی ارائه شده است. هر پارامتر کسری به صورت تقسیم دو پارامتر صحیح در نظر گرفته شده است و بنابراین به ازای هر پارامتر کسری، یک پارامتر دیگر به مسأله اضافه می‌گردد. همچنین مرتبه‌ی کسری سیستم‌ها نیز نامعلوم فرض شده و توسط الگوریتم تخمین زده می‌شود. برای ارزیابی الگوریتم ACGWO، نتایج تخمین پارامتر آن با الگوریتم‌های WOA، PSO، GWO و MFO مقایسه شده است. برای تمام الگوریتم‌ها حداکثر تعداد تکرار ۲۰۰ و اندازه‌ی جمعیت برابر با ۱۰۰ انتخاب شده است. نتایج تخمین پارامترهای سیستم‌های فوق‌آشوب آبخاری با مدل مرتبه‌ی کسری با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و مقایسه‌ی آن با سایر الگوریتم‌های فوق در جداول ۲ الی ۵ نشان داده شده است.

جدول ۲- مقایسه‌ی بهترین برازندگی در تخمین پارامتر سیستم‌های آبخاری با مدل مرتبه‌ی کسری با الگوریتم‌های ACGWO پیشنهادی، گرگ خاکستری، بهینه‌سازی توده ذرات، نهنگ و شعله پروانه در ۱۰ تکرار

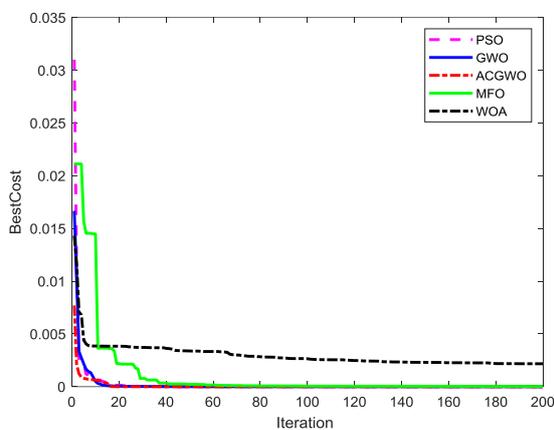
بهترین برازندگی				الگوریتم	سیستم
انحراف معیار	بیشترین	کمترین	میانگین		
1.2970e-10	4.3156e-10	0	4.0589e-11	پیشنهادی ACGWO	لو - چن
1.6829e-07	5.9170e-07	3.3266e-09	1.6793e-07	GWO	
6.2122e-08	2.0381e-07	1.2580e-08	1.2345e-07	PSO	
9.8478e-04	0.0052396	0.0014571	0.0037817	WOA	
1.9346e-05	4.545e-05	5.4069e-06	3.3441e-05	MFO	
4.6550e-07	1.6784e-06	0	1.2912e-07	پیشنهادی ACGWO	چن - لورنز
1.2526e-04	4.1548e-04	1.1573e-09	3.7821e-05	GWO	
5.6480e-07	1.7457e-06	1.0381e-08	4.7076e-07	PSO	
0.0278956	0.10526	0.012512	0.0352458	WOA	
6.4111e-04	0.002037	2.455e-07	2.1328e-04	MFO	
1.0115e-10	3.3857e-10	0	3.7054e-11	پیشنهادی ACGWO	لو - لورنز
7.7655e-08	2.3435e-07	1.1600e-09	4.6831e-08	GWO	
1.1436e-06	3.9110e-06	1.5733e-09	4.8229e-07	PSO	
0.0017896	0.00595720	0.0020376	0.00348502	WOA	
2.57076e-04	6.13399e-04	1.0425e-06	4.888025e-04	MFO	

از جدول ۲ مشاهده می‌شود که کمترین مقدار تابع هزینه به دست آمده از روش پیشنهادی ACGWO در مقایسه با روش‌های دیگر برای هر سه سیستم، کمتر می‌باشد. همچنین میانگین و بیشترین مقدار بهترین برازندگی به دست آمده توسط روش پیشنهادی بهتر از چهار روش دیگر شده است.

