



قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله با معادله فوکر پلانک و لم ایتو

(مطالعه موردی: قراردادهای اختیار معامله سکه طلا در بورس کالای ایران)

^۱ امیر فراهانی

^۲ محمود رحمانی

^۳ فرهاد غفاری

^۴ بهزاد پرویزی

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۱۲/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۴/۰۲/۰۲

چکیده:

اوراق اختیار معامله یکی از ابزارهای نوین مالی و به‌عنوان ابزاری برای مدیریت ریسک و سودآوری در بازار سرمایه مطرح بوده و قیمت‌گذاری این اوراق با روش قیمت‌گذاری بلک شولز بسیار متداول است. از مهم‌ترین مفروضات مدل بلک شولز، تبعیت تغییرات قیمت دارایی پایه از حرکت براونی هندسی بوده که نمی‌تواند ویژگی‌های آماری سری زمانی را در تمام حالات بیان کند. هدف این پژوهش، ارائه مدل جدید قیمت‌گذاری اختیار معامله سکه طلا در بورس کالای ایران است و این مدل مبتنی بر مدل بلک شولز اصلی و زمانی است که تغییرات قیمت دارایی پایه از حرکت براونی کسری تبعیت می‌نماید. در این پژوهش با به‌کارگیری روش حل معادله دیفرانسیل فوکر پلانک و لم ایتو، برای قیمت‌گذاری اختیار معامله مدل جدید و متفاوت ارائه گردیده است. دقت بیشتر قیمت‌گذاری، تعمیم مدل بلک شولز کلاسیک و درنهایت اعمال محدودیت‌های کمتر، از مزیت‌های مدل جدید می‌باشد. جهت مقایسه کارایی مدل جدید با قیمت‌گذاری اختیار معامله خرید تحت مدل اصلی بلک شولز و قیمت‌های واقعی بازار، از اطلاعات یازده قرارداد اختیار معامله سکه طلا در بازار بورس کالای ایران از فروردین ۱۴۰۱ تا اسفندماه ۱۴۰۲ به‌صورت روزانه و آزمون مقایسه‌ای دو گروه مستقل ناپارامتریک من ویتنی استفاده گردید. نتایج نشان داد؛ امکان ارائه‌ی مدلی جدید برای قیمت‌گذاری اختیار با به‌کارگیری معادله فوکر پلانک و لم ایتو امکان‌پذیر بوده و در سطح ۹۵٪ بر اساس معیار MAPE (میانگین درصد قدر مطلق خطا) تفاوت معناداری بین میانگین امتیازها در دو مدل وجود نداشته و این دو مدل کارایی یکسانی داشته‌اند.

کلمات کلیدی:

اختیار معامله اروپایی، توان هرست، حرکت براونی کسری، روش فوکر پلانک، معادله قیمت‌گذاری بلک - شولز کسری.

۱- دانشجوی دکتری، گروه مالی، واحد سندانج، دانشگاه آزاد اسلامی، سندانج، ایران. farahani90@yahoo.com

۲- گروه مدیریت مالی، واحد سندانج، دانشگاه آزاد اسلامی، سندانج، ایران. (نویسنده مسئول) mahmood80933@yahoo.com

۳- گروه اقتصاد، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. farhad.ghaffari@yahoo.com

۴- گروه حسابداری، واحد سندانج، دانشگاه آزاد اسلامی، سندانج، ایران. parvizibehzadaccounting@yahoo.com

قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله با معادله .../فراهانی، رحمانی، غفاری و پرویزی

مقدمه

فعالان بازار سرمایه به دلیل شرایط حاکم بر بازارها، نوسانات و عدم اطمینان از وضعیت آتی بازار، همواره با ریسک‌های مواجه هستند که ممکن است آن‌ها را در معرض زیان قرار دهد. راهکارها و ابزارهای مناسبی برای پوشش ریسک‌های ناشی از نوسان قیمت‌ها اتخاذ می‌شود، یکی از این ابزارهای اوراق مشتقه است و از ابزارهای مشتقه در بازارهای مالی، می‌توان به قراردادهای آتی^۱ و قراردادهای اختیار معامله^۲ اشاره کرد (امیری، ۱۳۹۹). قراردادهای اختیار معامله بر روی دارایی‌های مختلف مالی و کالا معامله می‌شود (بهرادمهر، ۱۴۰۱). به دلیل آنکه قراردادهای اختیار معامله سکه در ایران جزء ابزارهای نوین در بازار بورس کالا محسوب می‌شود، نحوه قیمت‌گذاری این قراردادها و بررسی فرصت آربیتراژ^۳ این بازار برای سرمایه‌گذاران موردنیاز تلقی می‌شود (بهرادمهر و همکاران، ۱۴۰۱). یکی از متداول‌ترین مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معاملات، مدل قیمت‌گذاری بلک - شولز است، فیشر بلک^۴ و میرون شولز^۵ حرکت براونی هندسی را برای مدل‌سازی قیمت اوراق مشتقه، به‌عنوان معادله دیفرانسیل تصادفی حاکم بر رفتار قیمت دارایی پایه در نظر گرفتند. تحقیقات نشان می‌دهند که بسیاری از سری‌های زمانی بازار مالی، دارای فرآیند حرکت براونی کسری^۶ با وابستگی و دامنه بلندمدت هستند و در تکامل مدل‌های مالی برای قیمت‌گذاری دارایی پایه، ارائه مدل‌های با حافظه اهمیت یافته است و یکی از مهم‌ترین فرآیندهای با حافظه، حرکت براونی کسری می‌باشد (صمیمی، ۱۴۰۰). در این پژوهش مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک شولز تحت حرکت براونی کسری تعمیم و توسعه یافته است و معادله دیفرانسیل آن به کمک معادله فوکر پلانک و لم ایتو حل می‌گردد. مبنای این پژوهش تحلیلی و کاربردی است و در حوزه تحلیلی، ارائه معادله جدید قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله بررسی و در حوزه کاربردی امکان به‌کارگیری و قیمت‌گذاری اوراق با مدل جدید ارزیابی می‌شود. اهمیت این پژوهش، کاهش نواقص مدل قیمت‌گذاری بلک شولز و افزایش قابلیت آن با به‌کارگیری روش‌های جدید حل معادلات دیفرانسیل همانند روش معادله فوکر پلانک و لم ایتو است و همچنین نشان می‌دهیم که مدل بلک شولز کلاسیک حالت خاصی از مدل پیشنهادی بوده و بر اساس معیار MAPE (میانگین درصد قدر مطلق خطا) تفاوت معناداری بین میانگین امتیازها در دو مدل وجود نداشته و این دو مدل کارایی یکسانی داشته‌اند.

مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

مبانی نظری

قراردادهای اختیار معامله^۷ یکی از انواع اوراق مشتقه^۸ است که به دو نوع اختیار خرید و اختیار

فروش تقسیم می‌شود. دارنده اختیار خرید با پرداخت مبلغی این حق (نه الزام و تعهد) را برای خود می‌خرد که دارایی موضوع قرارداد را با مبلغی معین (قیمت اعمال)^۹ و در تاریخی مشخص یا قبل از آن بخرد. اختیار معامله می‌تواند آمریکایی یا اروپایی باشد، اختیار معامله آمریکایی در هر زمان از طول عمر قرارداد تا تاریخ انقضاء یا در تاریخ سررسید قابل اعمال است، ولی اختیار معامله اروپایی تنها در تاریخ انقضای آن قابل اعمال است (جان هال، ۱۳۸۴، ص. ۳۰۴). به دلیل اهمیت اوراق اختیار معامله در پوشش ریسک و کسب بازدهی آربیتراژی^{۱۰}، طی چند دهه گذشته، تلاش‌های زیادی برای ارزش‌گذاری این اوراق صورت پذیرفته است (لطفی و همکاران، ۱۴۰۱). در اوایل دهه ۱۹۷۰، فیشر بلک، میرن شولز و رابرت مرتون گام بزرگی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند و نتیجه کار آن‌ها ارائه مدلی بود که تحت عنوان "مدل بلک شولز" معروف گشت و این مدل تأثیر زیادی در نحوه قیمت‌گذاری و پوشش خطر اختیار معامله داشته است. اولین گام در راستای درک چگونگی قیمت‌گذاری اختیار معامله، داشتن درک درستی از فرآیند حرکت قیمت‌ها می‌باشد، در مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک شولز فرض بر این می‌گردد که قیمت‌ها در هر دوره زمانی آتی دارای توزیع لگاریتم نرمال است (هال، ۱۳۹۷، ص. ۴۱۷). اگرچه این مدل هنوز هم در بازارهای مالی استفاده می‌شود ولی به آن انتقادهای زیادی وارد شده است. درواقع این انتقادهای به فرض‌های این مدل هست که در مدل بلک - شولز فرآیند تغییرات قیمت دارایی پایه از حرکت براونی هندسی و به‌صورت رابطه زیر:

$$\frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dz \quad \text{رابطه ۱}$$

تبعیت می‌کند که در آن پارامتر μ نرخ جابه‌جایی (جمله رانش) و پارامتر σ نوسان پذیری قیمت دارایی پایه است که ثابت در نظر گرفته شده‌اند (نیسی، ۱۳۹۷، ص. ۲۰۱). مدل قیمت‌گذاری بلک - شولز برای ارزش‌گذاری اختیار خرید به‌صورت رابطه زیر می‌باشد (جان هال، ۱۳۸۸، ص. ۳۸۰).

$$C = S_0 N(d_1) - E e^{-rT} N(d_2) \\ d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad \text{رابطه ۲}$$

در رابطه‌های بالا، $N(x)$ تابع توزیع احتمال تجمعی یک متغیر با توزیع نرمال استاندارد شده می‌باشد و متغیر C قیمت اختیار خرید اروپایی، S_0 قیمت جاری سهام، k قیمت اعمال، r نرخ بهره بدون ریسک، T مدت زمان باقی‌مانده تا زمان انقضاء و σ نوسان پذیری قیمت دارایی پایه را نشان می‌دهد. همان‌طور که مطرح می‌باشد حرکت براونی فاقد حافظه است و گذشته خود را فراموش می‌کند و نمی‌تواند وابستگی‌های بلندمدت در سری زمانی قیمت‌ها را به‌خوبی توصیف کند. برای حل این معضل،

قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله با معادله .../فراهانی، رحمانی، غفاری و پرویزی

حرکت براونی کسری توسط هارست در سال ۱۹۵۶ معرفی شد و توسط مندلبرات و وان نس در سال ۱۹۶۸ توسعه داده شد. این فرآیند به دلیل داشتن ویژگی‌های خاصی همچون حافظه بلندمدت که توسط نمای هرست^{۱۱} میزان آن اندازه‌گیری می‌شود در مدل‌سازی مالی، به‌ویژه در پیش‌بینی نوسانات بازارهای مالی و بررسی رفتار قیمت‌ها بسیار کاربرد دارد. وجود حافظه بلندمدت در بازده دارایی‌ها بیانگر وجود خودهمبستگی^{۱۲} میان مشاهدات با فاصله زمانی زیاد است، بنابراین می‌توان از بازده‌های گذشته به‌منظور پیش‌بینی بازده آینده استفاده نمود و از آنجایی که حافظه بلندمدت شکل خاصی از دینامیک غیرخطی است، مدل‌سازی آن با استفاده از روش‌های خطی امکان‌پذیر نیست و توسعه استفاده از مدل‌های قیمت‌گذاری غیرخطی را ترغیب می‌کند.

در این پژوهش، فرض بر آن است که تغییرات قیمت از فرآیند حرکت براونی کسری تعمیم‌یافته پیروی می‌کند. اگر S_t قیمت دارایی پایه و فرآیند گوسی $Z_t^{H,a,b}$ یک حرکت براونی کسری تعمیم‌یافته^{۱۳} باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل تغییرات قیمت به شکل زیر می‌باشد:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t Z_t^{H,a,b} \quad \text{رابطه ۳}$$

که از طریق حل معادله دیفرانسیل به روش لم ایتو و معادله فوکر پلانک، مدلی جدید با فرم بسته برای قیمت‌گذاری اختیارمعاملات ارائه می‌گردد که مدل بلک شولز کلاسیک یک حالت خاص از مدل ارائه‌شده می‌باشد و این مدل می‌تواند یکی از نواقص مترتب بر مدل اصلی بلک شولز را مرتفع سازد. درنهایت قیمت‌های خروجی حاصل از مدل جدید با قیمت‌های مستخرج از مدل بلک شولز و قیمت‌های بازار مقایسه و کارایی مدل‌ها آزمون می‌شوند.

پیشینه پژوهش

مطالعات داخلی

رحمانی، جعفریان (۱۳۹۶)، در مقاله‌ای تحت عنوان بررسی مدل بلک شولز کسری با توان هرست روی اختیار معامله اروپایی با هزینه‌های معاملاتی پرداختند. در این مقاله جواب تقریبی قیمت‌گذاری مدل بلک شولز کسری با هزینه‌های معامله به‌وسیله روش تکرار تغییرات بررسی شده است و نتایج نشان می‌دهد که ارزش‌گذاری توسط مدل بلک - شولز کسری به نتایج واقعی قیمت اختیار خرید نزدیک‌تر است. ابوالی، خلیلی عراقی و همکاران (۱۴۰۰)، در مقاله‌ای با عنوان قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله با کمک روش نیکی وورو- اوواروف با به‌کارگیری روش جدید حل معادله دیفرانسیل نیکی وورو- اوواروف جهت ارائه مدل جدید قیمت‌گذاری اختیار معامله صورت پذیرفته است و نتایج نشان می‌دهد که این

