

Sampled-Data Flocking of Multi-Agent Systems under the Cyber-Attack Problem

Sahar Yazdani¹

1. Department of Electrical Engineering, Zanjan Branch, Islamic Azad University, Zanjan, Iran, *Corresponding Author*, saharyazdani_k@yahoo.com.

Introduction: Flocking is a type of collective behavior which is observed in the nature. In the design of a flocking algorithm, it should be ensured connectivity of agents' network and the collision avoidance, and velocities convergence of agents to that of virtual leader. In practice due to the limitations in the measurement and control units, it is often impossible to ensure the continuity of information. Thus, the study of the flocking problem under the sampled data frameworks is indispensable. However, to the best of the authors' knowledge, there are very few works on the sampled-data flocking. On the other hand, in many practical applications, the multi-agent systems are controlled through some communication networks. The transmitted data among agents could be easily exploited by adversaries due to the open network links among sensors, controllers and actuators. Since in practice often the attacks are capable to destroy a number of edges within the network or cause to collide among agents, the study of networked system under the cyber-attacks is very important. In the cyber-attacks, successful but recoverable attacks have attracted more attention. Successful attacks refer to a class of attacks by which the network is broken down into a group of isolated clusters. Recoverable attacks refer to a class of attacks that the network can recover from after a period of time. In this paper, we study the sampled-data flocking of multi-agent systems under the successful but recoverable network attacks.

Method: Here, defining a new discrete-time energy function we prove the asymptotic velocity convergence of agents to the velocity of virtual leader. Then, through the upper bound of the energy function, we find an upper bound for the sampling period such that the connectivity of network is preserved and collision is avoided, and also, the velocity convergence is ensured. After that, we modify the algorithm for application in cyber-attacks.

Results: We show that under our proposed sampled-data algorithm, no link is lost from initial network, no collision is occurred among agents, and the velocity convergence of agents to that of virtual leader is ensured. Also, demonstrate the proposed algorithm is applicable for the flocking under the attack problem.

Keywords: Flocking, sampled-data, cyber-attack problem, multi-agent systems.



انجمن علمی تجارت الکترونیکی ایران

سامانه‌های پردازشی و ارتباطی چندرسانه‌ای هوشمند

Intelligent Multimedia Processing and Communication Systems (IMPCS)



واحد زنجان

حرکت گروهی سیستم‌های چندعاملی با داده‌های نمونه‌شده تحت حملات سایبری

دوره پنجم، بهار ۱۴۰۳
شماره اول، صص: ۴۷-۵۶

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۰۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۶/۱۱

سحر یزدانی کهنه‌شهری^۱

۱. استادیار، گروه برق و مهندسی پزشکی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران. (نویسنده مسئول)

saharyazdani_k@yahoo.com

چکیده: این مقاله، به ارائه الگوریتمی برای حرکت گروهی سیستم‌های چندعاملی در حضور حمله می‌پردازد. ابتدا یک الگوریتم جدید برای حرکت گروهی سیستم‌های چندعاملی با وجود رهبر مجازی با داده‌های نمونه‌شده ارائه می‌شود به طوری که همه اهداف حرکت گروهی یعنی لینک‌های اولیه بین عوامل حفظ و از برخورد بین عوامل جلوگیری شود و همچنین هم‌گرایی سرعتی عوامل به سرعت رهبر مجازی تضمین شود. از آنجاکه حمله‌های سایبری می‌تواند باعث از بین رفتن به هم پیوستگی شبکه عامل‌ها و یا برخورد آن‌ها به هم و در نهایت عدم هم‌گرایی عامل‌ها به رهبر مجازی شود، ازین‌رو در اینجا به بررسی مسأله تحت حمله‌های موفق ولی جبران‌پذیر پرداخته می‌شود. در این گونه حمله‌ها، حمله می‌تواند به هم پیوستگی شبکه ارتباطی را از بین ببرد ولی بعد از مدتی امکان بازیابی شبکه وجود دارد. در ادامه الگوریتم ارائه شده برای حرکت گروهی با داده‌های نمونه‌شده برای استفاده در شرایط حملات سایبری اصلاح می‌شود و نشان داده می‌شود که در حضور حمله باز هم گروه قادر است به حرکت هماهنگی که همه اهداف حرکت گروهی را برآورده می‌کند، دست یابد.

واژه‌های کلیدی: حرکت گروهی، داده‌های نمونه‌شده، حملات سایبری، سیستم‌های چندعاملی.

امروزه یکی از مسائل مطرح در حوزه کنترل سیستم‌ها، کنترل سیستم‌های چند-عاملی خودگردان می‌باشد. یکی از مهمترین کاربردهای کنترل جمعی سیستم‌های چند-عاملی در حرکت گروهی می‌باشد. در سال‌های اخیر به سبب کاربرد گسترده حرکت گروهی در حوزه‌های مختلف کنترلی مانند کنترل ربات‌های سیار در اهداف نظامی از جمله شناسایی، نظارت و حمله توسط هواپیماهای بدون سرنشین و طراحی شبکه‌های حسگری سیار این شاخه از کنترل جمعی مورد توجه واقع شده‌است. حرکت گروهی سیستم‌های چند-عاملی در طبیعت در تجمع باکتری‌ها، کوچ پرندگان، ماهی‌ها و ... مشهود است. حرکت گروهی پدیده‌ای است که در آن تعداد زیادی از عامل‌ها با استفاده از اطلاعات محلی محدود و با به‌کار بستن قوانین کنترلی ساده حرکتی هماهنگ دارند که در آن عامل‌ها بدون برخورد با همدیگر و درحالی‌که کنار هم می‌مانند، می‌توانند به سرعت رهبر یا رهبر مجازی همگرا شوند.

در طول سال‌هایی که قوانین حرکت گروهی توسط Reynolds ارائه شد [۱] تلاش‌های زیادی برای ارائه الگوریتم‌هایی که این قوانین را محقق کند، انجام شد [۲-۱۵] که از مهمترین آن‌ها الگوریتم الفتی-صابر و سو بود [۵-۶]. تفاوت دو الگوریتم در این بود که الفتی-صابر فرض کرده بود همه عوامل از اطلاعات رهبر آگاه هستند اما سو همه عوامل را آگاه در نظر نمی‌گرفت و فرض می‌کرد تنها بخشی از آن‌ها به اطلاعات رهبر دسترسی دارند. این فرض بسیار ساده در تئوری و پیاده‌سازی تفاوت‌های مهمی ایجاد می‌کرد.

در اکثر الگوریتم‌های ارائه شده این فرض رایج وجود داشت که در یافت اطلاعات عامل‌های همسایه و رهبر مجازی برای هر عامل به صورت پیوسته صورت می‌گیرد. با توجه به محدودیت‌های عملی موجود در ادوات مخابراتی و کنترلی، اندازه‌گیری اطلاعات به صورت پیوسته برای عامل‌ها ممکن نیست و عملی‌تر است که فرض کنیم اندازه‌گیری اطلاعات عامل‌های همسایه و رهبر مجازی برای هر عامل، نه به صورت پیوسته بلکه در لحظات گسسته صورت می‌گیرد و ورودی کنترلی هر عامل بر اساس اطلاعات اندازه‌گیری شده در هر لحظه محاسبه می‌شود و مقدار آن در فاصله بین دو اندازه‌گیری ثابت است. مطالعه الگوریتم حرکت گروهی با اندازه‌گیری اطلاعات تحت این چارچوب را الگوریتم‌های با داده‌های نمونه‌برداری شده می‌نامند. علی‌رغم اینکه در سایر حوزه‌های کنترل جمعی کار بسیاری بر روی الگوریتم‌های با داده‌ای نمونه‌برداری شده از سال ۲۰۰۹ صورت گرفته‌است [۱۶-۱۹]، شاید در حوزه حرکت گروهی کارهای اندکی انجام شده‌است [۲۰-۲۱]. شاید بتوان گفت یکی از علت‌های این امر غیرخطی بودن پروتکل حرکت گروهی به خاطر وجود تابع پتانسیلی برای ایجاد جاذبه و دافعه بین

