



Hermite-Hadamard (HH) Integral Inequality for M, Q Pre-invex Function

Mehdi Asadi

Associate Professor, Department of Mathematics, Zanzan Branch, Islamic Azad University, Zanzan, Iran
Masadi.azu@gmail.com; me.asadi@iaau.ac.ir

Abstract: In recent years, convexity theory has experienced rapid development. Many researchers have expanded it. A notable generalization of the convex function is the Inox function introduced and studied by Hanson. This has greatly expanded the role of inox in optimization. Ben and Mond introduced a class of functions called generalizations of pre-Inox functions. Regarding change inequalities and related problems in recent years, Pite and Postloche introduced the concept of pseudo pre-invex, and applied it in theoretical mechanics and nonlinear optimization. Later, Pite and Antchak introduced this concept of invex, and applied it to vector optimization. This shows that pre-invexity plays an important role in the development of various fields of pure and applied sciences. In this article, we first introduce the concept of m, q -pre-invex and then state and prove the Hermit-Hadamard theorem for it, and we will state that the previously obtained inequalities are a direct result of our main theorem. In this article, we first introduce the concept of m, q invex sets and m, q pre-invex functions. Then state and prove the Hermit-Hadamard theorem for it, and state that the previous inequalities are a direct result of our main theorem.

Introduction: Quantum calculus is known as the study of differential and integral calculus without restrictions. Euler (1783-1707) was the first to study quantum calculus. He introduced q in Newton's infinite series compositions. In the early 20th century, the study of quantum calculus was started by Jackson. In quantum computing, we obtain mathematical equivalents of q objects that can be recovered as $q \rightarrow 1$. Note that quantum calculus is a subset of time scale calculus. The time scale of calculus provides a unified framework for the study of dynamical equations in both discrete and continuous domains. That in quantum calculus, we deal with a specific time scale called the q time scale. Quantum calculus is a bridge between mathematics and physics. Due to the significant applications of quantum computing in mathematics and physics, this issue has been the focus of many researchers. As a result, quantum calculus has emerged as a fascinating field. In recent years, convexity theory has experienced rapid development. Many researchers have expanded it. A notable generalization of the convex function is the inox function, which was introduced and studied by Hanson [1]. This has greatly expanded the role of inox in optimization. Ben and Mond [2] introduced a class of functions called generalizations of pre-invex functions. This fundamental result of Hermit and Hadamard (HH) has obtained by many mathematicians, and as a result, this inequality has been extended by Noor in various ways using new ideas and obtained the Hermit-Hadamard inequality for pre-invex functions. Regarding variational inequalities and related problems in recent years, Pite and Postloche [3],[4] and [5] introduced the concept of pseudo pre-invex, and applied it in theoretical mechanics and nonlinear optimization. Later, Pite and Antchak [6] introduced this concept of inconvexity, and applied it in vector optimization. This shows that pre-invex plays an important role in the development of various fields of pure and applied sciences. For more details on the quantum calculus see references [7].

Method

No method applicable.

Results and Discussion: In This article, we improve the Hermite-Hadamard (HH) integral inequality for m, q -preinvex functions.

Assuming $m = 1$, Theorem 3.1 of the article [8], that is, relation (3) is obtained. Assuming $q \rightarrow 1$, the main theorem of the article [9] and $m = 1$ and $q \rightarrow 1$, Hermit Hadamard's main inequality is obtained.

Keywords: Hermite-Hadamard integral inequality, m -convex function, convex functions.

دوره چهارم، بهار ۱۴۰۲
شماره اول، صص: ۱۱-۱۶

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۰۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۱۹

نامساوی هرمیت - هادامارد برای توابع m - پیش اینوکس

مهدی اسدی

دانشیار، گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران.
masadi.azu@gmail.com; me.masadi@iau.ac.ir

