

Numerical Solution of Nonlinear Fractional Pantograph Differential Equations with Boundary Conditions Using Jacobi Polynomials

Somayeh Nemati^{1*}, Faezeh Bakouei²

1. Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran. (Corresponding Author) s.nemati@umz.ac.ir
2. Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran., Babolsar, Iran. faezehbakouei@gmail.com

Abstract

Introduction: We consider the differential equations of the fractional pantograph as follows:

$$\begin{cases} D^\mu y(t) = f(t, y(t), y(qt)), & t \in J = [0, T], \\ y(0) = 0, & y(T) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $1 < \mu < 2$, $0 < q < 1$ and f is a continuous function. Also, D^μ denotes the derivative of the Caputo fraction. To solve problem (1), we transform it into the following Volterra-Fredholm integral equation:

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t-s)^{\mu-1} f(s, y(s), y(qs)) ds \\ & - \frac{t}{T\Gamma(\mu)} \int_0^T (T-\tau)^{\mu-1} f(\tau, y(\tau), y(q\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Since the problem (1) and Volterra-Fredholm integral equation (2) are equivalent, they have the same solutions. If equation (1) is given along with inhomogeneous boundary conditions, it is possible to use the $u = y - y_1$ transformation to obtain homogeneous boundary conditions. It yields $y_1 = \frac{(y(T)-y(0))}{T}t + y(0)$.

Method: Suppose $J_i^{(\alpha, \beta)}(t)$ is a Jacobian polynomial of degree i . Considering the

$$y_N(t) = \sum_{i=0}^N a_i J_i^{(\alpha, \beta)}(t), \quad (3)$$

As an approximation of the solution of the integral equation (2), first, we transfer the integrals on the right side of the equation to the range $[-1, 1]$ by changing the variables. Then, by placing the approximation (3) in the equation, we approximate the integrals in it using the Gauss-Jacobi integration method. Next, considering $N+1$ collocation point as $t_i = i \frac{T}{N+2}$, $i = 1, 2, \dots, N+1$. Let $t = t_i$ in the (3) we have

$$\begin{aligned} y_N(t_i) = & \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{t_i}{2}\right)^\mu \times \sum_{k=0}^M f\left(\frac{t_i(x_k+1)}{2}, y_N\left(\frac{t_i(x_k+1)}{2}\right), y_N\left(\frac{qt_i(x_k+1)}{2}\right)\right) \omega_k \\ & - \frac{t_i}{T\Gamma(\mu)} \left(\frac{T}{2}\right)^\mu \sum_{k=0}^M f\left(\frac{T(x_k+1)}{2}, y_N\left(\frac{T(x_k+1)}{2}\right), y_N\left(\frac{qT(x_k+1)}{2}\right)\right) \omega_k, \end{aligned}$$

where x_k , $k = 0, 1, \dots, M$ are roots of $J_{M+1}^{(\mu-1, 0)}(x)$ and ω_k are associated weights. The resulting system consists of $N+1$ nonlinear algebraic equation in terms of unknown coefficients a_i , by solving which the values of a_i are determined. Then, by placing a_i in equation (3), an approximation of the solution of the problem is given.

Findings: The results of the implementation of the method on three examples show that the error decreases with the increase in the number of basic functions and the higher the order of smoothness of the solution of the problem, the better approximation will be obtained.



Discussion: In this research, we have numerically solved a set of nonlinear fractional pantograph differential equations with boundary conditions using Jacobi polynomials. The present method turns the problem into a system of nonlinear algebraic equations, which simplifies the problem. It is suggested to use Jacobi wavelets to solve such problems, because in problems where the solution is not smooth enough, using wavelets by keeping the polynomial degree constant and increasing the number of wavelets will lead to an improvement in the approximation.

Keywords: Fractional pantograph differential equation, Boundary conditions, Volterra-Fredholm integral equation, Jacobi polynomials.