عامل‌ها است. وجود این جمله غیرخطی باعث شده است که روش‌های حل مسئله با سایر حوزه‌های کنترل جمعی متفاوت باشد. به طوری که در این حوزه عموماً از روش دوم لیاپانوف و از تعریف یک تابع انرژی که شرایط پایداری لیاپانوف را برآورده می‌کند برای تحلیل و اثبات نتایج استفاده می‌کنند که این تابع می‌تواند از روابط فیزیکی مربوط به انرژی جنبشی و پتانسیل عامل‌ها حاصل شده باشد. اما از آنجاکه اکثر توابع لیاپانوفی که در حوزه زمان-پیوسته شرایط لیاپانوف را برآورده می‌سازند در حوزه زمان گسسته قادر به برآورده کردن شرایط نیستند یا کاندیدهای مناسبی نیستند، برای تحلیل نتایج الگوریتم‌های حرکت گروهی با داده‌های نمونه‌برداری شده نیاز به تعریف یک تابع انرژی جدید است. همچنین اگرچه وجود تابع پتانسیل باعث پیچیده‌تر شدن تحلیل‌ها در حوزه حرکت گروهی شده‌است اما حضور این تابع پتانسیل کنار هم ماندن عامل‌ها و عدم برخورد آن‌ها را حفظ می‌کند. از طرفی چون در یک مسئله حرکت گروهی با داده‌های نمونه‌برداری شده، در فاصله بین دو نمونه‌برداری، عامل‌ها حلقه‌باز هستند به خاطر سرعت و شتابی که دارند می‌توانند از هم سایگی هم خارج شوند یا باهم تصادم داشته باشند لذا در اینجا استفاده از یک تابع پتانسیل نامحدود به تنهایی نمی‌تواند بهم‌پیوستگی شبکه هم‌سایگی را تضمین کند و باید شرط دیگری افزون بر شرط‌های همگرایی، به دست آوریم تا بتوانیم تحت آن شرط، بهم‌پیوستگی شبکه هم‌سایگی را نیز در طول تحول حرکت گروهی، حفظ کنیم.

از سوی دیگر، در بسیاری از کاربردهای مهندسی سیستم‌های چندعاملی، کنترل سیستم از طریق شبکه‌های ارتباطی صورت می‌گیرد که این داده‌های ارسالی بین عوامل به دلیل وجود پیوندهای شبکه‌باز بین حسگرها، کنترل‌کننده‌ها و محرک‌ها می‌تواند به راحتی توسط حملات سایبری دشمنان مورد سوءاستفاده قرار گیرد [۲۲-۲۵]. هر حمله می‌تواند بخشی از لینک‌های ارتباطی موجود بین عوامل همسایه را از بین ببرد یا اطلاعات اشتباه ارسال کند و مانع از همگرایی سیستم چندعاملی به اهداف خود گردد. مسئله کنترل جمعی سیستم‌های چندعاملی تحت حمله‌های سایبری موضوع بسیار جدیدی است که کار بر روی آن در سایر شاخه‌های کنترل جمعی نیز به تازگی شروع شده‌است [۲۲-۲۳]. در این کارها، نویسندگان مسئله حمله‌های سایبری در کنترل جمعی سیستم‌های چندعاملی را برای حمله‌های موفق ولی جبران‌پذیر بررسی کرده‌اند. اگر حمله سایبری بتواند بهم‌پیوستگی شبکه ارتباطی را از بین ببرد و شبکه را به صورت گروه‌های منفک درآورد به آن حمله موفق گفته می‌شود و اگر یک شبکه ارتباطی بتواند بعد از یک حمله موفق، بهم‌پیوستگی اولیه خود را بعد از مدتی بازیابد به آن حمله جبران‌پذیر گفته می‌شود. از آنجا که در الگوریتم‌های حرکت گروهی نیز بعد از حمله موفق، بخشی از لینک‌های ارتباطی موجود بین عوامل همسایه می‌تواند از بین برود و به تبع، باعث از بین رفتن

ترم اجماع سرعت که به صورت یک نیروی میراکننده عمل می‌کند و هم‌تراز کننده سرعت بین عامل‌ها است و جمله سوم شامل فیدبکی از اطلاعات رهبر مجازی است که تنها عامل‌های آگاه شامل این جمله می‌باشند.

در این مقاله از تابع پتانسیل معرفی شده در [۶] در ورودی کنترلی استفاده می‌شود:

$$V(\|q_{ij}\|) = \begin{cases} +\infty & \|q_{ij}\| = 0 \\ \frac{r}{\|q_{ij}\|(r-\|q_{ij}\|)} & \|q_{ij}\| \in (0, r) \\ +\infty & \|q_{ij}\| = r \end{cases} \quad (۳)$$

که $q_{ij} = q_i - q_j$ مکان نسبی عامل‌های i ام و j ام می‌باشد. تابع پتانسیل تعریف شده وقتی فاصله عامل‌ها به مرز شعاع همسایگی r و نزدیک می‌شود مقدار تابع به بی‌نهایت می‌رود. همین ویژگی تضمین کننده حفظ پیوندهای موجود و عدم برخورد عامل‌ها است.

همچنین دینامیک رهبر مجازی به صورت یک دو انتگرال گیر است که فرم زمان گسسته آن به صورت زیر است.

$$\begin{cases} q_v(k+1) = q_v(k) + T p_v(k) + \frac{1}{2} T^2 u_v(k) \\ p_v(k+1) = p_v(k) + T u_v(k) \end{cases} \quad (۴)$$

که در آن k اندیس زمان گسسته است و $q_v(k), p_v(k)$ به ترتیب مکان و سرعت رهبر مجازی در لحظه $t = kT$ را نشان می‌دهد. $u_v(k)$ بردار شتاب رهبر مجازی است که فرض می‌شود بصورت $u_v(k) = f(p_v(k))$ که $f: R^n \rightarrow R^n$ یک تابع Lipschitz است.

فرض ۱: رهبر مجازی دارای شتابی به صورت تابع Lipschitz با ثابت γ می‌باشد که

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \delta \|x_1 - x_2\|.$$

اگر بردار خطا موقعیت و سرعت هر عامل را $\tilde{q}_i = q_i - q_r$ و $\tilde{p}_i = p_i - p_r$ تعریف کنیم در این صورت، دینامیک خطا عامل‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \tilde{q}_i(k+1) = \tilde{q}_i(k) + T \tilde{p}_i(k) + \frac{1}{2} T^2 \tilde{u}_i(k) \\ \tilde{p}_i(k+1) = \tilde{p}_i(k) + T \tilde{u}_i(k) \end{cases}, i = 1, 2, \dots, N \quad (۵)$$

که $\tilde{u}_i(k) = u_i(k) - f(p_r(k))$ است و $u_i(k)$ ورودی کنترلی هر عامل است که بعداً معرفی می‌شود.

حال یک متغیر کمکی به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\bar{p}_i(k) = \frac{1}{2} (\tilde{p}_i(k) + \tilde{p}_i(k+1)) = \tilde{p}_i(k) + \frac{1}{2} T u_i(k) \quad (۶)$$

با استفاده از رابطه بالا می‌توان دینامیک خطا عامل‌ها را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} \tilde{q}_i(k+1) = \tilde{q}_i(k) + T \bar{p}_i(k) \\ \tilde{p}_i(k+1) = \tilde{p}_i(k) + T u_i(k) \end{cases}, i = 1, 2, \dots, N \quad (۷)$$

حال فرض کنید هر عامل دارای شعاع ارتباطی محدود r باشد و ثابت‌های مثبت $\varepsilon < r$ و $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$ را در نظر بگیرید. همچنین گراف بدون جهت $G(k) = (V, \mathcal{E}(k))$ را با مجموعه رأس‌های $V = \{1, 2, \dots, N\}$ که نماینده هر یک از عامل‌ها است و یال‌های $\mathcal{E}(k) = \{(i, j) | i, j \in V\}$ در نظر بگیرید که $\mathcal{E}(k)$ ارتباط بین عامل‌ها را در لحظه $t = kT$ نشان می‌دهد و به صورت زیر تعریف می‌شود.

به هم پیوستگی شبکه عامل‌ها و یا برخوردشان به هم و در نهایت عدم همگرایی عامل‌ها به رهبر مجازی شود، ازین‌رو، پرداختن به الگوریتم‌های حرکت گروهی که بتواند بعد از حمله موفق شبکه را بازیابی و آن را برای برآورده ساختن مجدد اهداف گروه جبران کند، بسیار اهمیت می‌یابد.

در این تحقیق ابتدا یک الگوریتم کنترلی جدید برای حرکت گروهی سیستم‌های چندعاملی با داده‌های نمونه‌شده برای همگرایی عامل‌ها به سمت یک رهبر مجازی با شتاب کنترلی با تابع از نوع لپشیتز طراحی می‌شود سپس این الگوریتم برای استفاده در برابر حمله‌های موفق ولی جبران پذیر تصحیح می‌شود.

