سامانه‌های پردازشی و ارتباطی چندرسانه‌ای هوشمند

Intelligent Multimedia Processing and Communication Systems (IMPCS)

Fall 2023, 4 (3), 55-61
DOR:

Received: 15 July 2023
Accepted: 24 Aug 2023

مقاله پژوهشی

Vertex Decomposability of Path Complexes Associated with Cycle Graphs

Seyyed Mohammad Ajdani[1], Kamal Ahmadi[2], Asghar Madadi[3*]

1.Assistant Professor, Department of Mathematics, Zanjan Branch, Islamic Azad University, Zanjan, Iran. majdani2@yahoo.com

2. Assistant Professor, Department of Mathematics, Zanjan Branch, Islamic Azad University, Zanjan, Iran. kamal.ahmadi.math@gmail.com

3. Assistant Professor, Department of Mathematics, Zanjan Branch, Islamic Azad University, Zanjan, Iran. *(Corresponding Author)* amadadi2009@gmail.com

Abstract:

Introduction: Monomials are the link between commutative algebra and combinatorics. With a simplicial complex Δ, one can associate two square-free monomial ideals: the Stanley-Reisner ideal I_Δ, whose generators correspond to the non-faces of Δ, or the facet ideal $I(\Delta)$, which is a generalization of edge ideals of graphs and whose generators correspond to the facets of Δ. The facet ideal of a simplicial complex was first introduced by Faridi. Let G be a simple graph. The edge ideal $I(G)$ of graph G was first considered by R. Villarreal. He studied the algebraic properties of $I(G)$ using a combinatorial language of G.

Method: In combinatorial commutative algebra, one can attach a monomial ideal to a combinatorial object. Then this ideal's algebraic properties are studied using the combinatorial properties of the combinatorial object. One of the interesting problems in combinatorial commutative algebra is the vertex decomposability of simplicial complexes, which many researchers study. In this abstract, we recall some definitions which will be needed later. A simplicial complex Δ over a set of vertices $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ is a collection of subsets of V, with the property that $\{x_i\} \in \Delta$, for all i and if $F \in \Delta$, then all subsets of $F$are also in Δ (including the empty set). An element in Δ is called a face of Δ. The dimension of a face F of Δ, $\dim F$, is $|F| - 1$ where $|F|$ is the number of elements of F. The maximal faces of Δ under inclusion are called facets of Δ. The dimension of the simplicial complex Δ, $\dim \Delta$, , is the maximum of dimensions of its facets. If all facets of Δ have the same dimension, then Δ is called pure. Let $\mathcal{F}(\Delta) = \{F_1, \dots, F_q\}$ be the facet set of Δ. It is clear that $\mathcal{F}(\Delta)$ determines Δ completely and we write $\Delta = < F_1, \dots, F_q >$.

Results: Let G be a simple graph, and $\Delta_t(G)$ be a simplicial complex whose facets correspond to the paths of length t in G ($t \geq 2$). We show that $\Delta_t(C_n)$ is matroid, vertex decomposable, shellable, and Cohen-Macaulay if and only if n=t or n=t+1, where C_n is an n-cycle.

Keywords: Vertex decomposable, Matroid**,** Shellable**,** Cohen-Macaulay.

سامانه‌های پردازشی و ارتباطی چندرسانه‌ای هوشمند

Intelligent Multimedia Processing and Communication Systems (IMPCS)

انجمن علمی تجارت الکترونیکی ایران

واحد زنجان

تجزیه‌پذیری رأسی مجتمع‌های مسیری متناظر با گراف‌های دوری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۲٤
تاریخ پذیرش:۱۴۰۲/۰٦/۰۲

دورهٔ چهارم، پاییز ۱۴۰۲
شمارهٔ سوم، صص: ٥٥-٦١

سیدمحمد آجدانی [۱]، کمال احمدی [۲]، اصغر مددی [۳*]

۱. استادیار، گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران. majdani2@yahoo.com
۲. استادیار، گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران. kamal.ahmadi.math@gmail.com
۳. استادیار، گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران. (نویسندهٔ مسئول) amadadi2009@gmail.com