حل عددی معادلات دیفرانسیل پانتوگراف کسری غیرخطی با شرایط مرزی با استفاده از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی

سال دوم، بهار ۱۴۰۰
شماره اول، صص: ۴۵-۵۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۲۷
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۰۴

سمیه نعمتی^{*}، فائزه باکوئی^۲

۱. گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران. s.nemati@umz.ac.ir
۲. گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران. faezebakouei@gmail.com

چکیده: در این پژوهش، یک روش عددی بر پایه‌ی چندجمله‌ای‌های ژاکوبی برای حل معادلات دیفرانسیل پانتوگراف کسری غیرخطی با شرایط مرزی معرفی می‌شود. ابتدا، معادله دیفرانسیل به صورت یک معادله انتگرال ولترا-فردهلم معادل بیان می‌شود. سپس، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و فرمول انتگرال گیری گاوس-ژاکوبی به همراه نقاط هم‌محلی نیوتن-کاتس برای تبدیل معادله انتگرال حاصل به دستگاهی از معادلات جبری غیرخطی استفاده می‌شود. در آخر، با در نظر گرفتن چند مثال و محاسبه خطاهای L^2 و L^∞ ، کارایی و دقت روش پیشنهادی نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل پانتوگراف کسری، شرایط مرزی، معادله انتگرال ولترا-فردهلم، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی.

۱. مقدمه

اولین بار در سال ۱۸۵۱، وسیله‌ای به نام پانتوگراف در ساخت لوکوموتیو برقی استفاده شد و در سال ۱۹۷۱، به صورت ریاضی مدلسازی شد [۱۲]. بعد از آن، معادلات دیفرانسیل پانتوگراف توسط نویسندگان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته و چندین روش عددی برای حل این معادلات ارائه شده است. از مهم‌ترین این روش‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

در [۴]، روش گالرکین ناپیوسته برای معادلات دیفرانسیل تأخیری از نوع پانتوگراف معرفی شده است.

در [۱۳]، از روش‌های ضمنی رانگ-کوتا برای معادلات دیفرانسیل با تأخیرهای متناسب مختلف استفاده شده است.

در [۱۷، ۱۵]، روش‌های طیفی لزاندر برای حل معادلات دیفرانسیل با یک تأخیر پانتوگراف به کار برده شده‌اند.

تقریب چندجمله‌ای چیشیف در [۳، ۱۱] برای حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال-دیفرانسیل نوع پانتوگراف توسعه داده شده است.

روش توابع گویای ژاکوبی در [۱] برای حل معادلات پانتوگراف تعمیم یافته تجزیه و تحلیل شده است.

همچنین، ماتریس‌های انتگرال گیری شبه طیفی با مبنای قابل تنظیم برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری در [۱۰] معرفی شده‌اند.

اگر مرتبه مشتق در معادله دیفرانسیل پانتوگراف از مرتبه‌ی غیر صحیح باشد به آن معادله پانتوگراف کسری گفته می‌شود. به دلیل اهمیت و کاربردهای این دسته از معادلات، بسیاری از محققان آن را مورد مطالعه قرار داده‌اند. اکثر معادلات دیفرانسیل کسری جواب‌های تحلیلی دقیقی ندارند، بنابراین، باید از تکنیک‌های عددی برای حل آن‌ها استفاده کرد. از جمله روش‌هایی که برای حل معادلات دیفرانسیل پانتوگراف کسری ارائه شده‌اند می‌توان به پژوهش‌های زیر اشاره کرد:

نویسندگان در [۱۶]، یک روش موجک تیلور تعمیم یافته مرتبه کسری را برای حل معادلات دیفرانسیل پانتوگراف کسری غیرخطی و تأخیری به کار برده‌اند. در [۷]، به حل عددی معادلات دیفرانسیل پانتوگراف کسری بر اساس تقریب‌های تابع تیلور مرتبه کسری قطعه‌ای پرداخته شده است. در [۲]، یک روش عملیاتی برای حل معادله دیفرانسیل پانتوگراف کسری ارائه شده است. در [۸، ۹]، نویسندگان از موجک‌ها به عنوان توابع پایه‌ای برای معرفی روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل پانتوگراف کسری استفاده کرده‌اند. همچنین، در [۵]، یک رویکرد عددی مبتنی بر ماتریس عملیاتی توابع کلاهی برای حل معادلات دیفرانسیل پانتوگراف کسری معرفی شده است.