روش حل معادله در ۹۵٪ بین قیمت‌گذاری روش جدید و مدل بلک - شولز در اختیار معامله تفاوت معنی‌دار وجود ندارد. نصیری (۱۴۰۱)، در پژوهشی با عنوان تحلیل مقایسه‌ای کارایی مدل قیمت‌گذاری بلک شولز و درخت دوجمله‌ای در معاملات اختیار خرید بورس اوراق بهادار تهران بر مبنای مدل‌های رگرسیونی پرداختند و نتایج نشان می‌دهد تفاوت عملکرد مدل بلک شولز با درخت دوجمله‌ای اختلاف معنی‌دار ندارد. بهرام‌مهر، طهماسبی (۱۴۰۱)، در تحقیقی تحت عنوان قیمت‌گذاری قرارداد اختیار معامله سکه طلا در بازار بورس کالای ایران پرداختند و در این پژوهش از دو رویکرد مدل بلک شولز کلاسیک و معادله برابری خرید و فروش به‌عنوان روش‌های قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله استفاده شده است. نتایج از هر دو روش بلک شولز و برابری خرید و فروش نشان می‌دهد که فرصت‌های مناسب سرمایه‌گذاری را به خرید اختیار خرید توصیه می‌کند. نصیری، عسکرزاده (۱۴۰۲)، در مقاله‌ای تحت عنوان بررسی تجربی مدل قیمت‌گذاری بلک شولز در معاملات اختیار خرید بورس اوراق بهادار تهران پرداختند و مشخص شد که انحراف معنی‌داری بین قیمت بازار و قیمت‌گذاری مدل بلک شولز وجود دارد. پیمانی، امیری (۱۴۰۲)، در مقاله‌ای تحت عنوان ارزش‌گذاری اوراق بهادار اختیار معامله با نرخ سود تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران پرداخته و نتایج پژوهش نشان می‌دهد که در ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های کوتاه‌مدت، تفاوت چندانی میان مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی و مدل بلک، شولز و مرتون وجود ندارد. درحالی‌که ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های بلندمدت با استفاده از مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله تحت سود تصادفی عملکرد بهتری نسبت به مدل بلک، شولز و مرتون داشته‌اند.

مطالعات خارجی

ماسیمیلیانو فرزا^{۱۴} (۲۰۰۹)، به بررسی مدل حرکت براونی و حرکت براونی کسری و مدل گارچ پرداخته شده است. در این تحقیق با تجزیه و تحلیل عملکرد ۶ شاخص بازار بین‌المللی نشان داده شد که روش حرکت براونی کسری بخصوص در بازارهای با نوسان زیاد مؤثرتر است. تاکایوکی موریموتو^{۱۵} (۲۰۱۵) با پژوهشی با عنوان انتخاب روش قیمت‌گذاری اروپایی با استفاده از حرکت براونی کسری و با نوسان واقعی توانست خصوصیات وابستگی مرتبه بالایی را در سری زمانی نشان دهد که به‌طور تجربی به این نتیجه رسید که معادله تفاضلی بلک شولز دارای اصل پیرو حرکت براونی با هرست $H \neq \frac{1}{2}$ به‌خوبی تعریف نمی‌شود به این علت که حرکت براونی کسری یک‌نیمه مارتینگال نیست. آرونا، راوی^{۱۶} (۲۰۱۶)، در مقاله‌ای با عنوان حل معادله قیمت‌گذاری کسری بلک شولز در بازار مالی پرداخته و در این تحقیق روش تبدیل دیفرانسیل کسری و روش تبدیل دیفرانسیل کسری اصلاح‌شده را برای حل

قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله با معادله .../فراهانی، رحمانی، غفاری و پرویزی

معادله قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی کسری زمان ارائه می‌کند. فال و نورو^{۱۷} (۲۰۱۹)، در تحقیقی تحت عنوان توصیف معادلات قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک-شولز توسط مشتق کسری caputo تعمیم‌یافته پرداختند و در این پژوهش از راه‌حل‌های تحلیلی معادلات کسری بلک شولز از مشتق کسری caputo تعمیم‌یافته استفاده شده است. آراند^{۱۸} (۲۰۲۳)، در مقاله‌ای تحت عنوان مدل‌سازی قیمت تحت حرکت براونی کسری تعمیم‌یافته از این حرکت به‌عنوان فرآیند هدایت‌شده در مدل‌سازی نوسانات قیمت استفاده کرده است و با استفاده از معادله فوکر پلانک، ارزش تحلیلی را برای معیارهای ریسک و همچنین فرمول‌های قیمت‌گذاری قیمت اختیار خرید اروپایی برای مدل بلک شولز ارائه شده است. تامیرات دیوفرا^{۱۹} (۲۰۲۴)، در مقاله‌ای با عنوان قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت حرکت براونی کسری و پوشش دلتای پویا، تأثیر حرکت براونی کسری را بر قیمت‌گذاری اختیار معامله و پوشش دهی پویا بررسی می‌کند. با تخمین قیمت اختیار با استفاده از حرکت براونی کسری، دقت پیش‌بینی قیمت ارزیابی شده و مزایای حرکت براونی کسری را در مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله بررسی می‌شود.

روش پژوهش

در این پژوهش، ما به ارائه مدلی جدید برای ارزش‌گذاری اختیار معامله هستیم. از منظر اجرا، این پژوهش ماهیتی بنیادی و کاربردی دارد. در بخش بنیادی، ارائه مدل متفاوت معادله بلک - شولز بررسی شده و در بخش کاربردی، بهره‌گیری از این مدل و مقایسه آن با مدل بلک - شولز و قیمت‌های واقعی اختیار معامله در بازار اختیار معامله سکه طلا ایران بررسی می‌گردد. جهت ارائه مدل کاراتر، ضمن بهره‌گیری از لم ایتو و معادله فوکر پلانک، مدل بلک شولز کلاسیک را با فرض اینکه تغییرات قیمت دارایی پایه از حرکت براونی کسری (یا توان هرست) تبعیت نمایند را حل و امکان استفاده از این روش جدید را فراهم می‌نمایم.

داده‌های پژوهش

جامعه آماری جهت اجرای مدل مطرح‌شده، از ۱۱ قرارداد اختیار خرید اروپایی سکه طلا در بورس کالای ایران برای دوره ۱۴۰۱/۱/۵ تا ۱۴۰۲/۱۲/۲۸ به‌صورت روزانه بر اساس فعال بودن قراردادهای اختیار معامله و تعداد روزهای معاملاتی بالاتر (حداقل ۳۰ روز معاملاتی) در نظر گرفته شده است. در این پژوهش داده‌های مربوط به قیمت روزانه سکه بهار آزادی (طرح قدیم) از شبکه اطلاع‌رسانی اتحادیه طلا، جواهر و سکه تهران و قیمت پایانی اختیار خرید سکه طلا و قیمت اعمال از سایت اطلاع‌رسانی بورس کالای ایران گردآوری شده است. همچنین برای محاسبه نوسان‌پذیری قیمت سکه طلا از نرم‌افزار Eviews10 و جهت محاسبه توان هرست و قیمت‌گذاری اختیار معامله سکه طلا به روش بلک شولز و

فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / دوره ۱۶ / شماره ۶۴ / پائیز ۱۴۰۴

مدل پیشنهادی از کد نویسی در نرم افزار متلب ۲۰۱۶ و انجام آزمون های آماری از نرم افزار spss استفاده شده است. جدول ۱ مشخصات نماد قراردادهای اختیار معامله سکه طلا ایران و در جدول ۲ قراردادهای اختیار خرید سکه طلا انتخاب شده در دوره مورد بررسی بیان شده است.