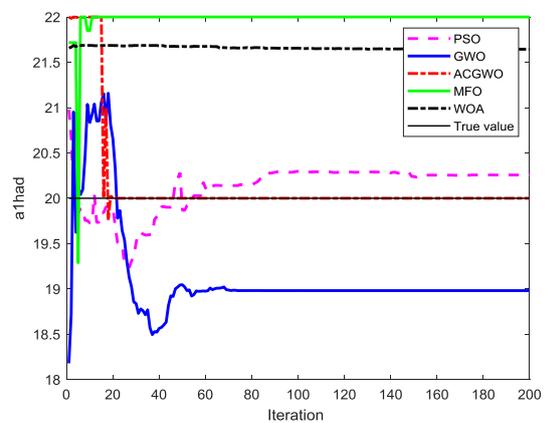
جدول ۳- بهترین تخمین پارامترهای سیستم آبخاری لو - چن با مدل مرتبه‌ی کسری با الگوریتم‌های مختلف در ۱۰ تکرار

مقدار تخمین زده شده پارامتر					مقدار واقعی پارامتر
شعله پروانه	نهنگ	بهینه‌سازی توده ذرات	گرگ خاکستری	ACGWO پیشنهادی	
20.9183	18.3473	19.7128	21.2724	20	20
10.9924	8.1595	10.1933	8.0000	10	10
7.0000	4.8482	4.4992	6.9887	5	5
2.1736	2.4140	0.9793	1.7005	1.5	1.5
35.122	35.1966	35.0104	35.0063	35	35
7.1496	7.3283	7.0144	7.0078	7	7
11.9399	11.9771	11.8911	12.0282	12	12
3.0847	2.5836	2.9050	3.0311	3	3
0.7574	0.8949	0.7907	0.8033	0.8	0.8
0.96662	0.9662	0.96986	0.97031	0.9700	0.97
0.9819	0.9828	0.98002	0.98002	0.9800	0.98

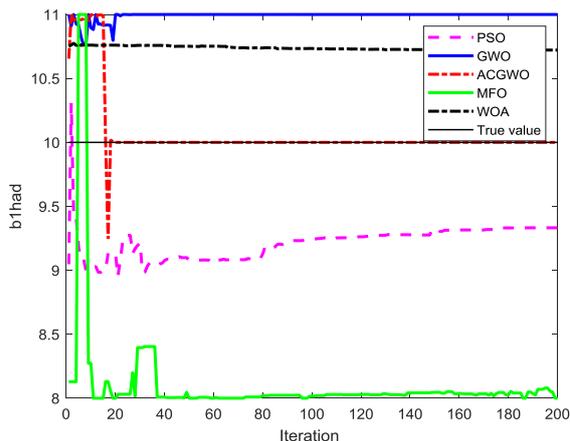
از جدول ۳ و شکل ۷ مشاهده می‌شود که پارامترهای تخمین زده شده توسط الگوریتم پیشنهادی در تعداد تکرار کمتری به مقادیر واقعی همگرا شده‌اند. همچنین از شکل ۷ (a) مشاهده می‌شود که سرعت نزدیک شدن به صفر مربوط به بهترین هزینه‌ی به دست آمده از روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های دیگر بیشتر است.



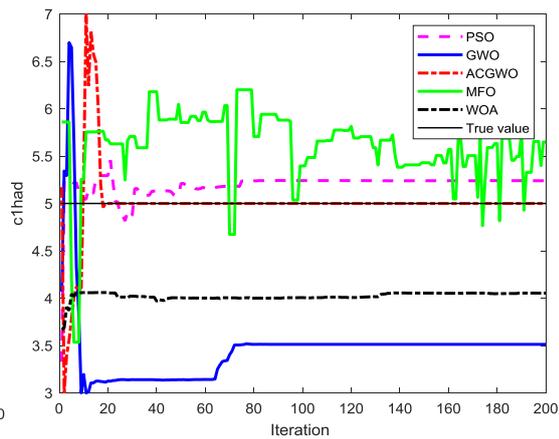
(a)