در این مقاله، معادلات دیفرانسیل پانتوگراف کسری به شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} D^\mu y(t) = f(t, y(t), y(qt)), & t \in J = [0, T], \\ y(0) = 0, & y(T) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

که در آن، $0 < q < 1$ ، $1 < \mu < 2$ و f یک تابع پیوسته است. همچنین، D^μ به مشتق کسری کاپوتو اشاره دارد. در [۱۴]، با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مبتنی بر نقاط گاوس-ژاکوبی (گاوس-لباتو-

ژاکوبی) به حل این مسئله پرداخته شد. بدین منظور، مسئله (۱) به معادله انتگرال ولترا-فردهلم زیر تبدیل شد:

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t-s)^{\mu-1} f(s, y(s), y(qs)) ds - \frac{t}{T\Gamma(\mu)} \int_0^T (T-\tau)^{\mu-1} f(\tau, y(\tau), y(q\tau)) d\tau. \quad (2)$$

از آنجایی که مسئله (۱) و معادله انتگرال ولترا-فردهلم (۲) هم ارز هستند، دارای جواب‌های یکسان می‌باشند. اگر معادله (۱) همراه با شرایط مرزی ناهمگن داده شود، می‌توان برای به دست آوردن شرایط مرزی همگن از تبدیل $u = y - y_1$ استفاده کرد، به طوری که $y_1 = \frac{(y(T)-y(0))}{T}t + y(0)$.

روند کار در این پژوهش به شرح زیر است: در بخش ۲، به معرفی مفاهیم مورد نیاز در این کار می‌پردازیم. بخش ۳ به معرفی تکنیک عددی اختصاص می‌یابد. در بخش ۴، با در نظر گرفتن سه مثال، دقت و کارایی روش پیشنهادی بررسی و در آخر، نتیجه گیری ارائه می‌شود.

۲. مفاهیم مقدماتی

در این بخش، به معرفی مفاهیم مورد نیاز می‌پردازیم.

تعریف ۱: عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $\mu \geq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴]:

$$I^\mu y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t-s)^{\mu-1} y(s) ds, & \mu > 0, \\ y(t), & \mu = 0, \end{cases}$$

که در آن

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\mu-1} dt,$$

تابع گاما برای $t > 0$ است.

تعریف ۲: فرض کنید $n-1 < \mu \leq n$ ، $n \in \mathbb{N}_0$ ، $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ و $y(t) \in C^n$. عملگر مشتق کسری کاپوتو D^μ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴]:

$$D^\mu y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\mu-1} y^{(n)}(\tau) d(\tau).$$

برخی خواص عملگرهای مشتق کاپوتو و انتگرال ریمان-لیوویل به صورت زیر است:

$$D^\mu I^\mu y(t) = y(t),$$

$$I^\mu D^\mu y(t) = y(t) - \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!},$$

$$D^\mu t^k = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N}_0 \text{ \& } k < [\mu], \\ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\mu+1)} t^{k-\mu}, & k \in \mathbb{N}_0 \text{ \& } k \geq [\mu], \end{cases}$$

که در آن، $[\cdot]$ تابع سقف است

تعریف ۳: تابع $\omega^{(\alpha, \beta)}(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ به ازای $\alpha, \beta > -1$ یک تابع وزن روی بازه $[-1, 1]$ است. چندجمله‌ای‌های متعامدی که با این تابع وزن روی $[-1, 1]$ ساخته می‌شوند به چندجمله‌ای‌های ژاکوبی معروف هستند [۱۴]. چندجمله‌ای ژاکوبی درجه n را با نماد $J_n^{(\alpha, \beta)}(t)$

نشان می‌دهیم. این چندجمله‌ای دارای فرم تحلیلی به صورت زیر است:

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n + k + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{t-1}{2}\right)^k.$$

رابطه بازگشتی چندجمله‌ای‌های ژاکوبی به صورت زیر است:

$$J_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(t) = (a_n^{(\alpha, \beta)} t - b_n^{(\alpha, \beta)}) J_n^{(\alpha, \beta)}(t) - c_n^{(\alpha, \beta)} J_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(t),$$

$$n \geq 1,$$

$$J_0^{(\alpha, \beta)}(t) = 1, \quad J_1^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)t + \frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

که در آن

$$a_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2)}{2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)},$$

$$b_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(2n + \alpha + \beta + 1)}{2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)},$$

$$c_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{(n + \alpha)(n + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}{(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)}$$

همچنین، خاصیت تعامد برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر برقرار است:

$$\int_{-1}^1 \omega^{(\alpha, \beta)}(t) J_i^{(\alpha, \beta)}(t) J_j^{(\alpha, \beta)}(t) dt = h_i^{(\alpha, \beta)} \delta_{ij},$$

که در آن، δ_{ij} دلتای کرونکر به صورت زیر است:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1; & i = j, \\ 0; & i \neq j, \end{cases}$$

9

$$h_i^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + i + 1) \Gamma(\beta + i + 1)}{i! (\alpha + \beta + 2i + 1) \Gamma(\alpha + \beta + i + 1)},$$

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی با در نظر گرفتن مقادیر قابل قبول مختلف برای پارامترهای ژاکوبی α و β شامل انواع چندجمله‌ای‌های متعامد هستند. خاص‌ترین موارد، چندجمله‌ای‌های لژاندر مربوط به $\alpha = \beta = 0$ ، چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول، مربوط به $\alpha = \beta = -0.5$ و چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم، مربوط به $\alpha = \beta = 0.5$ هستند.