چکیده: تک‌جمله‌ای‌ها پل ارتباطی بین جبر جابجایی و ترکیبیات هســتند. اگر Δ یک مجتمع ســادکی روی n رأس باشــد آنگاه به دو صورت می‌توان به مجتمع سادکی Δ ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای خالی از مربع نظیر کرد. یکی از این ایده‌آل‌ها، ایده‌آل ا ستنلی-رایزنر I_Δ می‌باشد که مولدهایش متناظر با ناوجه‌های[۱] Δ هستند و دیگری ایده‌آل وجه‌واره‌ای[۲] $I(\Delta)$ است که تعمیمی از ایده‌آل‌های یالی گراف‌ها ا ست و مولدهایش متناظر با وجه‌واره‌های Δ می‌با شند. در جبر جابجایی ترکیبیاتی با ا ستفاده از خواص ترکیبیاتی مجتمع‌های سادکی، گراف‌ها، ابرگراف‌ها و ... به مطالعه خواص جبری ایده‌آل وابسته به این ا شیا ترکیبیاتی می‌پردازند. یکی از مسائل جذاب در جبر جابجایی ترکیبیاتی که مورد مطالعه محققین زیادی قرارگرفته‌است، تجزیه‌پذیری رأسی مجتمع‌های سادکی است. فرض‌کنید G یک گراف ساده و $\Delta_t(G)$ یک مجتمع سادکی با وجه‌واره‌های متناظر با م سیرهایی به طول t در گراف G با شد $(t \geq 2)$. همچنین فرض‌کنید C_n یک گراف دوری به طول n باشــد. در این مقاله نشــان‌داده‌می‌شــود که $\Delta_t(C_n)$ متروئید، تجزیه‌پذیر رأســی[۳]، پوســته‌پذیر[۴] و کوهن مکاولی است اگر و تنها اگر $n = t$ یا $n = t + 1$.

واژه‌های کلیدی: تجزیه‌پذیر رأسی، متروئید، پوسته‌پذیر، کوهن مکاولی.

۱. مقدمه

فرض‌کنید G یک گراف ساده باشد. فاصله بین دو رأس x و y در G را با نماد $d(x,y)$ نشان می‌دهند که طول کوتاهترین مسیر از x به y است. همچنین مجتمع مسیری $\Delta_t(G)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta_t(G)=\langle\{x_{i_1},\ldots,x_{i_t}\}: x_{i_1},\ldots,x_{i_t} \text{ is a path of length t in G}\rangle$$

فرض‌کنید $S=K[x_1,\ldots,x_n]$ یک حلقه چندجمله‌ای و K یک میدان باشد. ایده‌ال مسیری $I_t(G)$ در حلقه چندجمله‌ای S به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_t(G)=\langle x_{i_1},\ldots,x_{i_t}: x_{i_1},\ldots,x_{i_t} \text{ is a path of length t in G}\rangle$$

اخیراً محققان زیادی روی مجتمع‌های مسیری متناظر با گراف‌ها کارکرده‌اند و نتایج زیادی را روی این مجتمع‌ها به‌دست آورده‌اند که یکی از این نتایج مربوط به ون تویل و جینگ هی می‌باشد که در [۱] نشان‌دادند اگر G یک درخت ریشه‌دار باشد آنگاه برای هر $t\geq 2$، $\Delta_t(G)$ یک درخت سادکی است. این مطلب انگیزه‌ای برای مطالعه خواص جبری مجتمع‌های مسیری متناظر با گراف‌های C_n و L_n ایجاد کرد .

در ادامه این بخش، تعاریف و نتایجی را یادآوری می‌کنیم که بعداً به آن‌ها نیاز داریم.

تعریف ۱-۱: یک مجتمع سادکی Δ روی مجموعه رئوس $\{x_1,\ldots,x_n\}$ یک گردایه از زیرمجموعه‌های $\{x_1,\ldots,x_n\}$ می‌باشد، مشروط بر اینکه هر گاه $F\in\Delta$ باشد، آنگاه همه زیر مجموعه‌های F نیز متعلق به Δ باشند.

هر عضو از Δ را وجه می‌نامند. ماکزیمال وجه‌های Δ تحت رابطه شمول را وجه‌واره می‌نامند. مجموعه همه وجه‌واره‌های Δ را با نماد $\mathcal{F}(\Delta)$ نشان می‌دهند. بعد وجه F به صورت $\dim F=|F|-1$ تعریف می‌شود که $|F|$ تعداد رئوس وجه F است. ماکزیمم بعد وجه‌واره‌های Δ را بعد مجتمع سادکی می‌نامند.

