فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
دوره شانزده، شماره شصت و سه، تابستان ۱۴۰۴
نوع مقاله: علمی پژوهشی
صفحات: ۶۴-۴۵

طراحی و بهینه‌سازی سبد سهام استوار توزیعی کلی با معیار حداکثر اختلاف میانگین

اصغرظفری[۱]، یعقوب پور کریم[۲]، سید علی پایتختی اسکویی[۳]، مهدی زینالی[۴] و احمد محمدی[۵]

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۸/۰۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۱۲/۲۳

چکیده

با توجه به ریسک بالای سرمایه‌گذاری بر روی یک دارایی، نظریه سبد سهام چارچوبی را برای مدیریت ریسک و بازده در غالب سرمایه‌گذاری بر روی چند دارایی فراهم می‌کند. هدف یک مدل سبد سهام، تخصیص بهینه بودجه سرمایه‌گذار بین چند دارایی می‌باشد تا اهداف سرمایه‌گذاری که غالباً توسط بازده و ریسک اندازه‌گیری می‌شود، برآورده شود. فلسفه سبد سهام کلی، بیشینه‌سازی بازده تجمعی در درازمدت است. بهینه‌سازی این مدل معمولاً با استفاده از توزیع تجربی داده‌های تاریخی انجام می‌شود، اما تطابق بیش‌ازحد با داده‌های تاریخی می‌تواند عملکرد ضعیفی در داده‌های تست داشته باشد. برای رفع این مشکل، پژوهش حاضر سبد سهام استوار توزیعی با معیار مکس-مین را معرفی می‌کند. پارامتر نا اطمینانی که عمل استوار سازی روی آن صورت می‌گیرد، توزیع بازده سبد سهام است. برای این منظور به‌جای در نظر گرفتن تنها یک توزیع و آن‌هم توزیع تجربی، یک خانواده از توزیع‌ها در همسایگی توزیع تجربی مورداستفاده قرار می‌گیرد و برای کنترل شعاع همسایگی از معیار حداکثر اختلاف میانگین استفاده می‌شود. حداکثر اختلاف میانگین یک رویکرد داده محور برای سنجش فاصله دو اندازه یا توزیع احتمال می‌باشد. بررسی ۲۵۲ سبد ۵ عضوی از میان ۱۰ دارایی با الگوریتم بهینه‌سازی تجمعی ذرات نشان داد که سبد استوار توزیعی نه‌تنها دارای میانگین بازده تجمعی بالاتری نسبت به دو سبد کلی معمولی و هم‌وزن است، بلکه بازده تجمعی تعدیل‌شده یا ریسک آن نیز به‌صورت چشمگیری از دو سبد مذکور بالاتر است. این مطلب نشان می‌دهد که در بورس اوراق بهادار تهران در نظر گرفتن توزیع‌های حول توزیع تجربی بسیار حائز اهمیت می‌باشد و درواقع توزیع بازده در طول زمان ثابت نیست.

کلمات کلیدی

استوار توزیعی، سبد سهام کلی، حداکثر اختلاف میانگین

۱-گروه مهندسی مالی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران. zafariasghar3852@gmail.com
۲-گروه حسابداری، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران. (نویسنده مسئول) pourkarim@iaut.ac.ir
۳-گروه اقتصاد، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران. oskooe@iaut.ac.ir
۴-گروه حسابداری، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران. Zeynali@iaut.ac.ir
۵-گروه حسابداری، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران. ahmad.mohammady@iaut.ac.ir