(b)



(c)

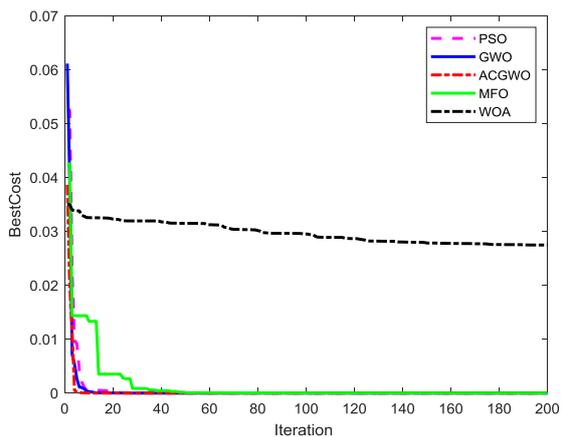


(d)

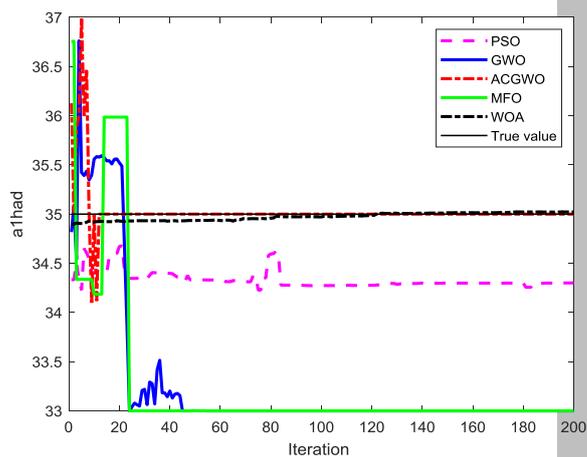
شکل ۷- (a) منحنی بهترین هزینه و (b-d) منحنی تخمین پارامترهای (a1,b1,c1) سیستم آبشاری لو - چن با مدل مرتبه‌ی کسری با استفاده از الگوریتم‌های مختلف

جدول ۴- بهترین تخمین پارامترهای سیستم آبشاری چن - لورنز با مدل مرتبه‌ی کسری با الگوریتم‌های مختلف در ۱۰ تکرار

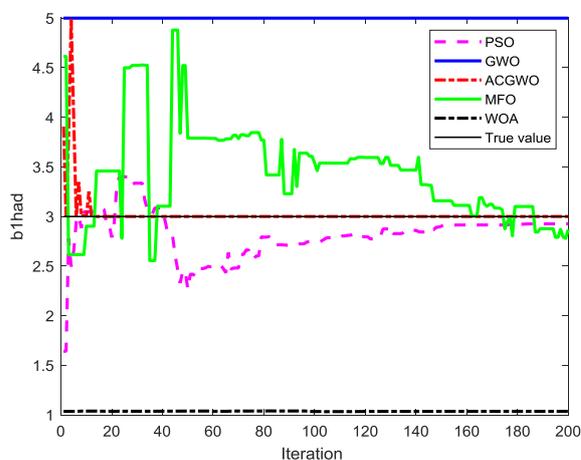
مقدار تخمین زده شده پارامتر					مقدار واقعی پارامتر
شعله پروانه	نهنگ	بهینه‌سازی توده ذرات	گرگ خاکستری	ACGWO پیشنهادی	
33.0000	36.6692	34.3707	34.1179	35	35
6.2902	6.2541	6.6086	6.645	7	7
10.0001	10.5410	12.4281	10.9596	12	12
5.0000	3.0041	2.9287	3.9113	3	3
0.8151	0.5994	0.9995	0.978	0.8	0.8
10.0001	10.1767	9.8825	9.966	10	10
27.9987	27.5902	28.0065	28.002	28	28
4.6835	2.97761	2.6496	2.662	8/3	8/3
0.1001375	0.119286	0.108	0.103	0.1	0.1
0.9793	0.9847	0.980026	0.9799	0.98	0.98
0.96001	0.960718	0.959959	0.9599	0.96	0.96