شایان ذکر است که مقاله [۲۰] به حرکت گروهی با داده‌های نمونه‌شده برای حرکت‌های گروهی با رهبر مجازی با شتاب محدود پرداخته است که در واقع فرم گسسته الگوریتم سو می‌باشد. اما الگوریتم ارائه شده در این مقاله با الگوریتم مقاله [۲۰]، کاملاً متفاوت و الگوریتم جدیدی برای حرکت گروهی سیستم‌های چندعاملی با داده‌های نمونه‌شده است. ضمن اینکه در این مقاله مسأله حملات سایبری - که پرداختن به آن‌ها به خاطر ماهیت اهداف حرکت گروهی مانند حفظ به هم پیوستگی شبکه و عدم برخورد، اهمیت زیادی دارد - مورد توجه قرار گرفته است و نخستین کار در زمینه حملات سایبری در حرکت‌های گروهی می‌باشد.

۲. مقدمات ریاضی

یک گروه با N عامل را در نظر بگیرید که در محیطی n بعدی در حال حرکت اند. معادله حرکت عامل‌ها با یک دینامیک دو-انتگرال گیر به صورت زیر توصیف می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i \\ \dot{p}_i = u_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (۱)$$

که در آن $p_i \in \mathbb{R}^n$ بردار سرعت عامل‌ها، $q_i \in \mathbb{R}^n$ بردار مکان عامل‌ها و $u_i \in \mathbb{R}^n$ ورودی کنترلی جمعی است که به هر عامل اعمال می‌شود. فرض کنید که اندازه‌گیری‌ها در فواصل منظم T صورت می‌گیرد و k اندیس زمان گسسته می‌باشد در این صورت فرم گسسته شده رابطه (۱) با یک نگهدارنده مرتبه صفر به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} q_i(k+1) = q_i(k) + T p_i(k) + \frac{1}{2} T^2 u_i(k) \\ p_i(k+1) = p_i(k) + T u_i(k) \end{cases}, i = 1, 2, \dots, N \quad (۲)$$

که در آن k اندیس زمان گسسته بوده و $q_i(k), p_i(k)$ و $u_i(k)$ به ترتیب مکان، سرعت و ورودی کنترلی عامل i ام را در لحظه $t = kT$ نشان می‌دهد.

ورودی کنترلی در حرکت‌های گروهی باید طوری طراحی شود که اهداف حرکت گروهی شامل حفظ پیوندهای موجود، عدم برخورد و همگرایی سرعتی عوامل به رهبر مجازی را برآورده سازد. ازین‌رو، ورودی کنترلی عوامل عموماً شامل یک جمله گرادینانی از یک تابع پتانسیل است که بر اساس فاصله نسبی عامل‌ها تعریف می‌شود و برای جلوگیری از عدم برخورد عامل‌ها و در کنار هم ماندن آن‌ها می‌باشد، جمله دوم

۱- یال‌های اولیه به صورت $\mathcal{E}(0) = \{(i, j) \mid \varepsilon_0 \leq \|q_i(0) - q_j(0)\| < r, i, j \in \mathcal{V}\}$ انتخاب شده‌اند.

۲- اگر $(i, j) \notin \mathcal{E}(k-1)$ و $\|q_i(k) - q_j(k)\| < r - \varepsilon$ باشد آنگاه جفت (i, j) یال جدیدی است که به $\mathcal{E}(k)$ افزوده شده‌است.

۳- اگر $r \geq \|q_i(k) - q_j(k)\|$ باشد، آنگاه جفت (i, j) متعلق به $\mathcal{E}(k)$ نخواهد بود.

فرآیند هیستریزس موجود در تعریف شبکه همسایگی، در ایجاد یال‌های جدید نقش مهمی دارد.

همچنین، فضای همسایگی عامل i ام $N_i(t)$ شامل آن دسته عامل‌هایی می‌شود که در همسایگی عامل i ام قرار دارند و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N_i(t) = \{j \in \mathcal{V} : (i, j) \in \mathcal{E}(t)\}$$

$\mathcal{A}(k)$ ماتریس مجاورت گراف $G(k)$ است که اگر در لحظه $t = kT$ یالی بین رأس‌های i ام و j ام وجود داشته باشد آنگاه $a_{ij}(k) = 1$ و در غیر این صورت $a_{ij}(k) = 0$ خواهد بود. ضمناً $L(k)$ نیز ماتریس لاپلاسیان گراف $G(k)$ می‌باشد. ماتریس لاپلاسیان $L(k) = [l_{ij}]_{N \times N}$ گراف $G(t)$ ، به صورت $L(t) = \Delta(\mathcal{A}(t)) - \Delta(\mathcal{A}(t))$ تعریف می‌شود که $\Delta(\mathcal{A}(t))$ ماتریسی قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر با مجموع درایه‌های سطر متناظر از ماتریس مجاورت می‌باشد و بر همین اساس $l_{ii}(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}(t)$ و $l_{ij}(t) = -a_{ij}(t)$ می‌باشد. مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان شرایط زیر را برآورده می‌کنند $0 = \lambda_1(L) \leq \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_N(L)$ که $\lambda_2(L) > 0$ است اگر و تنها اگر گراف $G(t)$ هم‌بند (به هم پیوسته) باشد [۵].

فرض ۲: یک سیستم چندعاملی با N عامل را در نظر بگیرید که n_i تای آن‌ها عامل آگاه هستند. فرض کنید که شبکه اولیه عامل‌ها $G(0)$ ، به صورت یک مجموعه از n_g زیرگراف $G_1(0), G_2(0), \dots, G_{n_g}(0)$ و $n_g \leq n_i$ است به طوری که هر زیرگراف هم‌بند است و حداقل یک عامل آگاه در آن وجود دارد.

در ادامه تعریف و لم‌های زیر را که در استخراج نتایج مورد استفاده قرار می‌گیرد را در نظر بگیرید.

تعریف ۱ [۲۰]: فرض کنید $B(x)$ یک تابع اسکالر مشتق پذیر که $x \in R^n$ است. $\bar{\nabla} B(x(k+1), x(k))$ را گرادیان گسسته $B(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود می‌نامند:

$$\bar{\nabla} B(x(k+1), x(k)) = \frac{B(x(k+1)) - B(x(k))}{x(k+1) - x(k)}$$

$$\bar{\nabla} B^T(x(k+1), x(k)) = \nabla B(x(k)) + \frac{1}{2} B_{hess}(k)(x(k+1) - x(k))$$

که $\nabla B(x(k))$ و $B_{hess}(k)$ گرادیان و هسین B در $t = kT$ است.

تعریف ۲: گراف بدون جهت $G(t)$ را هم‌بند نامند اگر و تنها اگر همواره مسیری بین هر دو رأس متمایز i و j وجود داشته باشد.

لم ۱ [۶]: گراف بدون جهت هم‌بند $G(t)$ و نیز ماتریس $E = \text{diag}(e_1, e_2, \dots, e_N)$ که یک ماتریس نیمه‌معین مثبت است را در نظر بگیرید، آنگاه ماتریس $L + E$ معین مثبت خواهد بود. L ماتریس لاپلاسیان گراف $G(t)$ است.

لم ۲: گراف شبکه $G(k)$ را که به صورت یک مجموعه از n_g زیرگراف $G_1(k), G_2(k), \dots, G_{n_g}(k)$ و $n_g \leq n_i$ است را در نظر بگیرید که ماتریس‌های $L(k)$ و $L_1(k), L_2(k), \dots, L_{n_g}(k)$ لاپلاسیان گراف $G(k)$ و زیرگراف‌های آن هستند. همچنین ماتریس $H = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_{n_g})$ که $H_j, j = 1, \dots, n_g$ یک ماتریس قطری غیرصفر با اعضای صفر و یک می‌باشد. در این صورت ماتریس $L(k) + cH$ یک ماتریس معین مثبت است که در آن c یک ثابت مثبت است.

اثبات: چون داخل زیرگراف‌ها گره مشترکی وجود ندارد ازین‌رو، ماتریس لاپلاسیان گراف به صورت زیر یک ماتریس قطری بلوکی $L(k) = \text{diag}(L_1(k), \dots, L_{n_g}(k))$ قابل‌بازنویسی است. سپس بر اساس لم ۲-۴ و تعریف زیر ماتریس‌های $H_j, j = 1, \dots, n_g$ نتیجه می‌شود ماتریس‌های $L_1(k) + cH_1, \dots, L_{n_g}(k) + cH_{n_g}$ معین هستند بنابراین $L(k) + cH = \text{diag}(L_1(k) + cH_1, \dots, L_{n_g}(k) + cH_{n_g})$ یک ماتریس مثبت معین است.