جدول ۱: مشخصات نماد قرارداد اختیار معامله سکه طلا

۱	دارایی پایه	سکه طلای تمام بهار آزادی (طرح امامی)
۲	نماد کالا	GCMYYCKGC نشان دهنده اختیار قرارداد خرید طلا، K نشان دهنده قیمت اعمال، MM علامت اختصاری ماه قرارداد، YY سال می باشد
۳	اندازه قرارداد	یک سکه
۴	واحد پولی قیمت	ریال
۵	نوع قرارداد	اروپایی

منبع: یافته های پژوهشگر

جدول ۲: قراردادهای اختیار معامله خرید سکه طلا

ردیف	قرارداد	قیمت اعمال	تاریخ سررسید	ردیف	قرارداد	قیمت اعمال	تاریخ سررسید
۱	GCOR02C30000	۳۰۰.۰۰۰.۰۰۰	۱۴۰۲/۲/۱۷	۷	GCOR01C11000	۱۱۰.۰۰۰.۰۰۰	۱۴۰۱/۰۲/۲۷
۲	GCOR02C32000	۳۲۰.۰۰۰.۰۰۰	۱۴۰۲/۲/۱۷	۸	GCOR01C13000	۱۳۰.۰۰۰.۰۰۰	۱۴۰۱/۰۲/۲۷
۳	GCAB02C28000	۲۸۰.۰۰۰.۰۰۰	۱۴۰۲/۸/۲۱	۹	GCSH01C14000	۱۴۰.۰۰۰.۰۰۰	۱۴۰۱/۰۶/۲۷
۴	GCAB02C29000	۲۹۰.۰۰۰.۰۰۰	۱۴۰۲/۸/۲۱	۱۰	GCES01C19000	۱۹۰.۰۰۰.۰۰۰	۱۴۰۱/۱۲/۱۳
۵	GCDY02C25000	۲۵۰.۰۰۰.۰۰۰	۱۴۰۲/۱۰/۲۴	۱۱	GCES01C20000	۲۰۰.۰۰۰.۰۰۰	۱۴۰۱/۱۲/۱۳
۶	GCDY02C23000	۲۳۰.۰۰۰.۰۰۰	۱۴۰۲/۱۰/۲۴				

منبع: یافته های پژوهشگر

و با توجه به مدل بلک شولز و مدل پیشنهادی، متغیرها و پارامترهای دو مدل به صورت زیر محاسبه و مدنظر می باشد:

نرخ بهره بدون ریسک (r): بازدهی مربوط به اوراق بهادار بدون ریسک را نرخ بهره بدون ریسک می نامند. در این پژوهش نرخ بهره متعلقه به حساب های سپرده ای بلندمدت در بانک های ایران طی دوره مورد بررسی و معادل ۲۰٪ در نظر گرفته شده است.

قیمت اعمال (E): قیمتی است که در آینده، خرید و فروش کالای مورد نظر بر مبنای آن انجام می گیرد. این مبالغ در سررسید و هنگام اعمال اختیار خرید یا فروش باید پرداخت شود. در این پژوهش مطابق جدول ۲ قیمت اعمال برای هر قرارداد اختیار خرید سکه طلا به تفکیک، ذکر شده است.

قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله با معادله .../فراهانی، رحمانی، غفاری و پرویزی

نوسان پذیری (σ): نوسان پذیری یک دارایی، معیاری برای اندازه‌گیری عدم اطمینان (ریسک) در مورد بازده‌های آن دارایی می‌باشد. به‌منظور بررسی نوسان قیمت سکه در بورس کالا از روش گارچ (واریانس ناهمسانی شرطی خود توضیحی تعمیم‌یافته)^{۲۰} استفاده و به‌عنوان یک متغیر در مدل بلک شولز و مدل پیشنهادی لحاظ می‌گردد. مدل $GARCH(p, q)$ که در آن p مرتبه σ^2 (واریانس) و q مرتبه ε^2 (خطا) را در این مدل نشان می‌دهد، به‌صورت زیر رابطه زیر می‌باشد:

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \dots + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 \quad \text{رابطه ۴}$$

که معمولاً $GARCH(1,1)$ کفایت می‌کند (سوری، ۱۴۰۰، ص. ۸۰۶)؛ که عبارت است از:

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad \text{رابطه ۵}$$

جهت انجام این روش، می‌بایست شرط مانایی و اثر آرچ در سری زمانی قیمت سکه طلا وجود داشته باشد. جهت بررسی مانایی سری زمانی قیمت سکه طلا آزمون دیکی – فوکر استفاده‌شده است که به شرح جدول ۳ می‌باشد. مطابق با نتایج حاصله قیمت سکه طلا در سطح پایا نمی‌باشند و قدر مطلق آماره دیکی – فولر از قدر مطلق مقادیر بحرانی این آماره در سطح احتمال ۱٪، ۵٪ و حتی ۱۰٪ کوچک‌تر است؛ اما پس از یک‌بار تفاضل گیری این متغیر به‌صورت پایا درآمده است:

جدول ۳: نتایج مربوط به آزمون مانایی قیمت سکه طلا

سال	سطح صفر		یک‌بار تفاضل گیری		درجه انباشتگی
	Prob.	t-statistic	Prob.	t-Statistic	
۱۴۰۱	۰/۴۴۳۷	۰/۹۸۴۵	-۸/۳۹۵۳	۰/۰۰۰	I(1)
۱۴۰۲	-۰/۶۴۴۱	۰/۸۵۷۲	-۱۸/۰۶۳	۰/۰۰۰	I(1)

باتوجه به مقادیر prob، سری زمانی قیمت سکه طلا در سال‌های موردبررسی در سطح یک مانا بوده و I(1) است. در جدول ۴ با توجه به مقدار ($\text{prob} = ۰/۰۰۴۹ < ۰/۰۵$ و $\text{prob} = ۰/۰۰۱۱ < ۰/۰۵$) فرض صفر آماره F رد می‌شود و اثر آرچ در سری زمانی قیمت سکه طلا در سال‌های موردبررسی وجود دارد.

جدول ۴: آزمون اثر آرچ در قیمت سکه طلا

سال ۱۴۰۱			
F-statistic	۸/۰۳۰۶۹	Prob. F(1,327)	۰/۰۰۴۹
Obs*R-squared	۷/۸۸۶۱۳۴	Prob. Chi-Square(1)	۰/۰۰۵
سال ۱۴۰۲			
F-statistic	۱۰/۹۰۶۶۸	Prob. F(1,300)	۰/۰۰۱۱
Obs*R-squared	۱۰/۵۹۴۲۳	Prob. Chi-Square(1)	۰/۰۰۱۱

نتایج تخمین مدل گارچ برای قیمت سکه طلا در بازار نقدی ایران در دوره موردبررسی، در پیوست شماره ۱ ارائه شده است. لذا مدل گارچ برای قیمت سکه طلا برای سال‌های ۱۴۰۱ و ۱۴۰۲، به شرح روابط زیر می‌باشد:

$$\sigma^2 = 2.62E + 12 + 0.428\varepsilon_{t-1}^2 + 0.7066\sigma_{t-1}^2$$

رابطه ۶

$$\sigma^2 = 2.59E + 12 + 0.3900\varepsilon_{t-1}^2 + 0.5881\sigma_{t-1}^2$$

رابطه ۷

زمان باقی‌مانده تا سررسید (t): قیمت‌گذاری اختیار معامله سکه طلا، روزانه می‌باشد و تعداد روزهای کاری متناسب با روزهای معاملاتی در طول یک سال در نظر گرفته شده و زمان تا سررسید (t) برابر با روزهای باقی‌مانده تا سررسید تقسیم بر تعداد روزهای معاملاتی است (بهرادمهر و همکاران ۱۴۰۱، درخشان، ۱۳۹۰، ص. ۴۷۲).