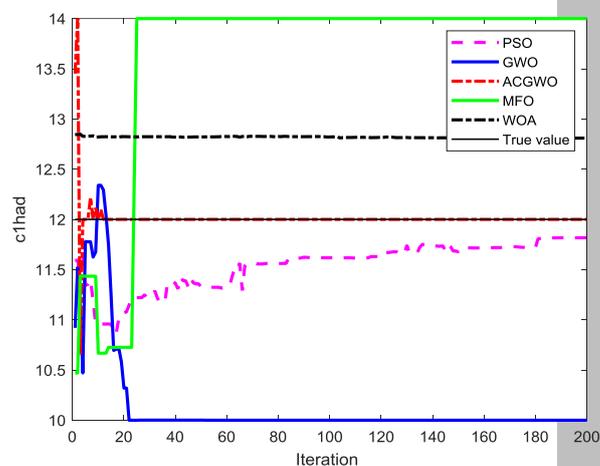
(a)



(b)



(c)



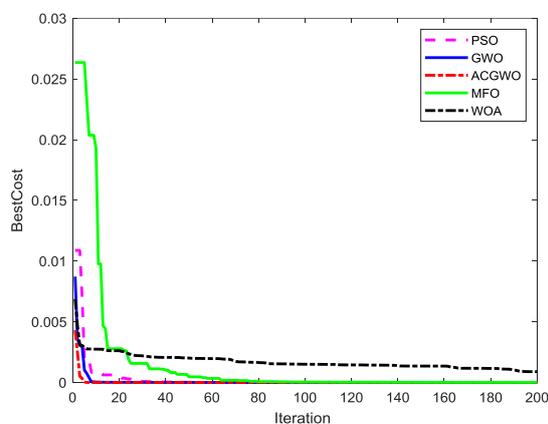
(d)

شکل ۸- (a) منحنی بهترین هزینه و (b-d) منحنی تخمین پارامترهای (a1,b1,c1) سیستم آبخاری چن - لورنز با مدل مرتبه‌ی کسری با استفاده از الگوریتم‌های مختلف

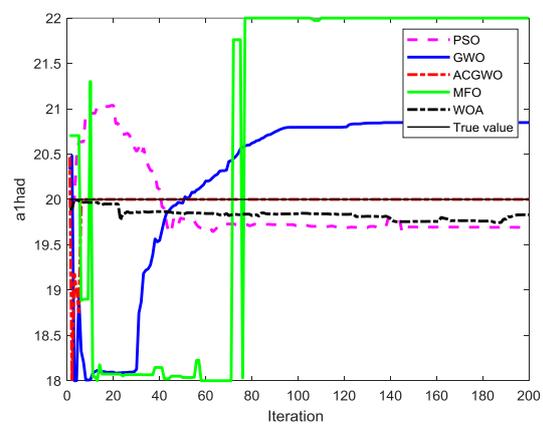
از جدول ۴ و شکل ۸ مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی دقیق‌تر پارامترها را تخمین زده است. در تعداد تکرار کمتری توانسته است که پارامترها را تخمین بزند. در حالی که روش‌های دیگر در نقاط بهینه‌ی محلی به دام افتاده و در تخمین پارامتر کارایی کمتری داشته‌اند.