۳. نتایج اصلی

در این بخش، ابتدا یک پروتکل کنترلی جدید برای حرکت گروهی سیستم‌های چندعاملی با داده‌های نمونه‌شده برای همگرایی به رهبر مجازی با سرعت متغیر ارائه می‌کنیم. برای این کار ابتدا، ما یک تابع انرژی جدید تعریف می‌کنیم و شرایط پایداری مجانبی لیاپانوف را برآورده می‌کنیم. سپس با استفاده از کران بالای تابع انرژی، یک کران بالا برای پیرو نمونه‌برداری داده‌ها پیدایمی‌کنیم تا همگرایی سرعتی همه عوامل به سرعت رهبر مجازی و نیز به هم پیوستگی شبکه عامل‌ها و عدم برخورد آن‌ها تضمین شود.

ما پروتکل کنترلی عامل‌ها را $u_i(k), i = 1, \dots, N$ به صورت ترکیبی از دو قسمت $u_i(k) = u_{c_i}(k) + f(p_i(k))$ در نظر می‌گیریم که

$$u_{c_i}(k) = -\sum_{j \in N_i(k)} \bar{\nabla} V_{\bar{q}_i}(\bar{q}_{ij}(k+1), \bar{q}_{ij}(k)) - 1.5 \sum_{j \in N_i(k)} a_{ij}(\bar{p}_i(k) - \bar{p}_j(k)) + 0.5 \sum_{j \in N_i(k-1)} a_{ij}(\bar{p}_i(k-1) - \bar{p}_j(k-1)) \quad (۸)$$

$-h_i(c_1 \bar{q}_i(k) + 1.5c_2 \bar{p}_i(k) - 0.5c_2 \bar{p}_i(k-1))$ که در آن ضرایب ثابت $c_1 > 0$ و $c_2 > 0$ هستند. $N_i(t)$ فضای همسایگی عامل i ام را نشان می‌دهد که شامل آن دسته عامل‌هایی می‌شود که در همسایگی عامل i ام قرار دارند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_i(t) = \{j \in \mathcal{V} : (i, j) \in \mathcal{E}(t)\} \quad (۹)$$

و $V(\|q_{ij}\|)$ گرادیان گسسته تابع پتانسیل $\bar{\nabla} V_{\bar{q}_i}(q_{ij}(k+1), q_{ij}(k))$ می‌باشد.

حال قضیه زیر را در نظر بگیرید.

از آنجا که $\tilde{p}_i(t)$ یک تابع مشتق پذیر و هموار است و زمان

نمونه‌برداری T نیز کوچک است، می‌توان فرض کرد که $\tilde{p}_i(kT) \cong \tilde{p}_i((k-1)T)$ و سپس با استفاده از رابطه موجود برای تقریب مشتق می‌توان نوشت $\dot{\tilde{p}}_i(t) \cong \frac{1}{T}(\tilde{p}_i(t+T) - \tilde{p}_i(t))$ یا در واقع $\frac{\tilde{p}_i(k+1) - \tilde{p}_i(k)}{T} \cong \frac{\tilde{p}_i(k) - \tilde{p}_i(k-1)}{T}$ از رابطه اخیر نیز می‌توان به رابطه زیر رسید

$$\tilde{p}_i(k) = \frac{\tilde{p}_i(k+1) + \tilde{p}_i(k)}{2} \cong 0.5(3\tilde{p}_i(k) - \tilde{p}_i(k-1)) \quad (14)$$

حال با جای‌گزینی رابطه بالا در (۱۳) می‌توان به دست آورد

$$\begin{aligned} &+T \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i(k)^T (-1.5 \sum_{j \in N_i(k)} a_{ij} (\tilde{p}_i(k) - \tilde{p}_j(k)) \\ &\quad - 0.5 \sum_{j \in N_i(k-1)} a_{ij} (\tilde{p}_i(k-1) - \tilde{p}_j(k-1))) \\ &- h_i (1.5c_2 \tilde{p}_i(k) - 0.5c_2 \tilde{p}_i(k-1)) \\ &= T \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i(k)^T (-\sum_{j \in N_i(k)} a_{ij} (\tilde{p}_i(k) - \tilde{p}_j(k)) - h_i c_2 \tilde{p}_i(k)) \end{aligned} \quad (15)$$

از آنجا که گراف $G(k)$ در هر فاصله $[k_{l-1}, k_l]$ ثابت است ازین رو فضای همسایگی $N_i(k) = N_i(k-1) = N_i(k_{l-1})$ همچنین به صورت زیر است

$$E_4(k) = \frac{T\delta}{8} \sum_{i=1}^N (\tilde{p}_i(k)^T \tilde{p}_i(k) - \tilde{p}_i(k-1)^T \tilde{p}_i(k-1)) \quad (16)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} Q(k+1) - Q(k) &\leq 0.5T^2 c_1 \sum_{i=1}^N h_i \tilde{p}_i(k)^T \tilde{p}_i(k) \\ &- T \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i(k)^T (\sum_{j \in N_i(k)} a_{ij} (\tilde{p}_i(k) - \tilde{p}_j(k)) + h_i c_2 \tilde{p}_i(k)) \\ &+ 0.125T\delta \sum_{i=1}^N (\tilde{p}_i(k)^T \tilde{p}_i(k) - \tilde{p}_i(k-1)^T \tilde{p}_i(k-1)) \\ &+ 0.5T \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i(k)^T (f(p_i(k)) - f(p_\gamma(k))) \end{aligned} \quad (17)$$

که با استفاده از $\sum_{i=1}^N \tilde{p}_i(k)^T \tilde{p}_i(k) = \tilde{p}(k)^T \tilde{p}(k)$ می‌توان رسید به

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{p}_i(k)^T (\sum_{j \in N_i(k)} a_{ij} (\tilde{p}_i(k) - \tilde{p}_j(k))) &= \\ \tilde{p}(k)^T & \quad \text{که} \quad \tilde{p}(k)^T (L(k) \otimes I_n) \tilde{p}(k) \\ [\tilde{p}_1^T(k), \tilde{p}_2^T(k), \dots, \tilde{p}_N^T(k)]^T & \quad \text{نیز از فرض (۱) به دست می‌آوریم} \\ \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i(k)^T (f(p_i(k)) - f(p_\gamma(k))) &\leq \\ \tilde{p}(k)^T & \quad \text{بنابراین} \quad \tilde{p}(k) = [\tilde{p}_1^T(k), \dots, \tilde{p}_N^T(k)]^T \quad \text{که} \quad \delta \|\tilde{p}(k)\| \|\tilde{p}(k)\| \end{aligned}$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} Q(k+1) - Q(k) &\leq 0.5T\delta \|\tilde{p}(k)\| \|\tilde{p}(k)\| \\ &- T\tilde{p}(k)^T ((L(k_{l-1}) + (c_2 - 0.5Tc_1)H) \otimes I_n) \tilde{p}(k) \end{aligned} \quad (18)$$

که با استفاده از رابطه (۱۴) که $\tilde{p}_i(k) = 3\tilde{p}_i(k) - 2\tilde{p}_i(k-1)$ و $\tilde{p}_i(k-1) = 3\tilde{p}_i(k) - 2\tilde{p}_i(k)$ داریم

$$\begin{aligned} Q(k+1) - Q(k) &\leq \\ &- T\tilde{p}(k)^T ((L(k_{l-1}) + (c_2 - 0.5Tc_1)H - \frac{\delta}{2}I_n) \otimes I_n) \tilde{p}(k) \end{aligned} \quad (19)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} Q(k+1) - Q(k) &\leq \\ &- T\tilde{p}(k)^T ((L(k_{l-1}) + (c_2 - 0.5Tc_1)H - \frac{\delta}{2}I_n) \otimes I_n) \tilde{p}(k) \end{aligned} \quad (20)$$

قضیه ۱: یک گروه با N عامل را در نظر بگیرید که دینامیک آن‌ها به صورت رابطه (۲) و (۴) و پرتکل کنترلی آن‌ها به صورت رابطه (۸) است. فرض کنید که شبکه اولیه عامل‌ها به صورت فرض (۲) است و انرژی اولیه گروه نیز محدود است. فرض کنید گراف هم‌سایگی عامل‌ها در لحظات k_l ($l = 1, 2, \dots$) سوئیچ می‌کند و در فاصله بین $[k_{l-1}, k_l]$ ثابت است. در این صورت اگر پیوند نمونه‌برداری داده‌ها شرایط $T \leq T_{\min l}$ را برآورده کند، که $T_{\min l}$ بعداً معرفی خواهد شد، آنگاه خواهیم داشت.

۱- زیرگراف‌های شبکه عامل‌ها برای تمامی $0 \leq k$ به هم پیوسته می‌ماند.

۲- سرعت تمامی عامل‌ها به صورت مجانبی به سرعت رهبر مجازی، p_γ همگرا خواهد شد.