مقدمه

یا توجه به ریسک بالای سرمایه‌گذاری بر روی یک دارایی، نظریه سبد سهام چارچوبی را برای مدیریت ریسک و بازده در غالب سرمایه‌گذاری بر روی چند دارایی فراهم می‌کند. هدف یک مدل سبد سهام، تخصیص بهینه بودجه سرمایه‌گذار بین چند دارایی می‌باشد تا اهداف سرمایه‌گذاری که غالباً توسط بازده و ریسک اندازه‌گیری می‌شود، برآورده شود. تنوع معیارهای سنجش ریسک و بازده، باعث ایجاد مدل‌های مختلفی از مدل سبد سهام در ادبیات تحقیق‌شده است. سبد سهام میانگین-واریانس به‌عنوان اولین مدل پیشنهادی، بهینگی سبد را بر روی فاکتور ریسک قرار می‌دهد و آن را توسط انحراف معیار استاندار مدل‌سازی می‌کند. در این مدل سرمایه‌گذار می‌تواند حداقل بازده مورد انتظار خود را در غالب یک محدودیت به مدل اضافه کند. سنجش ریسک می‌تواند توسط معیارهای انحراف محور مانند انحراف معیار استاندار، نیم انحراف معیار، انحراف از میانه و ... و یا توسط معیارهای ضرر محور مانند ارزش در معرض ریسک، ریزش مورد انتظار، امید چندکی و ... مدل‌سازی شود. بازده نیز می‌تواند توسط مدل‌های مختلفی مانند مدل‌های سری زمانی مانند آریما، مدل‌های شبکه عصبی، شبکه مارکوف مخفی و ... مدل‌سازی شود.

مدل‌های سبد سهام برآمده از فلسفه‌های مختلفی هستند. به‌عنوان نمونه فلسفه مدل میانگین-واریانس کمینه‌سازی ریسک ضمن حفظ سطح خاصی از بازده مورد انتظار می‌باشد. مدل برابری ریسک گونه دیگری از مدل‌های بهینه‌سازی سبد سهام می‌باشد که فلسفه آن تنوع‌بخشی به ریسک از طریق تقسیم تا حد یکسان ریسک کل سبد سهام بین اجزای آن می‌باشد تا تغییرات شدید یک دارای نتواند کل بازده سبد سهام را تحت تأثیر قرار دهد. سبد حداکثر پیش‌بینی پذیری نیز گونه دیگری از مدل‌های انتخاب سبد سهام بهینه می‌باشد که در آن سعی می‌شود پارامترهای مدل‌های پیش‌بینی کننده بازده مورد انتظار به‌گونه‌ای پیش‌بینی شوند که حداکثر بازده با بالاترین اطمینان نسبت به رخداد آن حاصل گردد.

درصورتی‌که برای سنجش بازده مورد انتظار از بازده لگاریتمی استفاده شود، مدل سبد سهام کلی[۱] شکل می‌گیرد. استراتژی کلی که توسط جان کلی در سال ۱۹۵۶ ایجاد شد، در ابتدا برای به حداکثر رساندن ثروت انباشته در بازی‌های شرط‌بندی مکرر طراحی شد، اما بعداً برای تخصیص بهینه سرمایه با هدف به حداکثر رساندن نرخ رشد مورد انتظار سبد سهام در بلندمدت گسترش یافت (کارتا و کانونسانو[۲]، ۲۰۲۰). مطالعات مختلف نشان داده‌اند که یک سبد سرمایه‌گذاری بر اساس استراتژی کلی می‌تواند در درازمدت از هر سبد دیگری بهتر عمل کند؛ بنابراین فلسفه این مدل در کسب بازده تجمعی

در درازمدت می‌باشد (سی[۳]،۲۰۲۰). در مدل کلی توزیع بازده سبد یک پارامتر اصلی و یک منبع نا اطمینانی در مدل محسوب می‌شود. درواقع ذات پویای بازار سرمایه امکان انحراف از یک برآورد آماری از توزیع بازده سبد را امکان‌پذیر می‌کند. بدین‌صورت نیاز است تا سبد سهام در مقابل این منبع نا اطمینانی استوار گردد. بر اساس این نیاز، هدف پژوهش حاضر، استوار سازی توزیعی سبد سهام با معیار کلی با رویکرد حداکثر اختلاف میانگین[۴] می‌باشد. نوآوری پژوهش حاضر در بعد نظری طراحی مدل ترکیبی سبدسهام استوار توزیعی با معیار کلی با رویکرد حداکثر اختلاف میانگین و در بعد عملی بررسی عملکرد صورت استوار مدل کلی در بورس اوراق بهادار تهران و مقایسه عملکرد استواری و سودآوری آن با فرم معمولی آن و با سبد هم‌وزن می‌باشد.