جدول ۵. بهترین تخمین پارامترهای سیستم آبخاری لو - لورنز با مدل مرتبه‌ی کسری با الگوریتم‌های مختلف در ۱۰ تکرار

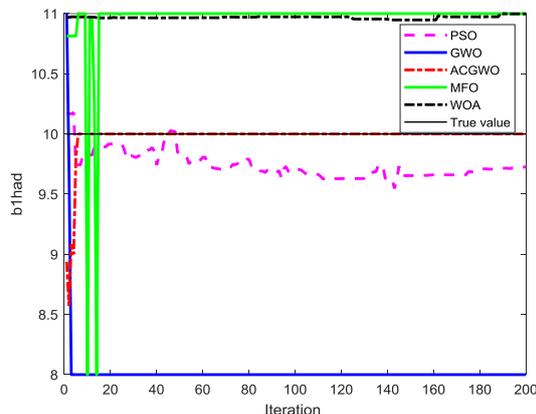
مقدار تخمین زده شده پارامتر					مقدار واقعی
شعله پروانه	نهنگ	توده ذرات	گرگ خاکستری	ACGWO	پارامتر
20.1195	20.4229	20.2419	19.8691	20	20
9.6571	9.3456	9.6406	10.2261	10	10
4.6718	3.8051	5.3697	4.7817	5	5
1.03208	0.85316	1.8479	1.4118	1.5	1.5
9.9664	9.4505	9.995	9.9972	10	10
27.9670	27.6594	27.9941	27.9966	28	28
2.6607	2.3697	2.66	2.6663	8/3	8/3
0.1013	0.1112	0.09443	0.1031	0.1	0.1
0.970079	0.9862	0.970092	0.9699	0.97	0.97
0.95988	0.9523	0.959987	0.95998	0.96	0.96



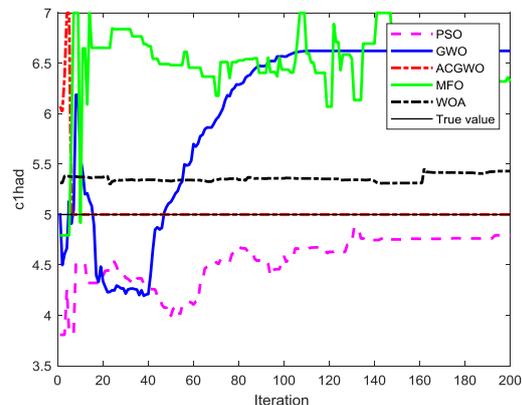
(a)



(b)



(c)



(d)

شکل ۹- (a) منحنی بهترین هزینه و (b-d) منحنی تخمین پارامترهای (a1,b1,c1) سیستم آبخاری لو - لورنز با مدل مرتبه‌ی کسری با الگوریتم‌های مختلف

از جدول ۵ مشاهده می‌شود که الگوریتم پیشنهادی توانسته است به‌طور دقیق پارامترها را تخمین بزند. در حالی که روش‌های دیگر خطای زیادی در تخمین پارامتر داشته‌اند. همان‌گونه که از شکل ۹ مشاهده می‌گردد، الگوریتم پیشنهادی، مقادیر دقیق

پارامترها را تخمین زده است که دست‌یابی به خطای تخمین صفر، به دلیل استفاده از عملگر روند در معادلات الگوریتم می‌باشد. همچنین در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها، روش پیشنهادی عملکرد بهتری دارد.

## ۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا سیستم‌های فوق‌آشوب آبشاری معرفی شدند که در تحقیقات پیشین به آن‌ها توجه‌ای نشده است. سپس تخمین پارامتر مدل مرتبه‌ی کسری این سیستم‌ها با الگوریتم پیشنهادی جدید گرگ خاکستری آشوبی تطبیقی انجام شد. در طرح پیشنهادی، با معادلات جدید اعمال شده به الگوریتم گرگ خاکستری معمولی، این الگوریتم هم از نظر جستجوی سراسری و هم از نظر جستجوی محلی بهبود یافته است. سپس به منظور ارزیابی الگوریتم، نتایج به دست آمده با سایر الگوریتم‌ها مقایسه شدند. نتایج نشان داد که الگوریتم پیشنهادی می‌تواند مقادیر دقیق پارامترها را تخمین بزند که دست‌یابی به خطای تخمین صفر، به دلیل استفاده از عملگر روند در معادلات الگوریتم می‌باشد. همچنین الگوریتم مذکور عملکرد بهتری از نظر دقت و سرعت همگرایی پارامترها در مقایسه با الگوریتم‌های گرگ خاکستری، بهینه‌سازی توده ذرات، نهنگ و شعله پروانه دارد. همچنین علاوه بر تخمین دقیق پارامترهای سیستم‌ها، مرتبه‌ی کسری سیستم‌ها را هم با دقت زیاد تخمین می‌زند. به‌عنوان کار آینده پیشنهاد می‌شود که از الگوریتم پیشنهادی در کاربردهای دیگر بهینه‌سازی مسائل غیرخطی و غیرمحدب استفاده شود.