توان هرست (H): توان هرست یا شاخص خود تشابهی که به عنوان شاخص حافظه بلندمدت در روند قیمت دارایی‌های مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این پژوهش محاسبه توان هرست از روش تحلیل نوسانات روندزادایی شده (DFA) استفاده شده است. پنگ و دیگران (۱۹۹۵)^{۲۱} روش DFA را طرح کرده و مزیت آن نسبت به روش‌های دیگر در این است که به کمک آن می‌توان همبستگی‌های بلندمدت را حتی در سری‌های که به ظاهر غیر پایا هستند، نیز جستجو کرد. (تانگ، ۲۰۰۶)^{۲۲}. در این پژوهش توان هرست سری زمانی قیمت سکه طلا ۰/۸۷۲۲ برآورد شده است. (محاسبه مراحل اجرای DFA در پیوست ۲ ارائه شده است).

فرضیه پژوهش

فرضیه‌های اصلی پژوهش در قالب سؤال مطرح می‌شود: "آیا مدل قیمت‌گذاری بلک شولز تحت حرکت براونی کسری با روش حل معادله فوکر پلانک و لم ایتو دارای فرم بسته و صریح است یا خیر؟" و سؤال دوم: "آیا از منظر آماری تفاوت میان کارایی و عملکرد مدل بلک شولز اصلی و مدل جدید معنی‌دار هست یا خیر؟"

تجزیه و تحلیل داده‌ها و نتایج

آمار توصیفی

در جدول ۵ و ۶ به آمار توصیفی قیمت سکه طلا و ارزش اختیار خرید آن شامل میانگین، میانه، انحراف معیار، چولگی و کشیدگی در بازه زمانی موردبررسی می‌پردازیم:

قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله با معادله .../فراهانی، رحمانی، غفاری و پرویزی

جدول ۵: آمار توصیفی قیمت سکه طلا جدول ۶: آمار توصیفی ارزش اختیار خرید سکه طلا

قیمت سکه طلا		قیمت سکه طلا	
میانگین	۲۶.۷۹۱.۸۶۷ ریال	میانگین	۲۳۳.۰۰۰.۰۰۰ ریال
میانه	۲۰.۳۵۴.۶۰۸ ریال	میانه	۲۷۳.۰۰۰.۰۰۰ ریال
بیشینه	۱۰۱.۰۰۰.۰۰۰ ریال	بیشینه	۳۳۸.۰۰۰.۰۰۰ ریال
کمینه	۲۰.۱۰۰.۲۰۰ ریال	کمینه	۱۲۴.۰۰۰.۰۰۰ ریال
انحراف معیار	۱۸.۶۸۶.۴۸۰ ریال	انحراف معیار	۷۴.۶۹۴.۴۶۶
چولگی	۱/۲۴۸۳۴	چولگی	-۰/۰۹۸
کشیدگی	۴/۴۳۰۴۰	کشیدگی	۱/۴۱
تعداد مشاهدات	۲۴۵	تعداد مشاهدات	۶۰۳

منبع: یافته‌های پژوهشگر

با توجه به جدول ۵ و ۶ میانگین قیمت سکه طلا در دوره موردبررسی، ۲۳۳.۰۰۰.۰۰۰ ریال و بالاترین قیمت ثبت‌شده در این دوره ۳۳۸.۰۰۰.۰۰۰ ریال بوده است. چولگی منفی در سری زمانی سکه طلا در این دوره، نشان‌دهنده این است که تعداد زیادی از داده‌ها کمتر از میانگین هستند و این داده‌ها به سمت مقادیر پایین‌تر کشیده می‌شوند. میانگین قیمت اختیار معامله سکه طلا که در بازار معامله‌شده است ۲۶.۷۹۱.۸۶۷ ریال بوده است و بالاترین قیمت اختیار معامله ۱۰۱.۰۰۰.۰۰۰ ریال ثبت‌شده است. مقدار کشیدگی قیمت اختیار معاملات سکه در این دوره ۴/۴۳۰ بوده است و به این معنی است که توزیع داده‌ها دارای کشیدگی بلند^{۲۳} است و داده‌های زیادی در نزدیکی میانگین قرار دارند. درواقع کشیدگی بالا نشان‌دهنده وجود نوسانات شدیدتر است. (کشیدگی بیشتر از ۳ نشان‌دهنده ریسک بالاتر در داده‌های سری زمانی است).

سیر ارائه مطالب در این قسمت، شامل چگونگی اثبات و ارائه مدل جدید بلک شولز و فرم صریح و جدید از مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله خواهد بود. در این پژوهش بر اساس مطالعات و پژوهش مدل پیشنهادی آرندا (۲۰۲۱)، مدل کلاسیک بلک شولز تحت حرکت براونی کسری موردبررسی قرار گرفته است. در مدل بلک شولز کلاسیک فرض بر آن است که تغییرات قیمت دارایی پایه از یک حرکت براونی هندسی پیروی می‌کند که در این پژوهش با نقض این فرض، دینامیک و تغییرات قیمت دارایی پایه از یک حرکت براونی کسری پیروی می‌کند.

فرض کنید $(a, b) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ و $H \in (0, 1)$ باشد و همچنین B_t^H یک حرکت براونی کسری (fBm) و $\forall t \in \mathbb{R}_+$ باشد. فرآیند گوسی $Z_t^{H,a,b}$ یک حرکت براونی کسری

تعمیم یافته ($gfBm$) و به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z_t^{H,a,b} = aB_t^H + bB_{-t}^H \quad \text{رابطه ۸}$$

اگر S_t قیمت دارایی پایه تحت مدل بلک شولز که از یک حرکت ($gfBm$) پیروی کند آنگاه معادله دیفرانسیل آن به شکل زیر می باشد:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t Z_t^{H,a,b} \quad \text{رابطه ۹}$$

با تعریف متغیر $x = \ln S - rt$ و با استفاده از لم ایتو، فرآیند جدید x از یک SDE (معادله تفاضلی تصادفی) زیر پیروی می کند:

$$dx = -\sigma^2 H[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]t^{2H-1}dt + \sigma dZ_t^{H,a,b} \quad \text{رابطه ۱۰}$$

تابع چگالی احتمال انتشار مرتبط با فرآیند رابطه ۱۰ خواهیم داشت:

$$P\left(x, \frac{t}{x_0}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]t^{2H}}} * \exp\left[-\frac{(x - x_0 + \frac{1}{2}\sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]t^{2H})^2}{2\sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]t^{2H}}\right] \quad \text{رابطه ۱۱}$$

اثبات: با در نظر گرفتن لم ایتو تابع چگالی انتشار از یک فرآیند PDE (معادله تفاضلی جزئی) پیروی می کند:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sigma^2 H t^{2H-1}[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]\left(\frac{\sigma^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial P}{\partial x}\right) \quad \text{رابطه ۱۲}$$

با شرط اولیه $P(x, 0) = \delta(x - x_0)$ و x_0 (ارزش x در زمان شروع) و با جایگزینی زمان خواهیم داشت:

$$\tau = \sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]t^{2H} \quad \text{رابطه ۱۳}$$

رابطه ۱۲ به معادله انتشار زمان همگن تبدیل می گردد.