تعریف ۴: برای یک تابع داده شده y ، فرمول انتگرال گیری گاوس-ژاکوبی از رابطه زیر به دست می‌آید [۶]:

$$\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta y(t) dt = \sum_{l=1}^M \omega_l y(t_l) + R_M(y),$$

که در آن t_l ، $l = 1, \dots, M$ ، ریشه‌های $J_M^{(\alpha, \beta)}$ هستند. همچنین، ω_l ، $l = 1, \dots, M$ ، وزن‌های متناظر داده شده به صورت زیر هستند:

$$\omega_l = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + M + 1) \Gamma(\beta + M + 1)}{M! \Gamma(\alpha + \beta + M + 1) \left(\frac{d}{dt} J_M^{(\alpha, \beta)}(t_l)\right)^2 (1-t_l)^2},$$

و R_M جمله باقیمانده به شرح زیر است:

$$R_M(y) = \frac{2^{\alpha+\beta+2M+1} M! \Gamma(\alpha + M + 1)}{(\alpha + \beta + 2M + 1)} \times \frac{\Gamma(\beta + M + 1) \Gamma(\alpha + \beta + M + 1) y^{(2M)}(\eta)}{(\Gamma(\alpha + \beta + 2M + 1))^2 (2M)!},$$

$$\eta \in (-1, 1) \quad (3)$$

طبق جمله باقیمانده (۳)، قاعده انتگرال گیری گاوس-ژاکوبی برای تمام

چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر یا مساوی $2M - 1$ دقیق است. این قاعده در صورتی معتبر است که تابع y در بازه $(-1, 1)$ دارای هیچ نقطه‌ی تکینگی نباشد. لازم به ذکر است که با استفاده از الگوریتم‌های عددی می‌توان ریشه‌ها و وزن‌های قاعده انتگرال گیری گاوس-ژاکوبی را به دست آورد.

۳. روش عددی

در این بخش، به حل عددی مسئله (۱) می‌پردازیم. بدین منظور معادله انتگرال ولترا-فردهلم هم ارز با آن که در (۲) داده شد را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$y_N(t) = \sum_{i=0}^N a_i J_i^{(\alpha, \beta)}(t), \quad (4)$$

تقریبی از جواب معادله انتگرال (۲) باشد. ابتدا، انتگرال‌های سمت راست معادله (۲) را با استفاده از تغییر متغیرهای زیر به بازه $[-1, 1]$ انتقال می‌دهیم.

$$s = \frac{t(t'+1)}{2}, \quad \tau = \frac{T(t'+1)}{2}.$$

با این تغییر متغیرها، معادله (۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^\mu \int_{-1}^1 (1-t')^{\mu-1} \times f\left(\frac{t(t'+1)}{2}, y\left(\frac{t(t'+1)}{2}\right), y\left(\frac{qt(t'+1)}{2}\right)\right) dt' - \frac{t}{T\Gamma(\mu)} \left(\frac{T}{2}\right)^\mu \int_{-1}^1 (1-t')^{\mu-1} \times f\left(\frac{T(t'+1)}{2}, y\left(\frac{T(t'+1)}{2}\right), y\left(\frac{qT(t'+1)}{2}\right)\right) dt'. \quad (5)$$

سپس، با جایگذاری $y_N(t)$ به جای $y(t)$ در معادله (۵)، انتگرال‌های موجود در آن را با استفاده از فرمول انتگرال گیری گاوس-ژاکوبی با تابع وزن $\omega^{(\mu-1, 0)}$ محاسبه می‌کنیم، که به معادله زیر منجر می‌شود:

$$y_N(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^\mu \times \left[\sum_{k=0}^M f\left(\frac{t(x_k+1)}{2}, y_N\left(\frac{t(x_k+1)}{2}\right), y_N\left(\frac{qt(x_k+1)}{2}\right)\right) \omega_k \right] - \frac{t}{T\Gamma(\mu)} \left(\frac{T}{2}\right)^\mu \times \left[\sum_{k=0}^M f\left(\frac{T(x_k+1)}{2}, y_N\left(\frac{T(x_k+1)}{2}\right), y_N\left(\frac{qT(x_k+1)}{2}\right)\right) \omega_k \right], \quad (6)$$