## ۸. مراجع

- [1] Zeng, J., & Wang, C. (2021). A novel hyperchaotic image encryption system based on particle swarm optimization algorithm and cellular automata. *Security and Communication Networks*, 2021.
- [2] Zhou, Y., Hua, Z., Pun, C. M., & Chen, C. P. (2014). Cascade chaotic system with applications. *IEEE transactions on cybernetics*, 45(9), 2001-2012.
- [3] Odziejewicz, T., Malinowska, A. B., & Torres, D. F. (2012, March). Fractional calculus of variations in terms of a generalized fractional integral with applications to physics. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2012). Hindawi.
- [4] Ranganayakulu, R., Seshagiri Rao, A., & Uday Bhaskar Babu, G. (2020). Analytical design of fractional IMC filter–PID control strategy for performance enhancement of cascade control systems. *International Journal of Systems Science*, 51(10), 1699-1713.
- [5] Tarasov, V. E. (2020). *Mathematical Economics: Application of Fractional Calculus*.
- [6] Ghanbari, B., & Atangana, A. (2020). A new application of fractional Atangana–Baleanu derivatives: designing ABC-fractional masks in image processing. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 542, 123516.
- [7] Akgül, A., & Khoshnaw, S. A. (2020). Application of fractional derivative on non-linear biochemical reaction models. *International Journal of Intelligent Networks*, 1, 52-58.
- [8] Yousri, D., Allam, D., & Eteiba, M. B. (2019). Chaotic whale optimizer variants for parameters estimation of the chaotic behavior in Permanent Magnet Synchronous Motor. *Applied Soft Computing*, 74, 479-503.
- [9] Mousazadeh, A., & Shekofteh, Y. (2020). Cost function based on the self-organizing map for parameter estimation of chaotic discrete-time systems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 94, 103817.
- [10] Shekofteh, Y., Panahi, S., Boubaker, O., & Jafari, S. (2019). Parameter Estimation of Chaotic Systems Using Density Estimation of Strange Attractors in the State Space. In *Recent Advances in Chaotic Systems and Synchronization* (pp. 105-124). Academic Press.