۳- عدم برخورد بین عامل‌ها برای تمامی $0 \leq k$ تضمین می‌شود.

اثبات: تابع انرژی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} Q(k) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N V(\|\tilde{q}_{ij}(k)\|) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N h_i c_1 \tilde{q}_i(k)^T \tilde{q}_i(k) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i(k)^T \tilde{p}_i(k) + \frac{T\delta}{2 \cdot 4} \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i(k-1)^T \tilde{p}_i(k-1) \end{aligned} \quad (10)$$

همان‌طور که می‌بینید $Q(k)$ یک تابع مثبت است. فرض کنید که در لحظات k_l ($l = 1, 2, \dots$) سوئیچ می‌کند و در فاصله بین دو سوئیچ، $[k_{l-1}, k_l]$ ثابت است در نتیجه ماتریس لاپلاسین آن نیز ثابت است. در این صورت معادله تفاضلی $Q(k)$ در بازه $[0, k_1]$ به صورت زیر خواهد بود.

$$Q(k+1) - Q(k) = E_1(k) + E_2(k) + E_3(k) + E_4(k) \quad (11)$$

که $E_j(k)$, $j = 1, \dots$ در زیر تعریف شده‌اند. با استفاده از تعریف (۱) و زوج بودن تابع پتانسیل و ماتریس مجاورت، نسبت به فاصله نسبی

عامل‌ها، q_{ij} ، و نیز رابطه‌های (۷) و (۸) می‌توان به روابط زیر رسید

$$\begin{aligned} E_1(k) &= 0.5 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N (V(\|\tilde{q}_{ij}(k+1)\|) - V(\|\tilde{q}_{ij}(k)\|)) \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \bar{\nabla} V_{\tilde{q}_i}(\|\tilde{q}_{ij}(k+1)\|, \|\tilde{q}_{ij}(k)\|) (\tilde{q}_i(k+1) - \tilde{q}_i(k)) &= \\ = T \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i(k)^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \bar{\nabla} V_{\tilde{q}_i}(\|\tilde{q}_{ij}(k+1)\|, \|\tilde{q}_{ij}(k)\|) & \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} E_2(k) &= 0.5 \sum_{i=1}^N h_i c_1 (\tilde{q}_i(k+1)^T \tilde{q}_i(k+1) - \tilde{q}_i(k)^T \tilde{q}_i(k)) \\ &= 0.5c_1 \sum_{i=1}^N h_i (\tilde{q}_i(k+1) - \tilde{q}_i(k))^T (\tilde{q}_i(k+1) + \tilde{q}_i(k)) \\ &= 0.5Tc_1 \sum_{i=1}^N h_i \tilde{p}_i(k)^T (2\tilde{q}_i(k) + T\tilde{p}_i(k)) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E_3(k) &= 0.5 \sum_{i=1}^N (\tilde{p}_i(k+1)^T \tilde{p}_i(k+1) - \tilde{p}_i(k)^T \tilde{p}_i(k)) \\ &= \sum_{i=1}^N (\frac{\tilde{p}_i(k+1) + \tilde{p}_i(k)}{2})^T (\tilde{p}_i(k+1) - \tilde{p}_i(k)) \\ &= 0.5T \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i(k)^T (f(p_i(k)) - f(p_\gamma(k))) \\ &+ T \sum_{i=1}^N \tilde{p}_i(k)^T (-\sum_{j \in N_i(k)} \bar{\nabla} V_{\tilde{q}_i}(\|\tilde{q}_{ij}(k+1)\|, \|\tilde{q}_{ij}(k)\|) \\ &\quad - 1.5 \sum_{j \in N_i(k)} a_{ij} (\tilde{p}_i(k) - \tilde{p}_j(k)) \\ &\quad - 0.5 \sum_{j \in N_i(k-1)} a_{ij} (\tilde{p}_i(k-1) - \tilde{p}_j(k-1)) \\ &- h_i (c_1 \tilde{q}_i(k) + 1.5c_2 \tilde{p}_i(k) - 0.5c_2 \tilde{p}_i(k-1)) \end{aligned} \quad (13)$$

بدون ازدست‌دادن کلیت فرض کنید که $k_0 = 0$ است. همان‌طور که ذکر شد گراف همسایگی عامل‌ها براساس فرض (۲) از زیرگراف هم‌بند تشکیل شده است که در فاصله $[0, k_1]$ ثابت هستند. با تقسیم ماتریس H به صورت $H = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_{n_g})$ و اینکه در هر زیرگراف یک عامل آگاه وجود دارد بر اساس لم (۲) می‌توان نتیجه گرفت ماتریس $L(0) + (c_2 - 0.5Tc_1)H - \frac{\delta}{2}I_N$ برای $T \leq 2c_2/c_1$ یک ماتریس معین مثبت است. در نتیجه برای $\lambda_1(L(0) + (c_2 - 0.5Tc_1)H) \geq \frac{\delta}{2}$ ، $Q(k+1) - Q(k) \leq 0$ است که چون انرژی اولیه عامل‌ها $Q(0)$ محدود است بنابراین $Q(k) \leq Q_0 < \infty$ در بازه $[0, k_1 - 1]$ خواهد بود. باتوجه به محدود ماندن تابع انرژی در این بازه و نیز براساس تعریف تابع پتانسیل $\lim_{\|q_{ij}(k)\| \rightarrow r} V(\|q_{ij}(k)\|) \rightarrow \infty$ ، هیچکدام از پیوندهای موجود در فاصله $[0, k_1 - 1]$ به سمت r میل نخواهند کرد. بنابراین اگر مقدار T از حداقل مقداری که لازم است تا حداقل به جفت از پیوندها در فاصله بین زمان نمونه‌برداری $k_1 - 1$ تا k_1 از بین رود و $\tilde{T}_{\min l}$ نیز کوچکتر باشد آنگاه هیچ پیوندی در لحظه k_1 از بین نمی‌رود و سوییچ کردن گراف شبکه در نتیجه افزوده شدن پیوندهای جدید در k_1 خواهد بود که تعداد این پیوندهای جدید حداکثر به تعداد یال‌های یک گراف کامل است. در نتیجه چون تعداد پیوندهای جدیدی که می‌تواند به گراف $G(k)$ در k_1 افزوده شود محدود است مقدار تابع انرژی نیز در k_1 ، $Q(k_1)$ محدود است. حال اگر مشابه تحلیل‌های بالا را برای هر فاصله $[k_{l-1}, k_l]$ ، به کار ببریم می‌توان نتیجه گرفت که اگر مقدار T از حداقل مقداری که لازم است تا حداقل به جفت از پیوندها در فاصله بین زمان نمونه‌برداری $k_l - 1$ تا k_l از بین رود نیز کوچکتر باشد هیچکدام از پیوندهای موجود به سمت r نمی‌روند و سوییچ کردن گراف همسایگی عامل‌ها در k_l به‌خاطر افزوده شدن پیوندهای جدید به شبکه همسایگی عامل‌ها است. بنابراین از چون $G(0)$ به هم‌پیوسته است و هیچ پیوندی از $\mathcal{E}(k)$ کاسته نمی‌شود، در نتیجه برای $G(k)$ همه $k > 0$ به هم‌پیوسته خواهد ماند.

اگر فرض کنیم در سوییچ k_l ام تعداد m_{k_l} تا پیوند جدید به شبکه همسایگی افزوده شده باشد، همان‌طور که ذکر شد حداکثر تعداد این پیوندها به تعداد یال‌های یک گراف کامل است یعنی $1 \leq m_{k_l} \leq M$ ، که $M = 0.5(N-1)(N-2)$ است. در نتیجه مقدار $Q(k_l)$ در هر سوییچ $Q(k_l) \leq Q(0) + m_{k_l}V(r - \varepsilon) \leq Q_{\max}$ که $Q_{\max} = Q(0) + MV(r - \varepsilon) < \infty$ محدود می‌ماند. از طرفی چون حداکثر تعداد پیوندهایی که می‌تواند به گراف شبکه افزوده شود نیز محدود است در نتیجه حداکثر تعداد دفعات سوییچ کردن‌های گراف شبکه نیز محدود است، $k_l \leq M$ ، بنابراین شبکه همسایگی عامل‌ها بالآخره ثابت می‌شود و ادامه اثبات محدود به بازه (k_l, ∞) محدود می‌شود. بنابراین مجموعه

$$\Omega = \{[\tilde{q}^T \tilde{p}^T]^T \in \mathbb{R}^{2Nn} | Q(\tilde{q}, \tilde{p}) \leq Q_{\max}\} \quad (21)$$

که در آن $\tilde{q} = [\tilde{q}_1^T \dots \tilde{q}_N^T]^T$ ناوردای مثبت است.