که در آن، x_k ، $k = 0, 1, \dots, M$ ، ریشه‌های چندجمله‌ای $J_{M+1}^{(\mu-1, 0)}(x)$ و ω_k ها وزن‌های متناظر هستند. با در نظر گرفتن $N + 1$ نقطه هم‌محلی به صورت $t = t_i$ ، $i = 1, 2, \dots, N + 1$ ، $t_i = i \frac{T}{N+2}$ و قرار دادن $t = t_i$ در معادله (۶)، خواهیم داشت:

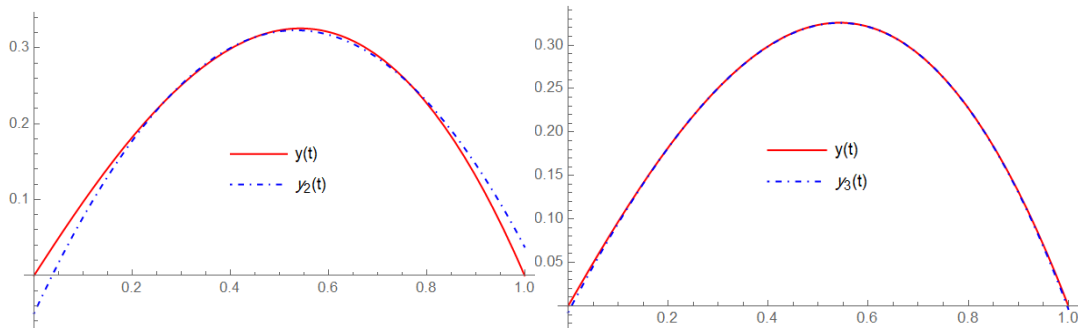
فصلنامه سیستم‌های پردازشی و ارتباطی چندرسانه‌ای هوشمند، سال دوم، شماره اول، پیاپی شماره ۳، بهار ۱۴۰۰

۴. مثال‌های عددی

مثال ۱: معادله دیفرانسیل پانتوگراف غیرخطی کسری زیر را در نظر می‌گیریم [۱۴]:

$$D^{1.5}y(t) = y(0.5t) + y^2(t) + g(t),$$

که در آن، $y(0) = 0$ ، $y(1) = 0$ ، $g(t) = -\Gamma(3.5)t - (t - t^{2.5})^2 - \frac{t}{2} + \frac{t^{2.5}}{4\sqrt{2}}$. این مسئله دارای جواب تحلیلی $y(t) = t - t^{2.5}$ است. با در نظر گرفتن $M = 10$ و مقادیر مختلف α ، β و N مسئله را حل می‌کنیم. در شکل ۱، نمودار جواب دقیق و جواب‌های تقریبی با $N = 2, 3$ و $\alpha = \beta = 0$ مشاهده می‌شود. همچنین، جدول ۱ مقادیر خطای L^2 و L^∞ را به ازای مقادیر مختلف N ، α و β نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با افزایش مقدار N دقت تقریب بهبود می‌یابد.



شکل ۱: نمودار جواب دقیق به همراه جواب تقریبی با $\alpha = \beta = 0$ و $N = 2$ (چپ) و $N = 3$ (راست) برای مثال ۱

جدول ۱: خطاهای L^2 و L^∞ با N های مختلف برای مثال ۱

N		4	6	8	10	12
$\alpha = \beta = -0.5$	L^∞	$2.44e-3$	$5.94e-4$	$2.27e-4$	$1.09e-4$	$6.05e-5$
	L^2	$9.99e-4$	$2.09e-4$	$7.30e-5$	$3.26e-5$	$1.71e-5$
$\alpha = \beta = 0$	L^∞	$2.44e-3$	$5.94e-4$	$2.27e-4$	$1.09e-4$	$6.05e-5$
	L^2	$4.30e-4$	$8.08e-5$	$2.59e-5$	$1.09e-5$	$5.43e-6$
$\alpha = \beta = 0.5$	L^∞	$2.44e-3$	$5.93e-4$	$2.27e-4$	$1.09e-4$	$6.05e-5$
	L^2	$2.29e-4$	$3.89e-5$	$1.15e-5$	$4.59e-6$	$2.16e-6$