مبانی نظری پژوهش

مدل‌های ریاضی بهینه‌سازی از تابع هدف و محدودیت‌ها تشکیل‌شده‌اند که برای ایجاد آن‌ها ترکیبی از متغیرهای تصمیم و پارامترهای مدل نقش دارند. پارامترهای مدل می‌تواند یک منبع ایجاد نا اطمینانی در آن باشد. به‌عنوان نمونه در یک محیط اقتصادی با تغییرات شدید، سود یک محصول می‌تواند تحت سناریوهای مختلف قرار گیرد و ازاین‌رو در نظر در نظر گرفتن یک عدد برای آن در یک مدل سیاست تولید محصول، می‌تواند نتایج سودآوری مدل را تحت تأثیر قرار دهد (فن و آنل[۵]،۲۰۲۴). مدل‌های بهینه‌سازی سبد سهام نیز از این نا اطمینانی در امان نیستند. در این مدل‌ها غالباً به‌جای بازده و ریسک از برآوردگرهای آماری استفاده می‌شود. یک برآوردگر آماری مانند میانگین می‌تواند برحسب بزرگی واریانس خود یک منبع نا اطمینانی در مدل باشد؛ زیرا در زمان تست واقعی مدل، این پارامتر می‌تواند از مقدار برآوردی خود فاصله بگیرد و در صورت انحراف شدید از آن، عملکرد سودآوری مدل به‌صورت کلی تحت تأثیر قرار گیرد و احیاناً سبد با ضررهای شدید مواجه گردد. ازاین‌رو نیاز است تا گونه‌ای از مدل‌های سبد سهام توسعه یابند که نسبت به تغییرات پارامترها دارای استواری باشند که مدل‌های انتخاب سبد سهام استوار با این انگیزه توسعه‌یافته‌اند.

مدل سبد بهینه در پژوهش حاضر، سبد با معیار کلی یا به‌اختصار سبد کلی می‌باشد که در آن سنجش بازده مورد انتظار از بازده لگاریتمی استفاده شود. هدف و فلسفه این مدل تخصیص بهینه سرمایه با هدف به حداکثر رساندن نرخ رشد مورد انتظار سبد سهام در بلندمدت گسترش یافت. مطالعات مختلف نشان داده‌اند که یک سبد سرمایه‌گذاری بر اساس استراتژی کلی می‌تواند در درازمدت از هر سبد دیگری بهتر عمل کند. در مدل سبد کلی فرض می‌شود که سرمایه‌گذار اطلاعات کاملی از

بازده توأم دارایی‌های تشکیل‌دهنده سبد دارد. بااین‌حال، در واقعیت، توزیع بازده قابل‌مشاهده نیست و باید به‌صورت آماری برآورد گردد (کارتا و کانونسانو[۶]، ۲۰۲۰).

چندین مطالعه نشان داده‌اند که سبد بهینه‌سازی شده بر اساس توزیع بازده نادرست می‌تواند در تست خارج از نمونه عملکرد ضعیفی داشته باشد. یک رویکرد جایگزین که کاملاً مبتنی بر داده است، اعمال مستقیم توزیع بازده تجربی ساخته‌شده از بازده‌های تاریخی است. این رویکرد باعث مسئله تطابق بیش‌ازحد[۷] با نمونه‌های تاریخی می‌شود که همچنان می‌تواند منجر به عملکرد ضعیف خارج از نمونه شود. این می‌تواند برای سرمایه‌گذارانی که نگران رویدادهای شدیدی هستند که ممکن است باعث انحراف چشمگیر دارایی‌ها از عملکرد تاریخی خود شوند، نگران‌کننده باشد (برمین و هلم[۸]، ۲۰۲۲). ایده اصلی پشت استوار سازی توزیعی این است که عدم قطعیت در توزیع بازده را با ساخت مجموعه‌ای از توزیع‌های ابهام[۹] که می‌تواند توزیع مولد داده را با اطمینان بالا شامل شود، توضیح دهد. یک راه‌حل استوار با بهینه‌سازی در برابر توزیع بدترین حالت در مجموعه ابهام به دست می‌آید (لی[۱۰]، ۲۰۲۳).