حال فرض کنید که n_l عامل اول را عامل آگاه در نظر بگیریم از آنجا که $Q(k) \leq Q_{\max}$ است از (۱۰) و (۲۰) نتیجه می‌شود که برای $i = 1, 2, \dots, n_l$ $c_1 \tilde{q}_i^T \tilde{q}_i \leq 2Q_{\max}$ است. بنابراین فاصله عامل‌های آگاه از رهبر مجازی محدود می‌ماند و بیشتر از $\sqrt{2Q_{\max}/c_1}$ نخواهد بود. از طرفی چون شبکه همسایگی اولیه به هم‌پیوسته است و به هم‌پیوسته نیز می‌ماند، همواره حداقل یک مسیر بین هر عامل ناآگاه با یک عامل آگاه وجود خواهد داشت. بنابراین فاصله عامل‌های ناآگاه از رهبر مجازی نیز محدود می‌ماند. علاوه بر این از (۱۰) و (۲۰) نتیجه می‌شود که $\tilde{p}_i^T \tilde{p}_i \leq 2Q_{\max}$ است. بنابراین مجموعه Ω بسته و کراندار است و از قضیه لاسال نتیجه می‌شود که همه مسیرهایی که از داخل مجموعه Ω شروع شود به بزرگترین مجموعه ناوردا داخل ناحیه $S = \{[\tilde{q}^T \tilde{p}^T]^T \in \mathbb{R}^{2Nn} | \Delta Q(\tilde{q}, \tilde{p}) = 0\}$ همگرا می‌شود که $Q(\tilde{q}(k+1), \tilde{p}(k+1)) - Q(\tilde{q}(k), \tilde{p}(k)) = 0$ می‌توان فهمید که وقتی $Q(k+1) - Q(k) = 0$ می‌شود که اگر و تنها اگر برای $i = 1, 2, \dots, N$ $\tilde{p}_i(k) = 0$ شود. در نهایت از تعریف $\tilde{p}_i(k)$ می‌توان داشت $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \dots = \tilde{p}_N = 0$ که این بدین معنی است که سرعت همه عامل‌ها به‌طور مجانبی $p_1 = p_2 = \dots = p_N = p_T$ می‌شود.

از طرفی چون مقدار T از حداقل مقداری که لازم است تا حداقل به جفت از پیوندها در فاصله بین زمان نمونه‌برداری $k_l - 1$ تا k_l با هم برخورد داشته باشند از $\tilde{T}_{\min l}$ نیز کوچکتر است و نیز به‌خاطر محدود ماندن تابع انرژی در طول حرکت گروهی $Q(k) \leq Q_{\max}$ و $\lim_{\|q_{ij}\| \rightarrow 0} V(\|q_{ij}\|) \rightarrow \infty$ نتیجه می‌شود که عامل‌ها برای $k \geq 0$ نمی‌توانند برخوردی با هم داشته باشند. در واقع اگر مقدار زمان نمونه‌برداری $T \leq T_{\min l} = \min\{\tilde{T}_{\min l}, \tilde{T}_{\min l}\}$ در هر بازه $[k_{l-1}, k_l]$ باشد عدم برخورد عامل‌ها و به هم‌پیوستگی شبکه حفظ می‌شود.

با توجه به محدود بودن مقدار $Q(k_l)$ در هر فاصله $[k_{l-1}, k_l]$ می‌توان نتیجه گرفت در هر بازه مذکور فاصله پیوندها از یه مقدار حداکثری $d_{\max l}$ بیشتر و از یک مقدار حداقلی $d_{\min l}$ کمتر نیست. همچنین از (۱۰) و (۲۰) می‌توان به دست آورد که نرم خطای سرعت عامل‌ها $\|\tilde{p}_i(k)\|$ در نتیجه بیشترین سرعت نسبی بین عامل‌ها $p_{\max l}$ نیز محدود است که با استفاده از دو مطلب اخیر می‌توان یک کران بالا برای زمان نمونه‌برداری عامل‌ها که از بین نرفتن هیچ پیوندی و نیز عدم برخورد را تضمین کند برای هر بازه $[k_{l-1}, k_l]$ تعیین کرد. برای به دست آوردن $\tilde{T}_{\min l}$ و $\tilde{T}_{\max l}$ ابتدا باید $d_{\min l}$ و $d_{\max l}$ و بیشترین سرعت نسبی عامل‌ها $p_{\max l}$ را به دست آورد.

در هر فاصله $[k_{l-1}, k_l]$ در بدترین حالت یک پیوند در حال نزدیک شدن به شعاع همسایگی عامل‌ها یا صفر است و بقیه در فاصله مطلوب d که تابع پتانسیل در آنجا کمترین مقدار خود را دارد قرار دارند. بنابراین می‌توان داشت $2 \left((m_0 + m_{k_1} + \dots + m_{k_{l-1}} - 1)V(d) + V(\|q_{ij}(k)\|) \right), l = 1, 2, \dots$ از (۱۰) و (۲۰) نیز می‌توان داشت

برخورد اجتناب‌ناپذیر است. با استفاده از (۲) می‌توان برای عامل‌های i و ز به دست آورد

$$\begin{cases} q_{ij}(k+1) = q_{ij}(k) + Tp_{ij}(k) + 0.5T^2u_{ij}(k), \\ p_{ij}(k+1) = p_{ij}(k) + Tu_{ij}(k), \end{cases} \quad (27)$$

که اگر فاصله زمانی شروع حمله تا برخورد را دوباره با \hat{T}_{ij} مشخص کنید از آنجاکه در طول حمله ورودی کنترلی صفر است با جای‌گزینی $u_i(k) = 0$ برای $k \in (k_a, k_r)$ خواهیم داشت

$$\begin{cases} q_{ij}(k+1) = q_{ij}(k_a) + \hat{T}_{ij}p_{ij}(k_a), \\ p_{ij}(k+1) = p_{ij}(k_a), \end{cases} \quad (28)$$

از رابطه بالا مشهود است که سرعت هر عامل در طول حمله ثابت است. حال اگر بخواهیم \hat{T}_{ij} بیابیم با توجه به اینکه موقع برخورد $\|q_{ij}(k_a+1)\| = 0$ است ازین رو $\|q_{ij}(k+1)\| = 0$ در نتیجه $\|q_{ij}(k) + \hat{T}_{ij}p_{ij}(k)\| = 0$ است. بنابراین

$$\begin{aligned} & \text{اگر زمان تشخیص حمله } T_{det} \\ & T_{det} \leq \min \left\{ \frac{\|q_{ij}(k)\|}{\|p_{ij}(k)\|} \mid i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N, i \neq j, q_{ij}(k)^T p_{ij}(k) < 0 \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

باشد می‌دانیم در آن صورت برخوردی رخ نخواهد داد. قابل ذکر است اگر حمله در زمان گذار تحول گروهی رخ دهد چون سرعت نسبی عامل‌ها زیاد است T_{det} کوچک است و احتمال زیادی برای برخورد وجود دارد. اما در حالت ماندگار چون سرعت عامل‌ها به سرعت رهبر مجازی نزدیک می‌شود سرعت نسبی عامل‌ها صفر است T_{det} بزرگ است. ازین رو، احتمال اینکه برخوردی رخ دهد کم است. از طرفی حمله می‌تواند به هم‌پیوستگی پیوندهای موجود را بشکند و عامل‌های ناآگاه را از عامل‌های آگاه جدا کند. عامل ناآگاه جدا شده دیگر نمی‌تواند رهبر مجازی را دنبال کند و سرعت خود را به سرعت رهبر برساند.

بنابراین الگوریتم زیر جهت بازیابی شبکه پیشنهاد می‌شود:

۱- به هر زیرگراف که فاقد عامل آگاه است یک عامل آگاه تخصیص می‌دهیم.

۲- چون در طول حمله خطا سرعت عامل‌ها افزایش می‌یابد و توپولوژی نیز عوض می‌شود به احتمال زیاد مقدار تابع پتانسیل افزایش می‌یابد ازین رو، مقدار دوره تناوب نیز بر اساس تابع انرژی جدید باید دوباره محاسبه شود.

گرچه در طول حمله همگرایی عامل‌ها به رهبر مختل می‌شود اما چون حمله مدت طولانی طول نمی‌کشد بعد از مدتی بازیابی می‌شود بعد تشخیص حمله و شروع بازیابی می‌توان با ریبست کردن دوره تناوب و نیز اختصاص یک عامل آگاه به هر زیرگراف فاقد عامل آگاه هنوز به همه اهداف حرکت گروهی دست پیدا کرد.