چکیده: در سال‌های اخیر، نظریه تحدب توسعه سریعی را تجربه کرده‌است. بسیاری از محققان آن را گسترش داده‌اند. تعمیم قابل توجه تابع محدب، تابع اینوکس است که توسط هانسون معرفی و مطالعه شده‌است. این کار نقش اینوکسی را در بهینه‌سازی بسیار گسترش داده است. بن و موند دسته‌ای از توابع را معرفی کردند که به عنوان تعمیم توابع پیش اینوکس نامیده می‌شود. در خصوص نامساوی‌های تغییراتی و مشکلات مرتبط در سال‌های اخیر، پسته و پوستلوچه مفهوم شبه پیش اینوکسی را معرفی کردند. و آن را در مکانیک نظری و بهینه‌سازی غیرخطی به کار بردند. بعدها پسته و آنتچاک این مفهوم اینوکسی را معرفی، و آن را در بهینه‌سازی برداری اعمال کردند. این نشان می‌دهد که پیش اینوکسی نقش مهمی در توسعه رشته‌های مختلف علوم محض و کاربردی دارد. در این مقاله ابتدا مفهوم m, q -پیش اینوکس معرفی و سپس قضیه هرمیت - هادامارد را برای آن بیان و ثابت می‌کنیم و بیان خواهیم کرد که نامساوی‌های قبلی به دست آمده نتیجه مستقیمی از قضیه اصلی ما می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: نامساوی انتگرالی هرمیت - هادامارد، تابع m محدب، تابع محدب.

۱. مقدمه

حساب کوانتومی به عنوان مطالعه حساب دیفرانسیل و انتگرال بدون محدودیت شناخته شده است. اوایل (۱۷۰۷-۱۷۸۳)، اولین کسی بود که مطالعه حساب کوانتومی را شروع کرد. او q را در تغییرات‌های سری نامتناهی نیوتن معرفی نمود. در اوایل قرن بیستم مطالعه حساب کوانتومی توسط جکسون شروع شد. در محاسبات کوانتومی، شباهت‌های ریاضی q را به دست می‌آوریم. اشیایی که می‌توان آن‌ها را به صورت $1 \rightarrow q$ بازیابی کرد. حساب کوانتومی زیرمجموعه حساب مقیاس زمانی است. زمان، مقیاس حساب یک چارچوب یکپارچه برای مطالعه معادلات دینامیکی در هر دو حوزه گسسته و پیوسته فراهم می‌کند. که در حساب کوانتومی، ما با یک مقیاس زمانی خاص سروکار داریم که به آن مقیاس زمانی q می‌گویند. حساب کوانتومی به منزله پلی بین ریاضی و فیزیک است. با توجه به کاربردهای قابل توجه حساب کوانتومی در ریاضیات و فیزیک، این موضوع مورد توجه ویژه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. در نتیجه، حساب کوانتومی به عنوان یک میدان جذاب، ظاهر شده است.

در سال‌های اخیر، نظریه تحدب توسعه سریعی را تجربه کرده است. بسیاری از محققان آن را گسترش داده‌اند. تعمیم قابل توجه تابع محدب، تابع اینوکس است که توسط هانسون [۱] معرفی و مطالعه شد. این کار نقش اینوکسی را در بهینه‌سازی بسیار گسترش داده است. بن و موند [۲] دسته‌ای از توابع را معرفی کردند که به عنوان تعمیم توابع پیش اینوکس نامیده می‌شود.

در خصوص نامساوی‌های تغییراتی و مشکلات مرتبط در سال‌های اخیر، پیتِه و پوستلوچه [۵]، [۳] و [۴] مفهوم شبه پیش اینوکسی را معرفی کردند. و آن را در مکانیک نظری و بهینه‌سازی غیرخطی به کار بردند. بعدها پیتِه و آنتچاک [۶] این مفهوم اینوکسی را معرفی، و آن را در بهینه‌سازی برداری اعمال کردند. این نشان می‌دهد که پیش اینوکسی نقش مهمی در توسعه رشته‌های مختلف علوم محض و کاربردی دارد. برای جزئیات بیشتر در مورد حساب کوانتومی منابع مقاله [۷] را ببینید.

۲. تعاریف و پیش نیازها

تعریف ۲,۱ مجموعه $S \subseteq R$ نسبت به نگاشت $\eta: S \times S \rightarrow R$ اینوکس گفته می‌شود هرگاه

$$\forall x, y \in S \wedge t \in [0,1] \Rightarrow y + t\eta(x, y) \in S.$$

واضح است که هر مجموعه محدب نسبت به نگاشت $\eta(x, y) = x - y$ اینوکس هست اما مجموعه اینوکسی وجود دارد که محدب نیست.