هرگاه بعد همه وجه‌واره‌های Δ یکسان باشد آنگاه مجتمع سادکی Δ را خالص می‌نامند. مجتمع سادکی که تنها دارای یک وجه‌واره باشد را سادک می‌نامند. برای یک وجه F در Δ، $link_\Delta F$ و $\Delta\backslash F$ به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$link_\Delta F=\{G\in\Delta: F\cap G=\emptyset, F\cup G\in\Delta\}$$

و

$$\Delta\backslash F=\{G\in\Delta: F\not\subset G\}$$

ایده‌ال استنلی رایزنر از یک مجتمع سادکی Δ روی مجموعه رئوس $\{x_1,\ldots,x_n\}$ را با نماد I_Δ نشان‌داده و I_Δ ایده‌ال تک‌جمله‌ای خالی از مربع است که مولدهایش متناظر با ناوجه‌های Δ است.

ایده‌ال وجه‌واره‌ای از Δ را با نماد $I(\Delta)$ نشان می‌دهند و $I(\Delta)$ ایده ال تک‌جمله‌ای خالی از مربع است که به‌وسیله تک‌جمله‌ای‌های $x_F=\prod_{x_i\in F} x_i$ تولید می‌شود که F یک وجه از Δ است. متمم وجه F، $\{x_1,\ldots,x_n\}\backslash F$ است که با نماد F^C نشان داده می‌شود. همچنین متمم مجتمع سادکی $\Delta=<F_1,\ldots,F_t>$، $\Delta^C=<{F_1}^c,\ldots,{F_t}^c>$ است. الکساندر دوگان Δ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta^\vee=\{F^C: F\notin\Delta\}$$

به آسانی می‌توان دید $(\Delta^\vee)^\vee=\Delta$.

لم ۱-۲ . فرض‌کنید Δ یک مجتمع سادکی باشد. آنگاه :

$$I_{\Delta^\vee}=I(\Delta^C)$$

اثبات: از آنجاکه

$$(\Delta^\vee)^\vee=\Delta$$

لذا

$$\Delta=\{F^C: F\notin\Delta^\vee\}$$

تک‌جمله‌ای x_F متعلق به $I_{\Delta^\vee}$ است اگر تنها اگر یک مینیمال ناوجه از $\Delta^\vee$ باشد و این معادل این است که بگوییم F^C یک ماکزیمال وجه از Δ است.

تعریف ۱-۳. مجتمع سادکی Δ روی مجموعه رئوس $\{x_1,\ldots,x_n\}$ را متروئید نامند هرگاه برای هر دو وجه‌واره F و G از Δ و هر $x_i\in F$، عنصر $x_j\in G$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(F\backslash\{x_i\})\cup\{x_j\}$ یک وجه‌واره از Δ باشد.

تعریف ۱-۴. مجتمع سادکی Δ روی مجموعه رئوس $\{x_1,\ldots,x_n\}$ تجزیه‌پذیر رأسی است هرگاه Δ یک سادک باشد یا رأسی مانند v وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\Delta\backslash v$ و $link_\Delta v$ هر دو تجزیه‌پذیر رأسی باشند و هیچ وجه از $link_\Delta v$ یک وجه‌واره از $\Delta\backslash v$ نباشد.

تعریف ۱-۵. مجتمع سادکی Δ پوسته پذیر است هر گاه وجه‌واره های آن بتواند به‌صورت $F_1,\ldots,F_r$ مرتب شود و برای هر $1\leq i<j\leq r$ و $v\in F_j\backslash F_i$ وجود داشته باشد $L\in\{1,\ldots,j-1\}$ به‌طوری‌که $F_j\backslash F_L=\{v\}$.

به‌عنوان یکی از نتایج شناخته شده می‌توان به این نتیجه اشاره‌کرد: مجتمع سادکی متروئید ← تجزیه‌پذیر رأسی ← پوسته‌پذیر ← کوهن مکاولی

تبصره ۱-۶. فرض‌کنید $I\neq 0$ یک ایده‌ال همگن از حلقه چندجمله‌ای $S=K[x_1,\ldots,x_n]$ باشد. همچنین فرض‌کنید □مجموعه اعداد طبیعی باشد. برای هر $i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ تعریف زیر را داریم:

$$t_i^s(I)=\max\{j: B_{i,j}^S(I)\neq 0\}$$

و $B_{i,j}^S(I)\neq 0$، i,j - امین عدد بتی مدرج ایده‌ال I (I به‌عنوان S مدول) است .