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x}$$

با فرض $w = x + \frac{\tau}{2}$ ما به دست می آوریم

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial w^2} \quad \text{رابطه ۱۴}$$

رابطه ۱۴ به معادله انتشار استاندارد با ضرایب انتشار ثابت و راه حل بنیادی زیر مطابقت دارد:

قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله با معادله .../فراهانی، رحمانی، غفاری و پرویزی

$$P(w, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left[-\frac{(w-x_0)^2}{2\sigma^2\tau}\right] \quad \text{رابطه ۱۵}$$

بعد از جایگزینی w و τ بجای x و t ، ما درنهایت بیان موردنظر را به دست می‌آوریم.

درنتیجه برای رابطه ۹ و زمان T ، معادله چگالی احتمال انتشار به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$P(S_T, T | S_0, 0) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi\sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]T^{2H}}} \times \exp\left[-\frac{(\ln(\frac{S_T}{S_0}) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]T^{2H})^2}{2\sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]T^{2H}}\right] \quad \text{رابطه ۱۶}$$

تحت مدل بلک - شولز کسری تعمیم‌یافته، ارزش خرید اختیار معامله اروپایی، با قیمت اعمال ثابت E و زمان تا رسید T ، خواهیم داشت:

$$C_{a,b,H}^{BS} = S_0 N(d_1^{a,b,H}) - E e^{-rT} N(d_2^{a,b,H}) \quad \text{رابطه ۱۷}$$

و $N(0)$ تابع تجمعی نرمال استاندارد و

$$d_1^{a,b,H} = \frac{\ln(\frac{S_T}{E}) + rT + \frac{1}{2}[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]\sigma^2 T^{2H}}{\sigma \sqrt{[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]T^{2H}}} \quad \text{رابطه ۱۸}$$

$$d_2^{a,b,H} = \frac{\ln(\frac{S_T}{E}) + rT - \frac{1}{2}[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]\sigma^2 T^{2H}}{\sigma \sqrt{[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]T^{2H}}} \quad \text{رابطه ۱۹}$$

که برای $(a,b) = (1,0)$ ما به فرمول بلک شولز کسری می‌رسیم:

اثبات: مستقیماً از روابط ۱۸ و ۱۹ دریافت می‌کنیم:

$$d_1^{1,0,H} = \frac{\ln(\frac{S_0}{E}) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H}}{\sigma \sqrt{T^{2H}}} = d_1^H \quad \text{رابطه ۲۰}$$

$$d_2^{1,0,H} = \frac{\ln(\frac{S_0}{E}) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H}}{\sigma \sqrt{T^{2H}}} = d_2^H \quad \text{رابطه ۲۱}$$

درنتیجه، ما داریم:

$$C_{1,0,H}^{BS} = S_0 N(d_1^H) - E e^{-rT} N(d_2^H) = C_H^{BS} \quad \text{رابطه ۲۲}$$

که با فرمول BS کسری ارائه شده توسط نیکولا مطابقت دارد. درنتیجه ما به فرمی صریح و جدید از مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله دست‌یافتیم و فرضیه اول این پژوهش مورد تأیید قرار می‌گیرد و

همچنین با فرض $H = \frac{1}{2}$ و قرار دادن در روابط ۲۰ تا ۲۲، مدل جدید همان مدل بلک شولز اصلی تبدیل می‌گردد و مدل بلک شولز اصلی حالت خاصی از مدل جدید می‌باشد.

برای بررسی فرضیه دوم این پژوهش، آیا از منظر آماری تفاوت معنی‌داری میان کارایی مدل بلک شولز و مدل پیشنهادی وجود دارد یا خیر؟ برای بررسی این فرضیه از قدر مطلق درصد انحرافات (APE)^{۲۴} استفاده شده است که به صورت معادله زیر تعریف می‌شود (نصیری، عسکرزاده، ۱۴۰۲).

$$APE = \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$$

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$$

رابطه ۲۳

که در آن، n تعداد قیمت‌های بازار، $\hat{y}_i$ قیمت اختیار معامله برآوردی، y_i قیمت اختیار بازار می‌باشد. MAPE اغلب برای اندازه‌گیری صحت یک مدل پیش‌گو مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جدول ۷: آمار توصیفی قدر مطلق درصد انحرافات

متغیر	گروه	تعداد	میانگین	انحراف معیار	چولگی	کشیدگی
APE	مدل بلک شولز	۱۵۸	۰/۳۷۷	۰/۸۲۱	۶/۱۵۲	۴۵/۰۵۷
	مدل پیشنهادی	۱۵۸	۰/۲۴۶	۰/۵۹۹	۷/۹۱۹	۶۵/۷۲۳

با توجه به جدول ۷، میانگین قدر مطلق درصد انحرافات و انحراف معیار آن در مدل جدید نسبت به مدل بلک شولز اصلی کمتر می‌باشد.

جهت بررسی فرضیه، ابتدا آزمون نرمال بودن (کولموگروف اسمیرنوف) متغیر را برای هر دو مدل انجام و به شرح جدول شماره ۸ ارائه می‌گردد.

جدول ۸: آزمون نرمال بودن

APE	Kolmogorov-Smirnova			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
مدل بلک شولز	۰/۳۲۳	۱۵۸	۰/۰۰۰	۰/۳۹۶	۱۵۸	۰/۰۰۰
مدل پیشنهادی	۰/۳۴۲	۱۵۸	۰/۰۰۰	۰/۲۵۴	۱۵۸	۰/۰۰۰
a. Lilliefors Significance Correction						

با توجه به مقدار ($\text{sig} = ۰/۰۰ < ۰/۰۵$) نشان‌دهنده نرمال نبودن متغیر (APE) در هر دو مدل ارزش‌گذاری می‌باشد. با توجه به عدم پذیرش فرض نرمال بودن دو گروه مورد بررسی، آزمون

قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله با معادله .../فراهانی، رحمانی، غفاری و پرویزی

ناپارامتریک من ویتنی جهت مقایسه میانگین دو گروه انتخاب گردید و قبل از انجام این آزمون می‌بایست آزمون برابری واریانس‌های دو گروه ارزیابی گردد. آزمون برابری واریانس دو گروه به شرح جدول ۹ ارائه شده است:

جدول ۹: آزمون برابری واریانس

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	۱/۳۶۲	۱	۱/۳۶۲	۲/۶۳۳	۰/۱۰۶
Within Groups	۱۶۲/۳۶۰	۳۱۴	۰/۵۱۷		
Total	۱۶۳/۷۲۲	۳۱۵			

با توجه به ($\text{sig} = ۰/۱۰۶ > ۰/۰۵$) فرض برابری واریانس دو گروه در سطح ۹۵٪ موردپذیرش قرار می‌گیرد؛ بنابراین نتایج مقایسه میانگین دو گروه با آزمون من ویتنی به شرح جدول ۱۰ ارائه می‌گردد:

جدول ۱۰: آزمون مقایسه میانگین دو گروه مستقل

Independent-Samples Mann-Whitney U Test Summary	
Total N	۳۱۶
Mann-Whitney U	۱۲۳۶۶
Wilcoxon W	۲۴۹۲۷
Test Statistic	۱۲۳۶۶
Standard Error	۸۱۲/۰۷
Standardized Test Statistic	-۰/۱۴۳
Asymptotic Sig. (2-sided test)	۰/۸۸۶