تعریف ۲,۲ فرض کنید $S \subseteq R$ مجموعه اینوکس نسبت به نگاشت $\eta: S \times S \rightarrow R$ باشد در این صورت تابع $f: S \rightarrow R$ پیش اینوکسی نسبت به η گفته می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in S$ و $t \in [0,1]$ داشته باشیم

$$f(y + t\eta(x, y)) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \quad (1)$$

هر تابع محدب نسبت به نگاشت $\eta(x, y) = x - y$ پیش اینوکس است اما برعکس آن صحیح نیست.

نامساوی هرمیت - هادامارد برای توابع پیش اینوکس توسط نور [۷] معرفی شده است.

$$f\left(a + \frac{1}{2}\eta(b, a)\right) \leq \frac{1}{\eta(b, a)} \int_a^{a+\eta(b, a)} f(t) dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \quad (2)$$

مجموعه اینوکس S شامل قطعه خط بین زوج نقاط x و $x + \eta(y, x)$ برای هر x و y از S چرا که

$$x + t\eta(y, x) = (1-t)x + t(x + \eta(y, x)).$$

مثال ۲,۳ [۷] مجموعه $S = (-\infty, a] \cup [a, \infty)$ وقتی که $a \geq 0$ نسبت به نگاشت $\eta(y, x) = x$ اینوکس می‌باشد چرا که شامل ترکیبات خطی زیر است

$$x + t\eta(y, x) = (1+t)x, \quad \forall x, y \in S \wedge t \in [0,1].$$

مثال ۲,۴ [۷] تابع $f(x) = -|x|$ روی مجموعه $D = R$ نسبت به نگاشت زیر پیش اینوکس می‌باشد:

$$\eta(y, x) = \begin{cases} y - x, & xy \geq 0; \\ x - y, & xy > 0. \end{cases}$$

فرض کنید $I = [a, b] \subset R$ و $0 < q < 1$ باشد $-q$ مشتق تابع $f: I \rightarrow R$ در نقطه $x \in I$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۲,۵ $-q$ مشتق تابع پیوسته $f: I \rightarrow R$ در نقطه $x \in I$ برای $a \neq x$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_a D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx + (1-q)a)}{(1-q)(x-a)}$$

و اگر $a = 0$ باشد در این صورت ${}_a D_q f(x) = D_q f(x)$ و مشتق f عبارت خواهد بود از

$$D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$$

تبصره ۲,۶

$${}_a D_q c = \frac{c - c}{(1 - q)(x - a)} = 0$$

مثال ۲,۱۱ برای $s \in R$

$$\int_a^x (t - a)_a^s d_q x = \frac{1 - q}{1 - q^{s+1}} (x - a)^{s+1}$$

$$\int_0^1 t_a d_q x = \frac{1 - q}{1 - q^2} = \frac{1}{1 + q}$$

$$\int_0^1 (1 - t)_a d_q x = \frac{q}{1 + q}$$

نامساوی هرمیت - هادامارد برای توابع پیش اینوکس

q -انتگرال پذیر توسط نور و همکارانش در [7] برای

$$\eta(b, a) \geq 0$$

$$f\left(a + \frac{1}{2}\eta(b, a)\right) \quad (3)$$

$$\leq \frac{1}{\eta(b, a)} \int_a^{a+\eta(b, a)} f(t)_a d_q t$$

$$\leq \frac{qf(a) + f(b)}{2}$$

$${}_a D_q (cf(x) + g(x)) = c {}_a D_q f(x) + {}_a D_q g(x)$$

مثال ۲,۷

$${}_a D_q x^2 = \frac{x^2 - (qx + (1 - q)a)^2}{(1 - q)(x - a)}$$

$$= (1 + q)x + (1 - q)a$$

و برای $x = a$

$$\lim_{q \rightarrow 1} {}_a D_q x^2 = 2a.$$

مثال ۲,۸ برای $s \in R$

$${}_a D_q (x - a)^s = \frac{1 - q^s}{1 - q} (x - a)^{s-1}$$

تعریف ۲,۹- q -انتگرال تابع پیوسته $f: I \rightarrow R$ در روی I به صورت زیر

تعریف می شود:

$$\int_a^x f(x)_a d_q x = \int_a^{\infty} f(x)_a d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - q)(x - a) q^n f(q^n x + (1 - q^n)a).$$