عدد نظم کاستلنوو- مامفورد[۵] ایده‌ال I به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$reg(I) = \sup\{t_i^s(I) - i : i \in \mathbb{N}\}$$

ایده‌ال I یک تحلیل $d-$ [۶] خطی دارد هرگاه I به‌وسیله چندجمله‌ای‌های همگن از درجه d تولید شود و برای هر $i \geq 0$ و $j \neq i + d$ داشته‌باشیم $\beta_{i,j}^S(I) = 0$. عدد نظم کاستلنوو –مامفورد ایده‌ال I که تحلیل $d-$ خطی دارد برابر با d است.

فرض‌کنید I یک ایده‌ال مدرج از S باشد. ایده‌ال تولید شده به‌وسیله همه چندجمله‌ای‌های همگن از درجه d متعلق به I را با نماد (I_d) نشان می‌دهند.

تعریف ۱-۷. ایده‌ال مدرج I مؤلفه‌ای خطی [۷] است هرگاه مدار برای هر d، (I_d) یک تحلیل خطی داشته باشد.

تعریف۱-۸. مدول مدرج M به‌عنوان $S-$ مدول را دنبا له‌ای کوهن مکاولی می نامند هر گاه یک فیلتر متناهی از $S-$مدول های مدرج

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر M_i/M_{i-1} کوهن مکاولی و بعد کرول مدول‌های خارج قسمتی افزایشی باشد.

$$\dim\left(\frac{M_1}{M_0}\right) < \dim\left(\frac{M_2}{M_1}\right) < \ldots < \dim\left(\frac{M_r}{M_{r-1}}\right)$$

فرض‌کنید

$$I = (x_{1,1},\ldots,x_{1,s_1},\ldots,x_{t,1},\ldots,x_{t,s_t})$$

یک ایده‌ال تک‌جمله‌ای خالی از مربع در S باشد. الکساندر دوگان ایده‌ال I به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I^\vee = (x_{1,1},\ldots,x_{1,s_1}) \cap \ldots \cap (x_{t,1},\ldots,x_{t,s_t})$$

هرزگ و هیبی در [۲] قضیه زیر را ثابت‌کردند:

قضیه ۱-۹. فرض‌کنید I یک ایده‌ال تک‌جمله‌ای خالی از مربع در S باشد.

(i) ایده‌ال I به‌طور مؤلفه‌ای خطی است اگر و تنها اگر $S/I^\vee$ دنباله‌ای کوهن مکاولی باشد.

(ii) ایده‌ال I تحلیل $q-$ خطی دارد اگر و تنها اگر $S/I^\vee$ کوهن مکاولی از بعد $n - q$ باشد.

۲. تجزیه‌پذیری رأسی مجتمع سادکی متناظر با گراف C_n

فر یدی و علی‌لویی در [۳] اعداد بتی $I_t(C_n)$ و $I_t(L_n)$ را محاسبه‌کردند. به‌ویژه در قضیه زیر نشان‌دادند:

قضیه ۲-۱. فرض‌کنید d,p,t,n اعدادی صحیح باشند به‌طوری‌که:

$$0 \leq d < t + 1,\ P \geq 0, n = (t+1)p + d, 2 \leq t \leq n$$

آنگاه:

(۱) بعد پروژکتیو ایده‌ال‌های مسیری متناظر به گراف‌های C_n و L_n به صورت زیر است.

اگر $d \neq 0$ آنگاه $pd(I_t(C_n)) = 2p$. در غیر این صورت

$$pd(I_t(C_n)) = 2p - 1$$

اگر $d \neq t$ آنگاه $pd(I_t(L_n)) = 2p - 1$. در غیر این صورت

$$pd(I_t(L_n)) = 2p$$

(۲) عدد نظم ایده‌ال‌های مسیری متناظر به گراف‌های C_n و L_n به صورت زیر است:

$$reg(I_t(C_n)) = (t-1)p + d + 1$$

اگر $d = t$ آنگاه $reg(I_t(L_n)) = p(t-1) + t$ و اگر $d < t$ آنگاه $reg(I_t(L_n)) = p(t-1) + 1$.

نتیجه اصلی که در این بخش ثابت خواهد شد این است که مجتمع سادکی مسیری $\Delta_t(C_n)$ تجزیه‌پذیر رأسی است اگر و تنها اگر $n = t$ یا $n = t + 1$. برای اثبات این نتیجه به لم‌ها و گزاره‌های زیر نیاز داریم.