با فرض $N = 2$ و $\alpha = \beta = 0$ ، قرا می‌دهیم:

$$u_2(t) = \sum_{i=0}^2 a_i J_i^{(0,0)}(t).$$

با پیاده سازی روش ارائه شده، به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$212a_0 - 98a_1 - 19a_2 = -154$$

$$45a_0 - 6a_1 - 15a_2 = -40$$

$$212a_0 + 50a_1 - 31a_2 = -162$$

با حل دستگاه بالا داریم:

$$a_0 = -\frac{2}{3}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{2}{3},$$

که نتیجه می‌دهد:

$$u_2(t) = t^2 - 2t.$$

بنابراین، به دست می‌آوریم:

$$y_N(t_i) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{t_i}{2}\right)^\mu \times \sum_{k=0}^M f\left(\frac{t_i(x_k+1)}{2}, y_N\left(\frac{t_i(x_k+1)}{2}\right), y_N\left(\frac{qt_i(x_k+1)}{2}\right)\right) \omega_k - \frac{t_i}{T\Gamma(\mu)} \left(\frac{T}{2}\right)^\mu \times \sum_{k=0}^M f\left(\frac{T(x_k+1)}{2}, y_N\left(\frac{T(x_k+1)}{2}\right), y_N\left(\frac{qT(x_k+1)}{2}\right)\right) \omega_k. \quad (Y)$$

دستگاه (Y) شامل $N + 1$ معادله جبری غیرخطی بر حسب ضرایب مجهول a_i می‌باشد که با حل آن مقادیر a_i مشخص می‌شود. سپس با جایگذاری a_i ها در معادله (۴) تقریبی از جواب مسئله مورد نظر داده می‌شود.

مثال ۲: معادله دیفرانسیل پانتوگراف خطی کسری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$D^\mu y(t) = \frac{3}{4}y(t) + y(0.5t) - t^2 + 2,$$

$$y(0) = 0, \quad y(2) = 4,$$

جواب دقیق این مسئله با $\mu = 2$ ، $y(t) = t^2$ است. برای حل این مثال،

با توجه به شرط ناهمگن $y(2) = 4$ ، تعریف می‌کنیم:

$$y_1(t) = 2t.$$

حال، با در نظر گرفتن $u(t) = y(t) - 2t$ ، مسئله را به مسئله با شرایط

مرزی همگن زیر تبدیل می‌کنیم:

$$D^\mu u(t) = \frac{3}{4}u(t) + u(0.5t) + \frac{5}{2}t - t^2 + 2,$$

$$u(0) = 0, \quad u(2) = 0,$$

$$y_2(t) = u_2(t) + 2t = t^2,$$

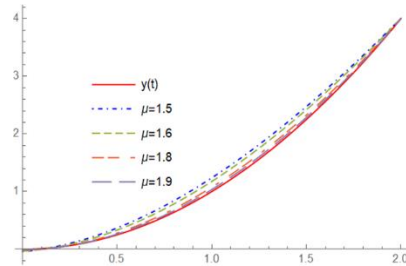
که همان جواب دقیق است.

می‌گیریم:

$$D^\mu y(t) = 1 - 2y^2(0.5t), \\ y(0) = 1, \quad y(1) = \cos(1).$$

جواب دقیق این مسئله با $\mu = 2$ ، $y(t) = \cos(t)$ است. با در نظر گرفتن $M = 10$ و مقادیر مختلف α ، β و N مسئله را حل می‌کنیم. در شکل ۳، نمودار جواب دقیق و جواب‌های تقریبی با $N = 2, 4$ و $\alpha = \beta = 0$ مشاهده می‌شود. همچنین، جدول ۲ مقادیر خطای L^2 و L^∞ را به‌ازای مقادیر مختلف N ، α و β نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با افزایش مقدار N خطای تقریب کاهش می‌یابد. با توجه به نتایج می‌توان نتیجه‌گرفت که دقت روش با استفاده از مقادیر مختلف α و β با در نظر گرفتن مقدار یکسان از توابع پایه‌ای تقریباً مشابه است. در ادامه، با μ های مختلف مسئله را حل می‌کنیم. مقادیر $M = 10$ ، $\alpha = \beta = 0$ و $N = 10$ را در نظر می‌گیریم. در شکل ۴، نمودار جواب دقیق و جواب‌های تقریبی با $\mu = 1.5, 1.6, 1.8, 1.9$ مشاهده می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش مقدار μ ، زمانی که به مقدار صحیح خود نزدیک می‌شود، دقت تقریب بهبود می‌یابد.