و اگر $a = 0$ باشد در این صورت

$$\int_0^x f(x)_0 d_q x = (1 - q)x \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x).$$

برای $c \in (a, x)$ ، q -انتگرال به فرم زیر خواهد بود

$$\int_c^x f(x)_a d_q x = \int_a^x f(x)_a d_q x - \int_a^c f(x)_a d_q x$$

تبصره ۲,۱۰- خواص مقدماتی q -انتگرال نیز شبیه حالت معمولی به-

صورت زیر است:

1. ${}_a D_q \int_a^x f(x)_a d_q x = f(x)$
2. $\int_c^x {}_a D_q f(t)_a d_q t = f(x) - f(c)$
3. $\int_a^x (kf(x) + g(x))_a d_q x = k \int_a^x f(x)_a d_q x + \int_a^x g(x)_a d_q x$

۳ نتایج اصلی

در این بخش ابتدا مفهوم m, q -پیش اینوکس معرفی و سپس قضیه هرمیت - هادامارد رو برای آن بیان و ثابت می کنیم و بیان می کنیم که نامساوی های قبلی نتیجه مستقیمی از قضیه اصلی ما می باشد.

تعریف ۳,۱ فرض کنید $m \in [0, 1]$ باشد. تابع حقیقی f روی مجموعه اینوکس C از R را m, q -پیش اینوکس می گوییم هرگاه برای هر $x, y \in C$ و $t, m \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$f(mx + t\eta_m(y, x)) \leq tf(y) + m(1 - t)f(x)$$

برای طرف دیگر با توجه به

$$f(ma + t\eta_m(b, a)) \leq tf(b) + m(1-t)f(a)$$

داریم:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(ma + t\eta_m(b, a))_a d_q t \\ & \leq \int_0^1 (tf(b) + m(1-t)f(a))_a d_q t \\ & = \left(\frac{f(b)}{q+1} + \frac{mf(a)q}{q+1} \right) \end{aligned}$$

تعریف ۳.۲

$$[n]_q = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q - 1} & n \in \mathbb{N} \\ \frac{q^n - 1}{q - 1} & n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

مثال ۳.۳ برای برای $s+1$ غیر صفر داریم:

$$\int_a^x (t-a)_a^s d_q x = \frac{(x-a)^{s+1}}{[s+1]_q}$$

نتیجه ۳.۴ با مفروضات قضیه قبل داریم:

$$\begin{aligned} & f\left(ma + \frac{1}{2}\eta_m(b, a)\right) \\ & \leq \frac{1}{\eta_m(b, a)} \int_{ma}^{ma+\eta_m(b, a)} f(t)_a d_q t \\ & \leq \left(\frac{f(b) + qmf(a)}{[2]_q} \right). \end{aligned}$$

نتیجه ۴

با فرض $m=1$ قضیه 3.1 مقاله [۸] یعنی رابطه (۳) به دست می‌آید. با فرض $q \rightarrow 1$ قضیه اصلی مقاله [۹] و $m=1$ و $q \rightarrow 1$ نامساوی اصلی هرمیت هادامارد حاصل می‌شود.

به‌عنوان کاربردی از این موارد می‌توان به قاعده سیمپسون در تقریب اشاره کرد و نتیجه چون شبیه قضیه قبل اثبات می‌شود لذا برای دیدن نتایج مشابه به [۱۰] رجوع کنید.

References

- [1] M. A. Hanson, "On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 80, no. 2, 1981, doi: 10.1016/0022-247X(81)90123-2.
- [2] A. Ben-I. and B. Mond, "What is invexity?," *J. Aust. Math. Soc. Ser. B. Appl. Math.*, vol. 28, no. 1, 1986, doi: 10.1017/s0334270000005142.