با توجه به ($\text{sig} = ۰/۸۸۶ > ۰/۰۵$) در سطح اطمینان ۹۵٪ فرضیه پژوهش که مبتنی بر عدم وجود اختلاف معنادار کارایی مدل اصلی بلک شولز و مدل پیشنهادی و تعمیم‌یافته، **مورد تأیید قرار می‌گیرد**. عدم معنادار بودن خروجی‌های حاصله به معنی تشابه دو مدل نیست. بلکه ما نشان دادیم که معادله‌ی جدید ضمن اثبات با روشی نوآورانه، تفاوت از لحاظ متغیرهای مؤثر بر آن و در نهایت شکل نهایی متفاوت با معادله بلک شولز، از لحاظ خروجی با معادله‌ی اصلی بلک شولز نزدیک است. ارائه معادله‌ای متفاوت با معادله بلک شولز و حصول نتایج (قیمت‌گذاری) نزدیک اما دقیق‌تر و با لحاظ محدودیت تعداد نمونه‌ی استفاده‌شده و در سطح اطمینان ۹۵٪، مزیت استفاده از روش جدید می‌باشد.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها:

در سال‌های اخیر با افزایش حجم معاملات در حوزه مشتقات مالی بالأخص قراردادهای اختیار معامله، قیمت‌گذاری دقیق این اوراق از اهمیت بالایی نزد تحلیل‌گران و فعالان بازار سرمایه برخوردار شده است. مهم‌ترین روش‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله عبارت است از: روش‌های تحلیلی (معادله دیفرانسیل جزئی بلک - شولز)، روش شبیه‌سازی مونت کارلو، روش‌های شبکه‌ای (مدل دوجمله‌ای) و روش تفاضلات منتهای می‌باشد. از دیگر سو طی مدت فعالیت بورس کالای ایران، علاوه بر دارایی‌های مالی، از آذرماه ۱۳۹۵ معامله روی قراردادهای اختیار معامله سکه طلا نیز اجرا شد. از آنجاکه قرارداد اختیار معامله یکی از ابزارهای مدیریت ریسک می‌باشد، می‌تواند نقش بسزایی در پوشش ریسک ناشی از نوسانات قیمتی سکه طلا در بورس کالای ایران ایفا کند. هدف این پژوهش، ارائه مدل جدید برای قیمت‌گذاری اختیار معامله است. نتیجه‌ی حاصله مؤید آن است که با حل معادله دیفرانسیل تصادفی تغییرات قیمت دارایی پایه در مدل بلک شولز تحت حرکت براونی کسری به روش فوکر پلانک و لم ایتو تعمیم‌یافته، به فرمی صریح و جدید از معادله‌ی قیمت‌گذاری اختیار دست‌یافتیم که درواقع مدل اصلی بلک شولز یکی از حالت‌های خاص مدل بهبودیافته پیشنهادی می‌باشد. برتری استفاده از مدل پیشنهادی نسبت به مدل اصلی، تغییر رفتار قیمت دارایی پایه از حرکت براونی هندسی به حرکت براونی کسری (وجود توان هرست)، بهره‌گیری از روشی جدید و متفاوت برای اثبات معادله بلک شولز، دقت بیشتر در قیمت‌گذاری و اعمال محدودیت کمتر می‌باشد که با مطالعات آرندا (۲۰۲۳)، تامیرات دیوفا (۲۰۲۴)، ابوالی، خلیلی (۱۴۰۰) و رحمانی، جعفریان (۱۳۹۶) مطابقت داشته است و همچنین کارایی و تفاوت مدل مشهور و پرکاربرد در بازارهای جهانی یعنی مدل بلک شولز و مدل جدید با داده‌های واقعی در بورس کالای ایران موردبررسی قرار گرفت و بر اساس مشاهدات تفاوت معناداری بین دو مدل وجود نداشت که این با مطالعات ابوالی، خلیلی (۱۴۰۰) و نصیری، عسکرزاده (۱۴۰۱) مطابقت داشته است. بدیهی است مقایسه میزان کارایی و تفاوت این دو مدل لزوماً هیچ ارتباطی با توانایی کسب سود با استفاده از این مدل‌ها ندارد و صرفاً می‌تواند در تصمیم‌گیری‌ها و نوع ارزیابی توسط معامله‌گران این بازار اثرگذار باشد و دید شفاف‌تری نسبت به اتکا به این مدل‌ها مبتنی بر رفع مفروضات مدل بلک شولز ارائه دهد.

در زیر پیشنهادهایی برای پژوهشگران آینده در این زمینه ارائه شده است:

- ۱) در مدل‌های تحت حرکت براونی کسری یکی از مهم‌ترین موضوعات تخمین پارامترهای مدل ازجمله توان هرست و نوسان‌پذیری دارایی پایه می‌باشد که می‌توان پارامتر توان هرست را با استفاده

قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله با معادله .../فراهانی، رحمانی، غفاری و پرویزی

شبکه‌های عصبی و روش‌های اقتصادی سنجی نیز پیاده‌سازی نمود. همچنین با استفاده از روش‌های رگرسیونی نیز می‌توان کارایی بین این مدل‌ها را آزمون و بررسی نمود.

۲) در این پژوهش، یکی از محدودیت‌های مدل بلک شولز، حرکت براونی هندسی را نقص کردیم تا به مدلی انعطاف‌پذیر و نزدیک به قیمت‌های بازار برسیم. لذا در راستای کنترل ریسک، توسعه و بهبود ابزارهای نوین مالی، سازمان بورس اوراق بهادار تهران می‌تواند از مدل و روش‌های ارائه‌شده برای محاسبه دقیق‌تر ارزش‌گذاری قراردادهای اختیار معامله در بازارهای مالی ایران استفاده نماید.

منابع

- (۱) ابوالی مهدی؛ خلیلی عراقی، مریم و همکاران. (۱۴۰۰). قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک روش نیکی وورو- اوواروف، فصلنامه بورس اوراق بهادار، شماره ۱۴.
- (۲) امیری، مهدیه. (۱۳۹۹). قیمت گذاری قراردادهای اختیار معامله با روش بلک شولز، بونس و دوجمله ای، فصلنامه بورس اوراق بهادار، شماره ۵۰.
- (۳) بهرام مهر، نفیسه؛ طهماسبی، نرگس. (۱۴۰۱). قیمت گذاری قرارداد اختیار معامله سکه طلا در بازار بورس کالای ایران، فصلنامه اقتصاد مالی، شماره ۳.
- (۴) بلفکه، علی؛ موسوی، سید نوراله. (۲۰۲۱). روش های عددی قیمت گذاری اختیار تحت مدل هستون، کنفرانس بین المللی مدیریت - حسابداری و توسعه اقتصادی.
- (۵) پیمانی، مسلم؛ امیری، میثم. (۱۴۰۲). ارزش گذاری اوراق بهادار اختیار معامله با نرخ سود تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران، نشریه چشم انداز مدیریت مالی، شماره ۴۱.
- (۶) رحمانی، مرتضی؛ جعفریان، ناهید. (۱۳۹۶). بررسی مدل بلک شولز کسری با توان هرست روی اختیار معامله اروپایی با هزینه های معاملاتی، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره ۳۲.
- (۷) رضایی، مریم؛ یزدانیان، احمد رضا. (۱۳۹۸). جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیار مانع دوگانه اروپایی با پارامترهای وابسته به زمان تحت مدل CEV، فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره ۳۹.
- (۸) سوری، علی. (۱۳۴۴). "اقتصادسنجی"، ۱۴۰۰، تهران، نورعلم.
- (۹) لطفی، فروغ؛ نشتائی، رضا. (۱۴۰۱). مقایسه کالیبراسیون مدل های قیمت گذاری اوراق اختیار خرید مبتنی بر نوسانات تصادفی و تکنیک انتگرال تعمیم یافته، فصلنامه علمی مدل سازی اقتصادی، شماره ۵۹.
- (۱۰) نبوی، سید علی؛ بهرام زاده، راضیه. (۱۳۹۷). بررسی کارایی فرآیند لوی در قیمت گذاری اختیار معاملات، فصلنامه علمی پژوهشی دانش مالی تحلیل اوراق بهادار، شماره ۳۸.
- (۱۱) نصیری، کورش؛ عسکرزاده، غلامرضا. (۱۴۰۲). بررسی تجربی مدل قیمت گذاری بلک شولز در معاملات خرید بورس اوراق بهادار تهران، فصلنامه اقتصاد مالی، دوره ۱۷، شماره ۴.
- (۱۲) نصیری، کورش؛ عسکرزاده، غلامرضا. (۱۴۰۱). تحلیل مقایسه ای کارایی مدل بلک شولز و درخت دوجمله ای در معاملات اختیار خرید بورس اوراق بهادار تهران، فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره ۵۴.

قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله با معادله .../فراهانی، رحمانی، غفاری و پرویزی

۱۳) نیسی، عبدالساده؛ سلمان، کامران. (۱۳۴۷) "مهندسی مالی و مدل‌سازی بازارهای با رویکرد نرم‌افزار *matlab*"، ۱۳۹۶، تهران، دانشگاه علامه طباطبائی.

۱۴) هال، جان (۱۹۴۶) " مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک "، سجاد سیاح و علی صالح‌آبادی، تهران، انتشارات بورس، (۲۰۰۲).

15) A. HNzoken. (2023).Europea option prining under generalized tempered stable process: Empirical Anaysis.arxiv12042,1,110-127.

16) Axel A. Araneda. (2021).Price modelling under generalized fractional Brownian motion, arxiv12042,1,220-227.

17) Aliou Niang Fall, Seydou Nourou Ndiaye, Ndolane Sene. (2019).Black–Scholes option pricing equations described by the Caputo generalized fractional derivative.Chaos, Solitons and Fractals,125,108-118.

18) C.Necula. (2002).Option pricing in a fractional Brownian motion environment, Working paper,Bucharest,24-34.

19) D.Ahmadian and L.V.Ballestra. (2020).Pricing geometric Asian rainbow options under the mixed fractional Brownian motion. Physica A:Statistical Mechanics and its Applications,555,120-135.

20) Marjan Uddin and Muhammad Taufiq. (2019).Approximation of time fractional Black - Scholes equation via radial kernels and transformation. fractional differential calculus,9(1),75-90.

21) M.Zili. (2017).Generalized fractional Brownian motion.Modern Stochastics. Theory and Applications,4(1),15-24.

22) S.m.nuugulu,f.gideon. (2021).A robust numerical solution to a time-fractional Black–Scholes partial differential equation describing stock exchange dynamics.chaos,Soliton&Fractals.145,50-70.

23) Sunil Kumar,Devendra Kumar,Jagdev Singh. (2014).Numerical computation of fractional Blacke Scholes equation arising in financial market.Egyptian journal of basic and appliedsciences,1(3-4),177-183.

24) Takayuki Morimoto. (2015).European Option Pricing under Fractional Brownian motion with an Application to Realized.Volatility.FORMA,31(2),29-40.

25) TangTa-lun. (2005).long memory in stock index futures markets:Avalue-at-risk approach. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 366, 437-488.

26) V.Giorno,A.G.Nobile. (2021).Time-Inhomogeneous Feller type diffusion process in population dynamics. Mathematics,7(9).

27) zang,H, liu,F,Turner, I,Yang,Q. (2016). Namerical solution of the time fractional black- schools model governing European option.computers & mathematics with application,71(9),1772-1783.

یادداشت‌ها:

1.Futures Contract

2.Options Contract

۳- در این پژوهش منظور از فرصت آربیتراژی بهره گرفتن از تفاوت های ارزش قراردادهای اختیار معامله می باشد.

4.Fisher Black

5.Myron schools

6.Fractional Brownian Motion

7.Option Contract

8.Derivatives

9.Exercise Price(Strike price)

10.Arbitrageu

11.Hurst exponent

12.Autocorrelation

13.Generalized Fractional Brownian motion

14. Massimiliano Ferza

15.Takayuki Morimoto

16.Aruna,Ravi

17.Fall,Ndiaya

18.Axel A. Araneda

19.Tamirat Temesgen Dufera

20- Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity(GARCH)

21-Peng

22-Tang

23-Lepotokutic

24- Mean Absolute Percentage Error

**Options Pricing Model With Fokker-Planck Equation and Ito's lemma
(Case Study: Gold Coin Options Contracts on the Iranian Commodity Exchange)**

Amir Farahani¹

Mahmood Rahmani²

Farhad Ghaffari³

Behzad Parvizi⁴

Receipt: 01/03/2025 Acceptance: 22/04/2025

Abstract:

Options are one of the new financial instruments and a tool for risk management and profitability in the capital market, and pricing these instruments with the Black-Scholes pricing method is very common. One of the most important assumptions of the Black-Scholes model is that the price changes of the underlying asset follow geometric Brownian motion, which cannot express the statistical characteristics of the time series in all cases. The aim of this research is to present a new model for pricing gold coin options on the Iranian Commodity Exchange, and this model is based on the original Black-Scholes model and when the price changes of the underlying asset follow fractional Brownian motion. In this research, a new and different model has been presented for pricing options by using the Fokker-Planck and Lemma-Itou differential equation solution method. Greater pricing accuracy, generalization of the classic Black-Scholes model, and ultimately the application of fewer restrictions are among the advantages of the new model. To compare the efficiency of the new model with the pricing of call options under the original Black-Scholes model and actual market prices, data from eleven gold coin options contracts in the Iranian Commodity Exchange from Farvardin 1401 to Esfand 1402 were used daily and a non-parametric Mann-Whitney two-group comparative test was used. The results showed that it was possible to provide a new model for option pricing by using the Fokker-Planck and Lam-Ito equations, and at the 95% level based on the MAPE criterion(mean absolute percentage error), there was no significant difference between the average scores in the two models, and these two models had the same efficiency.

Keywords:

European option, Hurst power, fractional Brownian motion, Fokker-Planck method, Black-Scholes fractional pricing equation.

1-PhD student, Department of Finance, Sanandaj Branch, Islamic Azad University, sanandaj, Iran. farahani90@yahoo.com

2-Department of Financial Management, Sanandaj Branch, Islamic Azad University, Sanandaj, Iran. (Corresponding Author). mahmood80933@yahoo.com

3-Department of Economics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran. farhad.ghaffari@yahoo.com

4-Department of Accounting, Sanandaj Branch, Islamic Azad University, Sanandaj, Iran. parvizibehzadaccounting@yahoo.co