- [11] Ding, Z., Lu, Z., & Liu, J. (2018). Parameter's identification of chaotic systems based on artificial bee colony algorithm combined with cuckoo search strategy. *Science China Technological Sciences*, 61(3), 417-426.
- [12] Xu, S., Wang, Y., & Liu, X. (2018). Parameter estimation for chaotic systems via a hybrid flower pollination algorithm. *Neural Computing and Applications*, 30(8), 2607-2623.
- [13] Cuevas, E., Zaldívar, D., & Pérez-Cisneros, M. (2018). Identification of Fractional Chaotic Systems by Using the Locust Search Algorithm. In *Advances in Metaheuristics Algorithms: Methods and Applications* (pp. 77-92). Springer, Cham.
- [14] Gu, W., Yu, Y., & Hu, W. (2017). Artificial bee colony algorithm-based parameter estimation of fractional-order chaotic system with time delay. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 4(1), 107-113.
- [15] Hu, W., Yu, Y., & Gu, W. (2018). Parameter estimation of fractional-order arbitrary dimensional hyperchaotic systems via a hybrid adaptive artificial bee colony algorithm with simulated annealing algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 68, 172-191.
- [16] Peng, Y., Sun, K., He, S., & Peng, D. (2019). Parameter identification of fractional-order discrete chaotic systems. *Entropy*, 21(1), 27.
- [17] Peng, Y., Sun, K., He, S., & Yang, X. (2018). Parameter estimation of a complex chaotic system with unknown initial values. *The European Physical Journal Plus*, 133(8), 1-13.
- [18] Du, W., Miao, Q., Tong, L., & Tang, Y. (2017). Identification of fractional-order systems with unknown initial values and structure. *Physics Letters A*, 381(23), 1943-1949.
- [19] Lin, J., & Wang, Z. J. (2017). Parameter identification for fractional-order chaotic systems using a hybrid stochastic fractal search algorithm. *Nonlinear Dynamics*, 90(2), 1243-1255.
- [20] Yousri, D. A., AbdelAty, A. M., Said, L. A., Elwakil, A. S., Maundy, B., & Radwan, A. G. (2019). Parameter identification of fractional-order chaotic systems using different meta-heuristic optimization algorithms. *Nonlinear Dynamics*, 95(3), 2491-2542.
- [21] Yousri, D., & Mirjalili, S. (2020). Fractional-order cuckoo search algorithm for parameter identification of the fractional-order chaotic, chaotic with noise and hyper-chaotic financial systems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 92, 103662.
- [22] Mirjalili, S., Mirjalili, S. M., & Lewis, A. (2014). Grey wolf optimizer. *Advances in engineering software*, 69, 46-61.
- [23] Fujita, T., Watanabe, T., Yasuda, K., & Yokoyama, R. (1996). Global optimization method using intermittency chaos. *Electronics and Communications in Japan (Part III: Fundamental Electronic Science)*, 79(10), 56-66.
- [24] dos Santos Coelho, L., & Mariani, V. C. (2008). Use of chaotic sequences in a biologically inspired algorithm for engineering design optimization. *Expert Systems with Applications*, 34(3), 1905-1913.
- [25] Gandomi, A. H., & Yang, X. S. (2014). Chaotic bat algorithm. *Journal of Computational Science*, 5(2), 224-232.
- [26] Huang, X., Jia, P., Liu, B., & Wang, L. (2010, July). Control of Hénon chaotic systems by chaotic particle swarm optimization. In *9th IEEE International Conference on Cognitive Informatics (ICCI'10)* (pp. 117-121). IEEE.
- [27] Yousefi, M., Yousefi, M., Ferreira, R. P. M., Kim, J. H., & Fogliatto, F. S. (2018). Chaotic genetic algorithm and Adaboost ensemble metamodeling approach for optimum resource planning in emergency departments. *Artificial intelligence in medicine*, 84, 23-33.
- [28] Talatahari, S., Azar, B. F., Sheikholeslami, R., & Gandomi, A. H. (2012). Imperialist competitive algorithm combined with chaos for global optimization. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(3), 1312-1319.
- [29] Ghosh, P., Mali, K., & Das, S. K. (2018). Chaotic firefly algorithm-based fuzzy C-means algorithm for segmentation of brain tissues in magnetic resonance images. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 54, 63-79.
- [30] Gandomi, A. H., Yang, X. S., Talatahari, S., & Alavi, A. H. (2013). Firefly algorithm with chaos. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(1), 89-98.
- [31] Kaur, G., & Arora, S. (2018). Chaotic whale optimization algorithm. *Journal of Computational Design and Engineering*, 5(3), 275-284.
- [32] Mitić, M., Vuković, N., Petrović, M., & Miljković, Z. (2015). Chaotic fruit fly optimization algorithm. *Knowledge-Based Systems*, 89, 446-458.
- [33] Kohli, M., & Arora, S. (2018). Chaotic grey wolf optimization algorithm for constrained optimization problems. *Journal of computational design and engineering*, 5(4), 458-472.