لم ۲-۲. فرض‌کنید $\Delta_t(L_n)$ یک مجتمع سادکی روی رئوس $\{x_1, \ldots, x_n\}$ و $2 \leq t \leq n$. آنگاه $\Delta_t(L_n)$ تجزیه‌پذیر رأسی است.

اثبات: اگر $t = n$، آنگاه $\Delta_t(L_n)$ یک مجتمع سادکی است که تجزیه‌پذیر رأسی است.

فرض‌کنید $2 \leq t < n$، آنگاه داریم:

$$\Delta_t(L_n) = \langle\{x_1,\ldots,x_t\},\{x_2,\ldots,x_{t+1}\},\ldots,\{x_{n-t+1},\ldots,x_n\}\rangle$$

پس:

$$\Delta_t(L_n)\setminus x_n = \langle\{x_1,\ldots,x_t\},\{x_2,\ldots,x_{t+1}\},\ldots,\{x_{n-t},\ldots,x_{n-1}\}\rangle$$

اکنون با استفاده از استقراء روی تعداد رئوس L_n، اثبات را کامل می‌کنیم. بنابر فرض استقراء $\Delta_t(L_n)\setminus x_n$ تجزیه‌پذیر رأسی است. از طرفی دیگر

$$link_{\Delta t(L_n)}\{x_n\} = \langle\{x_{n-t+1},\ldots,x_{n-1}\}\rangle$$

یک مجتمع سادکی است که تجزیه‌پذیر رأسی است. به‌آسانی می‌توان دید که هیچ وجه از $link_{\Delta t(L_n)}\{x_n\}$ یک وجه‌واره از $\Delta_t(L_n)\setminus x_n$ نیست. بنابراین $\Delta_t(L_n)$ تجزیه‌پذیر رأسی است.

لم ۲-۳. فرض‌کنید $\Delta_2(C_n)$ یک مجتمع سادکی روی رئوس $\{x_1, \ldots, x_n\}$ باشد. آنگاه $\Delta_2(C_n)$ تجزیه‌پذیر رأسی است.

اثبات: از آنجاکه

$$\Delta_2(C_n) = \langle\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\},\ldots,\{x_{n-1},x_n\},\{x_n,x_1\}\rangle$$

بنابراین

$$\Delta_2(C_n)\setminus x_n=\langle\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\},\ldots,\{x_{n-2},x_{n-1}\}\rangle$$

حال بنابر لم ۲-۲، $\Delta_2(C_n)\setminus\{x_n\}$ تجزیه‌پذیر رأسی است. از طرفی دیگر، مجتمع سادکی

$$link_{\Delta_2(C_n)}\{x_n\}=<\{x_{n-1}\},\{x_1\}>$$

تجزیه‌پذیر رأسی است و هیچ وجه از $link_{\Delta_2(C_n)}\{x_n\}$ یک وجه‌واره از $\Delta_2(C_n)\setminus x_n$ نیست و بنابراین $\Delta_2(C_n)$ تجزیه‌پذیر رأسی است.
برای مثال مجتمع سادکی

$$\Delta_2(C_5)=<\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\},\{x_3,x_4\},\{x_4,x_5\},\{x_5,x_1\}>$$

روی رئوس $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از نرم‌افزار مکالی۲[۸] که در شکل ۱ آمده است، مشاهده می‌شود که مجتمع سادکی $\Delta_2(C_5)$ تجزیه‌پذیر راسی است.

لم ۲-۴. فرض کنید $\Delta_t(C_n)$ یک مجتمع سادکی روی رئوس $\{x_1,\ldots,x_n\}$ و $3\le t\le n-2$ باشد آنگاه $\Delta_t(C_n)$ کوهن مکاولی نیست.

اثبات: کافیست نشان دهیم برای هر $3\le t\le n-2$ ، $I_{\Delta_t(C_n)^\vee}$ تحلیل خطی ندارد. بنابر لم ۲-۱ می‌دانیم

$$I_{\Delta_t(C_n)^\vee}=\mathrm{I}(\Delta_t(C_n)^C)$$

و بنا بر قضیه ۲-۱

$$reg\big(I_{\Delta_t(C_n)^\vee}\big)=(n-t-1)p+d+1$$

بنابراین برای هر $3\le t<n-2$، $reg\big(I_{\Delta_t(C_n)^\vee}\big)\ne n-t$ و بنا بر قضیه ۱-۹، $\Delta_t(C_n)$ کوهن مکاولی نیست.