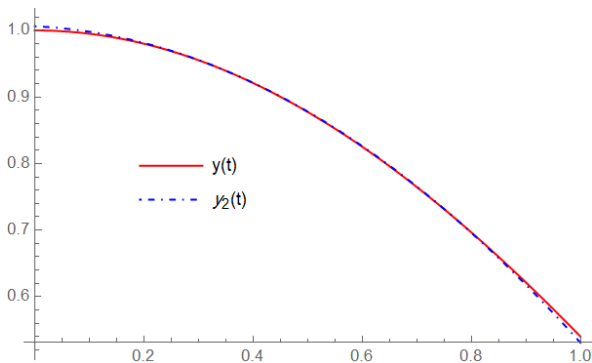
حال با μ های مختلف مسئله را حل می‌کنیم. مقادیر $M = 10$ ، $\alpha = \beta = 0$ و $N = 4$ را در نظر می‌گیریم. در شکل ۲، نمودار جواب دقیق و جواب‌های تقریبی با $\mu = 1.5, 1.6, 1.8, 1.9$ مشاهده می‌شود. ملاحظه می‌شود که با افزایش مقدار μ ، زمانی که به مقدار صحیح خود نزدیک می‌شود دقت تقریب بهبود می‌یابد.



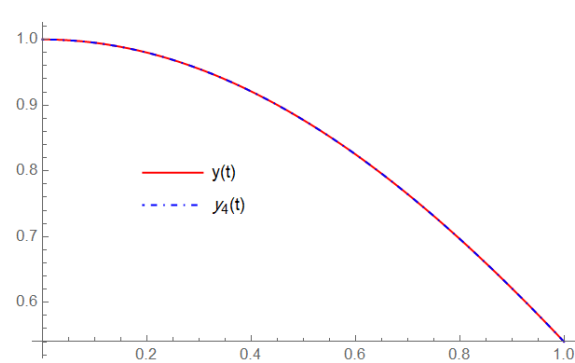
شکل ۲: نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی با μ های مختلف برای

مثال ۲

مثال ۳: معادله دیفرانسیل پانتوگراف غیرخطی کسری زیر را در نظر



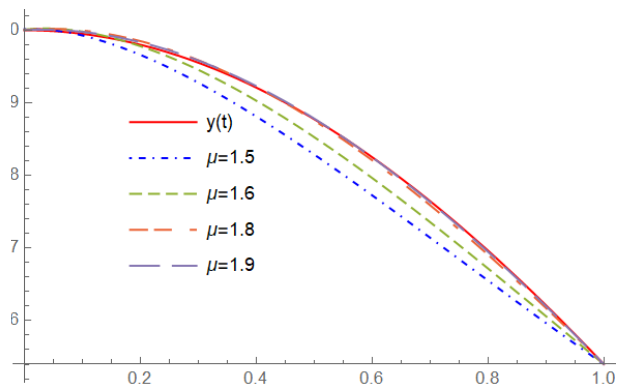
شکل ۳: نمودار جواب دقیق همراه جواب تقریبی با $\alpha = \beta = 0$ و $N = 2$ (چپ) و $N = 4$ (راست) برای مثال ۳



جدول ۲: خطاهای L^2 و L^∞ با N های مختلف برای مثال ۳

N		4	6	8	10	12
$\alpha = \beta = -0.5$	L^∞	$7.08e-5$	$2.53e-7$	$5.21e-10$	$6.91e-13$	$5.37e-14$
	L^2	$3.56e-5$	$1.18e-7$	$2.31e-10$	$3.35e-11$	$3.53e-11$
$\alpha = \beta = 0$	L^∞	$7.08e-5$	$2.53e-7$	$5.21e-10$	$6.79e-13$	$1.34e-13$
	L^2	$1.58e-5$	$4.77e-8$	$9.28e-11$	$3.91e-11$	$3.19e-11$
$\alpha = \beta = 0.5$	L^∞	$7.08e-5$	$2.53e-7$	$5.21e-10$	$6.87e-13$	$4.65e-14$
	L^2	$8.72e-6$	$2.38e-8$	$5.22e-11$	$3.06e-11$	$3.06e-11$