توجه ۱: شایان ذکر است که گرچه در طول حمله همگرایی سرعتی عوامل مختل می‌شود اما چون مدت حمله طولانی نیست و به سرعت شناسایی می‌شود پس از شناسایی با تنظیم مجدد زمان نمونه‌برداری و مشخص کردن یک عامل آگاه برای هر زیرگرافی که فاقد عامل آگاه است همگرایی سرعتی دوباره تضمین می‌شود.

$$2((m_0 + m_{k_1} + \dots + m_{k_{l-1}} - 1)V(d) + V(\|q_{ij}(k)\|)) \leq 2Q(k_{l-1})$$

$$V(\|q_{ij}(k)\|) \leq (Q(k_{l-1}) - (m_0 + m_{k_1} + \dots + m_{k_{l-1}} - 1)V(d)) \quad (22)$$

که بر اساس تقارن تابع پتانسیل نسبت به فاصله مطلوب می‌توان نتیجه گرفت $d_{\min l} = r - d_{\max l} = V^{-1}(Q(k_{l-1}) - (m_0 + m_{k_1} + \dots + m_{k_{l-1}} - 1)V(d))$. همچنین $m_{k_{l-1}} - 1$ را می‌توان از شرایطی که همه پیوندها در فاصله مطلوب قرار می‌گیرند، حساب کرد. بنابراین می‌توان از رابطه تابع انرژی به دست آورد

$$\begin{aligned} & (\tilde{p}_i^T \tilde{p}_i + \tilde{p}_j^T \tilde{p}_j) \\ & + 2((m_0 + m_{k_1} + \dots + m_{k_{l-1}})V(d)) \leq 2Q(k_{l-1}) \end{aligned} \quad (23)$$

که از نامساوی $\|\tilde{p}_i - \tilde{p}_j\|^2 \leq 2(\tilde{p}_j^T \tilde{p}_j + \tilde{p}_i^T \tilde{p}_i)$ می‌توان داشت $\|\tilde{p}_{ij}\| \leq$

$$\sqrt{2(Q(k_{l-1}) - (m_0 + m_{k_1} + \dots + m_{k_{l-1}})V(d))} = p_{max} \quad (24)$$

و

$$\|\tilde{p}_{ij}(k)\| = 0.5\|\tilde{p}_{ij}(k+1) + \tilde{p}_{ij}(k)\| \leq 0.5(\|\tilde{p}_{ij}(k)\| + \|\tilde{p}_{ij}(k+1)\|) \leq p_{max l} \quad (25)$$

نهایتاً از (۷) داریم $\|q_{ij}(k+1)\| = \|q_{ij}(k) + T\tilde{p}_{ij}(k)\|$ که از نامساوی مثلثی می‌توان داشت

$$\|q_{ij}(k+1)\| \leq \|q_{ij}(k)\| + \|T\tilde{p}_{ij}(k)\|$$

تا حداقل یک جفت پیوند به شعاع همسایگی $\|q_{ij}(k+1)\| = r$ برسد $\tilde{T}_{\min l}$ خواهیم داشت $\tilde{T}_{\min l} \geq \left\{ \frac{r - \|q_{ij}(k)\|}{\|\tilde{p}_{ij}(k)\|} \right\} = \frac{r - d_{\max l}}{p_{max l}}$

همین سیاق می‌توان از نامساوی مثلثی برای به دست آوردن حداقل مدت زمانی که لازم است تا حداقل یک جفت عامل به هم برخورد کنند $\|q_{ij}(k+1)\| = 0$ یعنی $\tilde{T}_{\min l}$ به صورت زیر استفاده کرد

$$\tilde{T}_{\min l} \geq \left\{ \frac{\|q_{ij}(k)\|}{\|\tilde{p}_{ij}(k)\|} \right\} = \|q_{ij}(k)\| - \|T\tilde{p}_{ij}(k)\| \leq \|q_{ij}(k+1)\|$$

از آنجاکه به خاطر تقارن تابع پتانسیل $\frac{d_{\min l}}{p_{max l}} = \frac{r - d_{\max l}}{p_{max l}}$ است ازین رو، در یک حرکت گروهی اگر

$$T \leq T_{\min l} = \min\{\tilde{T}_{\min l}, \tilde{T}_{\min l}\} = \frac{d_{\min l}}{p_{max l}}$$

حفظ می‌شود و برخوردی رخ نمی‌دهد. بنابراین می‌توان $T_{\min l}$ از رابطه زیر به دست آورد

$$T_{\min l} = \frac{d_{\min l}}{\sqrt{2(Q(k_{l-1}) - (m_0 + m_{k_1} + \dots + m_{k_{l-1}})V(d))}} \quad (26)$$

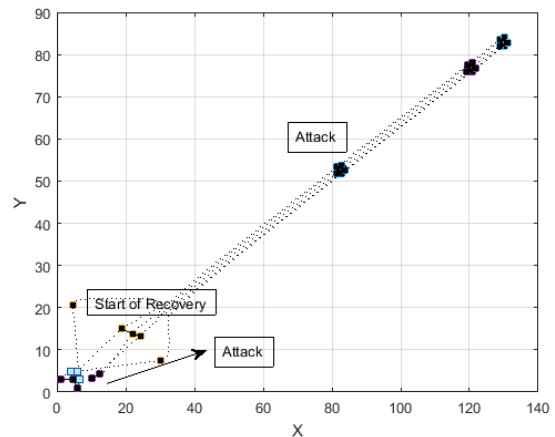
۴. حرکت گروهی تحت حمله سایبری

در سیستم‌های چندعاملی مانند پهپادها و تیم‌های روباتی، برخورد عامل‌ها می‌تواند به آن‌ها آسیب برساند. بنابراین، تشخیص حمله قبل از وقوع هرگونه برخورد حیاتی است. در حملات از نوع (DoS)، پارازیت شبکه‌های ارتباطی، منجر به صفر شدن ورودی کنترلی در طول حمله می‌شود [۲۲]. فاصله (k_a, k_r) را در نظر بگیرید که در آن حمله رخ می‌دهد، k_a مرحله بعد از شروع حملات و k_r مرحله بعد از شروع بازیابی است. برای هر جفت از عامل‌ها که $q_{ij}(k)^T p_{ij}(k) < 0$ است

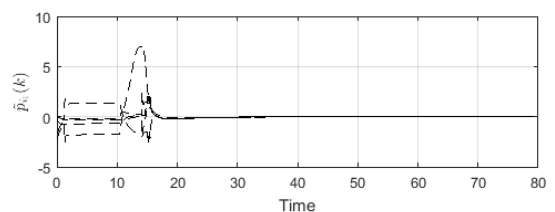
۵. شبیه سازی

در این بخش یک شبیه سازی عددی بر روی یک گروه چندعاملی با ۵ عامل انجام می شود. بدون ازد ست دادن کلیت، فرض بر این است که عوامل ۱ و ۴ مطلع هستند. موقعیت ها و سرعت های اولیه عامل ها به ترتیب در بازه $[0, 12] \times [0, 8]$ و $[0, 2] \times [0, 2]$ به طور تصادفی انتخاب می شوند. موقعیت و سرعت اولیه رهبر مجازی در بازه $q_T(0) = [5, 3]$ $p_T(0) = [2, 2]$ پارامتر های شبیه سازی به صورت $r = 5$, $\varepsilon_0 = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 2$ تنظیم شده اند. شتاب رهبر مجازی نیز به صورت $f_T(k) = [\cos(p_{T_1}), -p_{T_2} + 1]^T$.

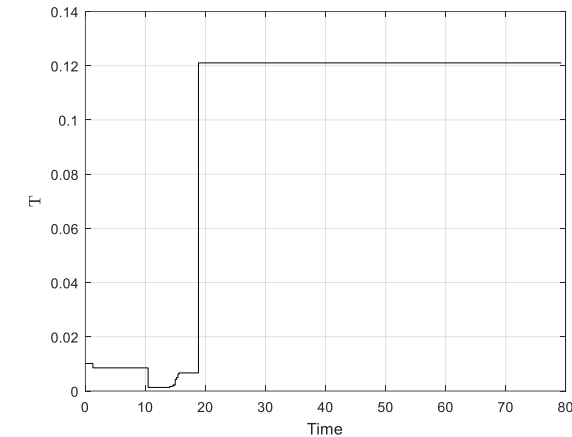
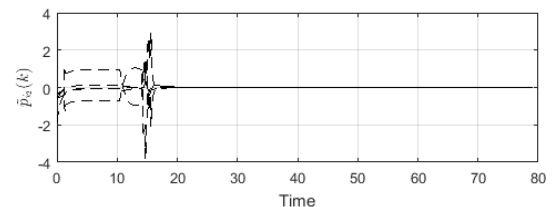
شکل (۱) مسیر حرکت عوامل و پیکربندی آن ها را در زمان اولیه و حالت ماندگار نشان می دهد. شبکه اولیه شامل دو زیر گراف است. حملات در $t=1.47$ اتفاق می افتد و بازیابی از $t=10.44$ شروع می شود. همان طور که مشاهده می شود، شبکه عوامل تحت حمله تکه تکه و عوامل دوم و سوم که ناآگاه هستند از بقیه جدا شده اند.