گزاره ۲-۵. فرض کنید $\Delta_t(C_n)$ یک مجتمع سادکی روی رئوس $\{x_1,\ldots,x_n\}$ باشد به طوری که $t\ge 3$. آنگاه $\Delta_t(C_n)$ تجزیه پذیر رأسی است اگر و تنها اگر $n=t$ یا $n=t+1$.

اثبات: بنا بر لم ۲-۴ کافی است نشان دهیم که اگر $n=t$ یا $n=t+1$ آنگاه $\Delta_t(C_n)$ تجزیه‌پذیر رأسی است.
اگر $n=t$ آنگاه $\Delta_t(C_n)$ یک مجتمع سادکی است که تجزیه‌پذیر رأسی است. اگر $t=n-1$ آنگاه

$$\Delta_{n-1}(C_n)=\langle\{x_1,\ldots,x_{n-1}\},\{x_2,\ldots,x_n\},\{x_3,\ldots,x_n,x_1\},\ldots,\{x_n,x_1,\ldots,x_{n-2}\}\rangle$$

اکنون با استفاده از استقراء روی تعداد رئوس C_n، نشان می‌دهیم که $\Delta_{n-1}(C_n)$ تجزیه‌پذیر رأسی است. با توجه به وجه‌واره‌های $\Delta_{n-1}(C_n)$،

$$\Delta_{n-1}(C_n)\setminus x_n=\langle\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}\rangle$$

یک مجتمع سادکی است که تجزیه‌پذیر رأسی است. از طرفی دیگر

$$link_{\Delta_{n-1}(C_n)}\{x_n\}=\langle\{x_1,\ldots,x_{n-2}\},\ldots,\{x_{n-1},x_1,\ldots,x_{n-3}\}\rangle=\Delta_{n-2}(C_{n-1})$$

بنابر فرض استقراء $link_{\Delta_{n-1}(C_n)}\{x_n\}$ تجزیه‌پذیر رأسی است. به‌آسانی می‌توان دید که هیچ وجه از $link_{\Delta_{n-1}(C_n)}\{x_n\}$ یک وجه‌واره از $\Delta_{n-1(C_n)}\setminus x_n$ نیست. بنابراین $\Delta_{n-1(C_n)}$ تجزیه‌پذیر رأسی است.
برای مثال مجتمع سادکی

$$\Delta_3(C_4)=<\{x_1,x_2,x_3\},\{x_2,x_3,x_4\},\{x_3,x_4,x_1\},\{x_4,x_1,x_2\}>$$

روی رئوس $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از نرم‌افزار مکالی۲ که در شکل ۱ آمده است، مشاهده می‌شود که مجتمع سادکی $\Delta_3(C_4)$ تجزیه‌پذیر راسی است.

۳. شرایط معادل متروئید بودن و تجزیه‌پذیر رأسی روی مجتمع مسیر متناظر با گراف C_n

به‌عنوان نتیجه اصلی این بخش نشان داده می‌شود که مجتمع مسیری $\Delta_t(C_n)$ متروئید، تجزیه‌پذیر رأسی، کوهن مکاولی است اگر و تنها اگر $n=t$ یا $n=t+1$.

گزاره ۳-۱. مجتمع سادکی $\Delta_2(C_n)$ متروئید است اگر و تنها اگر $n=3$ یا $n=4$.

اثبات: اگر $n=3$ یا $\mathrm{n}=4$ آنگاه واضح است که $\Delta_2(C_n)$ یک متروئید است. اکنون ثابت می‌کنیم که برای هر $n\ge 5$ ، $\Delta_2(C_n)$ متروئید نیست. کافیست دو وجه‌واره $\{x_1,x_2\}$ و $\{x_{n-1},x_n\}$ را در نظر بگیریم. آنگاه:

$$(\{x_1,x_2\}\setminus\{x_1\})\cup\{x_{n-1}\}=\{x_2,x_{n-1}\}$$

و

$$(\{x_1,x_2\}\setminus\{x_1\})\cup\{x_n\}=\{x_2,x_n\}$$

ازآنجاکه $\{x_2,x_{n-1}\}$ و $\{x_2,x_n\}$ وجه‌واره‌های $\Delta_2(C_n)$ نیستند، نتیجه می‌شود $\Delta_2(C_n)$ متروئید نیست.

اکنون آماده هستیم قضیه اصلی این مقاله را ثابت کنیم.