وقتی که $\eta_m(y, x) = x - my$ تبدیل به m محدب می‌شود و وقتی که $m=1$ باشد تبدیل به محدب با نگراشت

$$\eta_m(y, x) = \eta_1(y, x) = \eta(y, x) = x - y$$

خواهد شد.

قضیه ۳.۲ فرض کنید $m \in [0, 1]$ و $C \subseteq \mathbb{R}$ و تابع $f: C \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع m, q -پیش اینوکس روی بازه C و $a, b \in C$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} & f\left(ma + \frac{1}{2}\eta_m(b, a)\right) \\ & \leq \frac{1}{\eta_m(b, a)} \int_{ma}^{ma+\eta_m(b, a)} f(t)_a d_q t \\ & \leq \left(\frac{f(b) + qmf(a)}{q+1} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} & f\left(ma + \frac{1}{2}\eta_m(b, a)\right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & f(ma + t\eta_m(b, a)) \\ & + \\ & f(ma + (1-t)\eta_m(b, a)) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

آن‌گاه با انتگرال‌گیری داریم:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f\left(ma + \frac{1}{2}\eta_m(b, a)\right)_a d_q t \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & \int_0^1 f(ma + t\eta_m(b, a))_a d_q t \\ & + \\ & \int_0^1 f(ma + (1-t)\eta_m(b, a))_a d_q t \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} & f\left(ma + \frac{1}{2}\eta_m(b, a)\right) \\ & \leq \frac{1}{2\eta_m(b, a)} \int_{ma}^{ma+\eta_m(b, a)} f(u)_a d_q u \\ & \quad - \frac{1}{2\eta_m(b, a)} \int_{ma+\eta_m(b, a)}^{ma} f(u)_a d_q u \\ & = \frac{1}{\eta_m(b, a)} \int_{ma}^{ma+\eta_m(b, a)} f(t)_a d_q t \end{aligned}$$

- [3] Pitea A. and Postolache M., “Minimization of vector sofcurvilinear functional son these condorderjetbundle: sufficient efficiency conditions,” *Optim. Lett.*, vol. 8, no. 6, pp. 1657--1669, 2012.
- [4] Pitea A. and Postolache M., “Duality theorems for a newclass of multitime multiobjective variational problems,” *J. Glob. Optim.*, vol. 54, no. 1, pp. 47--58, 2012.
- [5] Pitea A. and Postolache M., “Minimization of vector sofcurvilinear functional sonthe second or derjetbundle,” *Optim. Lett.*, vol. 6, no. 3, pp. 459--470, 2012.
- [6] A. Pitea and T. Antczak, “Proper efficiency and duality for a new class of nonconvex multitime multiobjective variational problems,” *J. Inequalities Appl.*, vol. 2014, no. 1, 2014, doi: 10.1186/1029-242X-2014-333.
- [7] M. B. Khan, H. M. Srivastava, P. O. Mohammed, J. E. Macías-Díaz, and Y. S. Hamed, “Some new versions of integral inequalities for log-preinvex fuzzy-interval-valued functions through fuzzy order relation,” *Alexandria Eng. J.*, vol. 61, no. 9, 2022, doi: 10.1016/j.aej.2021.12.052.
- [8] M. A. Noor, K. I. Noor, and M. U. Awan, “Some quantum integral inequalities via preinvex functions,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 269, 2015, doi: 10.1016/j.amc.2015.07.078.
- [9] G. Amirbostaghi, M. Asadi, and M. R. Mardanbeigi, “m-Convex Structure on b-Metric Spaces,” *Filomat*, vol. 35, no. 14, 2021, doi: 10.2298/FIL2114765A.
- [10] M. A. Ali, M. Abbas, H. Budak, P. Agarwal, G. Murtaza, and Y. M. Chu, “New quantum boundaries for quantum Simpson’s and quantum Newton’s type inequalities for preinvex functions,” *Adv. Differ. Equations*, vol. 2021, no. 1, 2021, doi: 10.1186/s13662-021-03226-x.

پی نوشت

- 1 F. H. Jackson
- 2 .Invex
3. Preinvex
- 4 Pitea
- 5 Postolache