شکل ۱: مسیر عوامل و پیکربندی آن ها



شکل ۲: سرعت عوامل و رهبر مجازی



شکل ۳: مقدار دوره نمونه برداری داده ها در طول تحول حرکت گروهی برای بازیابی باید این عوامل به اطلاعات رهبر مجازی دسترسی داشته باشد. زمان نمونه برداری بر اساس شرایط جدید تعیین می شود. همان طور که مشاهده می شود، زیرگراف ها به تدریج به یکدیگر متصل شده و در نهایت یک گراف واحد را تشکیل می دهند. شکل ۲ سرعت عامل ها و رهبر مجازی را نشان می دهد. همان طور که نشان داده شد، در نهایت، سرعت همه عوامل به طور مجانبی به سرعت رهبر مجازی نزدیک می شود در حالی که به هم پیوستگی شبکه عامل ها و اجتناب از برخورد تضمین می شود. علاوه بر این، شکل ۳ مقدار زمان نمونه برداری T را در طول تحول حرکت گروهی نشان می دهد. همان طور که دیده می شود گروه تحت پروتکل ارائه شده به خوبی بازیابی می شود و به حرکت گروهی مجانبی می رسد.

۳. نتیجه گیری

در این مقاله، ما یک الگوریتم حرکت گروهی با داده های نمونه شده را برای سیستم های چندعاملی با رهبر مجازی دینامیک پیشنهاد کردیم. ما با استفاده از کران بالای تابع انرژی، یک کران بالا برای زمان نمونه برداری به دست آوردیم، طوری که تحت این زمان لینک های اولیه بین عوامل حفظ و از برخورد بین عوامل جلوگیری می شود و همچنین همگرایی سرعت عوامل به سرعت رهبر مجازی تضمین می شود. همچنین، ما عملکرد پروتکل خود را تحت حمله سایبری بررسی کردیم و نشان دادیم که برای حملات از نوع (DoS)، که در آن ورودی کنترلی در طول حمله صفر می شود، قابل استفاده است. ضمناً فرض کردیم حملات قابل تشخیص است و پس از تشخیص شبکه با ارائه الگوریتمی برای بازیابی شبکه، نشان دادیم در نهایت گروه به حرکت گروهی هماهنگی که در آن شبکه عوامل به هم پیوسته است و برخوردی وجود ندارد و سرعت همه عوامل به سرعت رهبر مجازی دست می یابد و همگرا می شود.

برای ادامه کار در زمینه تأثیر حمله بر روی حرکت های گروهی، می توان بر روی نحوه تشخیص حملات، سایر انواع حملات سایبری، نیز کار کرد. ضمن اینکه در مسأله حاضر دینامیک عوامل دو انتگرال گیر بودند و می توان روی سایر دینامیک ها مثل لاگرانژ نیز کار کرد.

- [18] W. Yu, L. Zhou, X. Yu, J. Lu, R. Lu, "Consensus in multi-agent systems with second-order dynamics and sampled data," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 9, no. 4, pp. 2137-2146, 2013.
- [19] Q. Ma, S. Xu, F.L. Lewis, "Second-order consensus for directed multi-agent systems with sampled data," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 24, no. 16, pp. 2560-2573, 2014.
- [20] S. Yazdani, M. Haeri, H. Su, 'Sampled-data leader-follower algorithm for flocking of multi-agent systems', *IET Control Theory and Applications*, 2019, 13, (5), pp. 609 – 619.
- [21] S. Yazdani, M. Haeri, H. Su, 'A Multi-Rate Sampled-Data Algorithm for Leader-Follower Flocking', *IET Control Theory and Applications*, 2021, 10, (1), pp. 119 – 125.
- [22] J.Y. Wang, H. O. Wang, J. Xiao, et al.: 'Synchronization of complex dynamical networks under recoverable attacks', *Automatica*, Vol. 46, 197-203, 2010.
- [23] W. Zhang, Z. Wang, Y. Liu, et al., Sampled-data consensus of nonlinear multi-agent systems subject to cyber attacks, *Int J Robust Nonlinear Control*, Vol. 28, 53-67, 2018.
- [24] M. .Nazarpour1, N. .Nezafati, S .Shokouhyar, 'Using the Modified Colonial Competition Algorithm to Increase the Speed and Accuracy of the Intelligent Intrusion Detection System, *Intelligent Multimedia Processing and Communication Systems*, Vol. 4, no.1, pp. 1-10, 2023 (Persian).
- [25] S. H. Mousavi, M. Safaeian, A. H. A. Ghaleh, 'A new method in the security of encryption systems by unbalanced gates, *Intelligent Multimedia Processing and Communication Systems*, Vol. 3, no.2, pp. 39-50, (Persian).
- ## References
- [1] C. Reynolds, "Flocks, birds, and schools: A distributed behavioral model," *Computer Graphics*, vol. 21, pp. 25-34, 1987.
- [2] H. Tanner, "Flocking with obstacle avoidance in switching networks of interconnected vehicles," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, New Orleans, LA, Apr. 2004, vol. 3, pp. 3006-3011.
- [3] A. Jadbabaie, J. Lin, S.A. Morse, "Coordination of groups of mobile agents using nearest neighbor rules," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 6, pp. 988-1001, June 2003.
- [4] N. Leonard, E. Friorelli, "Virtual leaders, artificial potentials and coordinated control of groups," in *Proc. 40th IEEE Conf. Decision and Control*, Orlando, FL, Dec. 2001, pp. 2968-2973.
- [5] R. Olfati-Saber, "Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 3, pp. 401-420, March 2006.
- [6] H. Su, X. Wang, G. Chen, "Flocking of multi agents with a virtual leader," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 82, no. 7, pp. 1334-1343, July 2009.
- [7] H. Su, X. Wang, Z. Lin, "A connectivity-preserving flocking algorithm for multi-agent systems based only on position measurements," *International Journal of Control*, vol. 54, no. 2, pp. 293-307, Feb. 2009.
- [8] H. Su, "Flocking in multi-agent systems with multiple virtual leaders based only on position measurements," *Communications in Theoretical Physics*, vol. 57, no. 5, May 15, 2012.
- [9] H. Shi, L. Wang, T. Chu, "Flocking of multi-agent systems with a dynamic virtual leader," *International Journal of Control*, vol. 82, no. 1, pp. 43-58, Jan. 2009.
- [10] Z. Yang, Q. Zhang, Z. Jiang, Z. Chen, "Flocking of multi-agents with time delay," *International Journal of Systems Science*, vol. 43, no. 11, pp. 2125-2134, Nov. 2012.
- [11] S. Li, X. Liu, W. Tang, J. Zhang, "Flocking of multi-agents following a leader with adaptive protocol in a noisy environment," *Asian Journal of Control*, vol. 16, no. 6, pp. 1771-1778, 2014.
- [12] H. Wang, "Flocking of networked uncertain Euler-Lagrange systems on directed graphs," *Automatica*, vol. 49, no. 9, pp. 2774-2779, 2013.
- [13] Y. Dong, J. Huang, "Flocking with connectivity preservation of multiple double integrator systems subject to external disturbances by a distributed control law," *Automatica*, Vol. 55, 197-203, 2015.
- [14] Q. Zhang, P. Li, Z. Yang, Z. Chen, "Adaptive flocking of non-linear multi-agents systems with uncertain parameters," *IET Control Theory and Applications*, vol. 9, no. 3, pp. 351-357, Feb. 2015.
- [15] P. Yu, D. Li, Z.W. Liu, Z.H. Guan, "Leader-follower flocking based on distributed event-triggered hybrid control," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Article first published online: 4 Feb. 2015.
- [16] Y. Cao, W. Ren, "Multi-vehicle coordination for double-integrator dynamics under fixed undirected/directed interaction in a sampled data setting," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 20, no. 9, pp. 987-1000, June 2010.
- [17] J. Qin, H. Gao, "A sufficient condition for convergence of sampled-data consensus for double-integrator dynamics with non-uniform and time-varying communication delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 9, pp. 2417-2422, Sep. 2012.