قضیه ۳-۲. فرض‌کنید $t\ge 3$، آنگاه شرایط زیر معادلند:

(i) $\Delta_t(C_n)$ متروئید است.

(ii) $\Delta_t(C_n)$ تجزیه‌پذیر رأسی است.

(iii) $\Delta_t(C_n)$ پوسته‌پذیر است.

(iv) $\Delta_t(C_n)$ کوهن مکاولی است.

(v) $n=t$ یا $n=t+1$.

اثبات: $(i)\to(ii)$، $(ii)\to(iii)$، $(iii)\to(iv)$ نتایج شناخته‌شده می‌باشند.

بنابر لم ۲-۴ و گزاره ۲-۵، (iv) به (v) نتیجه می‌شود. اگر $n = t$ آنگاه $\Delta_t(C_n)$ یک مجتمع سادکی است که متروئید می‌باشد. اگر $n = t + 1$، آنگاه

$$\Delta_t(C_n) = \langle \{x_1, \ldots, x_t\}, \{x_2, \ldots, x_{t+1}\}, \{x_3, \ldots, x_{t+1}, x_1\}, \ldots, \{x_{t+1}, x_1, \ldots, x_{t-1}\} \rangle$$

با توجه به وجه‌واره‌های $\Delta_t(C_n)$ برای هر دو وجه‌واره F و G از $\Delta_t(C_n)$، $|F \cap G| = t - 1$.

ادعا می‌کنیم که برای هر دو وجه‌واره F و G از $\Delta_t(C_n)$ و هر $x_i \in F$، یک عضو $x_j \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $(F \setminus \{x_i\}) \cup \{x_j\}$ یک وجه‌واره از $\Delta_t(C_n)$ باشد. باید دو حالت را در نظر بگیریم. اگر $x_i \in F$ و $x_i \notin G$ آنگاه عضو $x_j \in G$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $x_j \notin F$. بنابراین $(F \setminus \{x_i\}) \cup \{x_j\} = G$ یک وجه‌واره از $\Delta_t(C_n)$ است. اگر $x_i \in F$, $x_i \in G$ آنگاه عضو $x_j \in G$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که x_j همان x_i است. پس $(F \setminus \{x_i\}) \cup \{x_i\} = F$ یک وجه‌واره از $\Delta_t(C_n)$ است.

سپاسگزاری

نویسندگان این مقاله از هم‌فکری داوران محترم و اعضای هیئت تحریریه مجله سامانه‌های پردازشی و چندرسانه‌ای هوشمند دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان کمال سپاسگزاری را دارند.

```
i1 : loadPackage"SimplicialDecomposability"
o2 = SimplicialDecomposability
o2 : Package
i2 : S=QQ[x_1..x_5]
o3 = S
o3 : PolynomialRing
i3 : D1=simplicialComplex{face{x_1,x_2},face{x_2,x_3},face{x_3,x_4},face{x_4,x_5},face{x_1,x_5}}
o4 = | x_4x_5 x_1x_5 x_3x_4 x_2x_3 x_1x_2 |
o4 : SimplicialComplex
i4 : isVertexDecomposable D1
o5 = true
i5 : D2=simplicialComplex{face{x_1,x_2,x_3},face{x_2,x_3,x_4},face{x_1,x_3,x_4},face{x_1,x_2,x_4}}
o6 = | x_2x_3x_4 x_1x_3x_4 x_1x_2x_4 x_1x_2x_3 |
o6 : SimplicialComplex
i6 : isVertexDecomposable D2
o7 = true
 i7 :
```

شکل ۱: تجزیه‌پذیری راسی مجتمع‌های سادکی $\Delta_2(C_5)$ و $\Delta_3(C_4)$ با استفاده از نرم‌افزار مکالی ۲

References

[1] J. He and A. Van Tuyl, "Algebraic properties of the path ideals of a tree", Comm. Algebra. 38 (2010), 1725-1742.

[2] J. Herzog and T. Hibi, "Component wise linear ideals", Nagoya Math J. 153 (1999), 141-153.

[3] A, Aliloee and S.Faridi, "Betti numbers of the path ideals of cycles and lines", Pre Print (2011).

پی‌نوشت

۱. Non-faces
۲. Facet ideal
۳. Vertex decomposable
۴. Shellable
۵. Castelnuovo- Mumford regularity
۶. Resolution
۷. Component wise linear
۸. Macaulay2