- [7] Rahimkhani, P., & Ordokhani, Y. (2018). Numerical studies for fractional pantograph differential equations based on piecewise fractional-order Taylor function approximations. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 42(4), 2131-2144.
- [8] Rahimkhani, P., Ordokhani, Y., & Babolian, E. (2017). A new operational matrix based on Bernoulli wavelets for solving fractional delay differential equations. *Numerical Algorithms*, 74(1), 223-245.
- [9] Saeed, U., ur Rehman, M., & Iqbal, M. A. (2015). Modified Chebyshev wavelet methods for fractional delay-type equations. *Applied Mathematics and Computation*, 264, 431-442.
- [10] Tang, X., Shi, Y., & Xu, H. (2018). Wellconditional pseudospectral schemes with tunable basis for fractional delay differential equations. *Journal of Scientific Computing*, 74(2), 920-936.
- [11] Trif, D. (2012). Direct operational tau method for pantograph-type equations. *Applied Mathematics and Computation*, 219(4), 2194-2203.
- [12] Valizadeh, M., Mahmoudi, Y., & Dastmalchi Saei, F. (2019). Application of natural transform method to fractional pantograph delay differential equations. *Journal of Mathematics*, 2019.
- [13] Wang, W. (2015). High order stable Runge–Kutta methods for nonlinear generalized pantograph equations on the geometric mesh. *Applied Mathematical Modelling*, 39(1), 270-283.
- [14] Yang, C., & Hou, J. (2021). Jacobi spectral approximation for boundary value problems of nonlinear fractional pantograph differential equations. *Numerical Algorithms*, 86(3), 1089–1108.
- [15] Yang, Y., & Tohidi, E. (2019). Numerical solution of multi-pantograph delay boundary value problems via an efficient approach with the convergence analysis. *Computational and Applied Mathematics*, 38(3), 1-14.
- [16] Yuttanan, B., Razzaghi, M., & Vo, T. N. (2021). A fractional-order generalized Taylor wavelet method for nonlinear fractional delay and nonlinear fractional pantograph differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(5), 4156-4175.
- [17] Yüzbaşı, Ş., & Sezer, M. (2015). Shifted Legendre approximation with the residual correction to solve pantograph-delay type differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 39(21), 6529-6542.



شکل ۴: نمودار جواب دقیق همراه با جواب تقریبی با μ های مختلف برای مثال ۳

۵. نتیجه

در این پژوهش، به حل عددی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل پانتوگراف کسری غیرخطی با شرایط مرزی با استفاده از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی پرداخته‌ایم. روش حاضر مسئله مورد نظر را به دستگامی از معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌کند که این کار باعث ساده‌سازی مسئله می‌شود. نتایج حاصل از پیاده‌سازی روش روی سه مثال نشان می‌دهند که خطا با افزایش تعداد توابع پایه‌ای کاهش می‌یابد و هرچه مرتبه همواری جواب مسئله بالاتر باشد، تقریب بهتری حاصل خواهد شد. در ادامه، پیشنهاد می‌شود تا موجک‌های ژاکوبی برای حل این گونه مسائل به کار برده شود، زیرا در مسائلی که جواب به اندازه کافی هموار نباشد، به کارگیری موجک‌ها با ثابت نگه داشتن درجه چندجمله‌ای و افزایش تعداد موجک‌ها منجر به بهبود تقریب خواهد شد.

مراجع

- [1] Doha, E. H., Bhrawy, A. H., Baleanu, D., & Hafez, R. M. (2014). A new Jacobi rational–Gauss collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Applied Numerical Mathematics*, 77, 43-54.
- [2] Ebrahimi, H., & Sadri, K. (2019). An operational approach for solving fractional pantograph differential equation. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 9(1), 37-68.
- [3] Ezz-Eldien, S. S., & Doha, E. H. (2019). Fast and precise spectral method for solving pantograph type Volterra integro-differential equations. *Numerical Algorithms*, 81(1), 57-77.
- [4] Huang, Q., Xie, H., & Brunner, H. (2011). Superconvergence of discontinuous Galerkin solutions for delay differential equations of pantograph type. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(5), 2664-2684.
- [5] Nemati, S., Lima, P., & Sedaghat, S. (2018). An effective numerical method for solving fractional pantograph differential equations using modification of hat functions. *Applied Numerical Mathematics*, 131, 174-189.
- [6] Nemati, S.; Lima, P. M., & Torres, Delfim F. M. (2021). Numerical solution of a class of third-kind Volterra integral equations using Jacobi wavelets. *Numerical Algorithms*, 86(2), 675–691.