پویایی بازار سهام می‌تواند موجب تغییر در بازده دارایی‌های سبد سهام برای دوره‌های زمانی مختلف شود و مسئله سبد سهام استوار توزیعی، با توزیع بازده سبد سهام به‌صورت یک پارامتر دارای عدم قطعیت برخورد می‌کند. در مدل کلی به‌صورت متداول، توزیع بازده سبد سهام (نه تک‌تک دارایی‌ها) از دیدگاه توزیع تجربی موردبررسی قرار می‌گیرد. بدین‌صورت توزیع سبد سهام می‌تواند از مقدار برآوردی تجربی خود منحرف شود و زمینه برای عدم استواری سبد سهام ایجاد گردد. همان‌طور که بیان شد یک راه‌حل برای مواجه با این شرایط، در نظر گرفتن یک خانواده از توزیع‌ها به‌جای یک توزیع می‌باشد. این خانواده از توزیع‌ها در نزدیکی و همسایگی از توزیع تجربی قرار دارند و سناریوهایی را شبیه‌سازی می‌کنند که نشان‌دهنده انحراف توزیع سبد از توزیع تجربی است. برای این منظور نیاز است تا فاصله بین دو توزیع (توزیع تجربی و توزیع دارای انحراف از توزیع تجربی) موردانداز‌ه‌گیری قرار گیرد. برای این منظور پژوهش حاضر از معیار حداکثر اختلاف میانگین استفاده می‌کند. با اندازه‌گیری فاصله بین دو اندازه احتمال، نااستواری سبد سهام توسط یک شعاع همسایگی حول بازده تجربی کنترل می‌شود. بدین‌صورت استوار سازی با اطمینان بالاتر با شعاع همسایگی بزرگ‌تر حول توزیع تجربی کنترل می‌شود.

بنا بر آنچه گذشت، در ابتدا به اهمیت مدل‌های استوار در محیط نا اطمینانی اشاره گردید و سپس معیار کلی برای کسب بازده بالاتر در بلندمدت موردتوجه قرار گرفت. در ادامه مدل‌های استوار توزیعی معرفی شد که پارامتر بازده سبد را به‌عنوان منبع نا اطمینانی در بهینه‌سازی سبد سهام در نظر

می‌گرفت. خلأ تحقیقاتی که پژوهش حاضر موردتوجه قرار می‌دهد، ترکیب سه مورداشاره شده در قالب طراحی مدل سبدسهام بهینه استوار توزیعی کلی است که تاکنون در ادبیات تحقیق موردبررسی قرار نگرفته است. رهیافت مورداستفاده برای استوار سازی توزیعی، رویکرد بدترین سناریو یا مین-مکس می‌باشد که در آن جواب بهینه به صورتی انتخاب می‌شود تا بدترین ضرر حاصل‌شده از سناریوهای مختلف (توزیع‌های انحرافی حول توزیع تجربی) کمینه گردد. برای ساختن توزیع‌های انحرافی از رویکرد شبیه‌سازی استفاده خواهد شد و از الگوریتم تجمعی ذرات برای یافتن سبد بهینه استفاده خواهد شد. در بخش مدل تحقیق، از جنبه ریاضی به معرفی کامل مدل پژوهش پرداخته خواهد شد.

پیشینه پژوهش

بیرانوند و همکاران (۱۴۰۳) به بیشینه‌سازی سبد سهام استوار توزیعی بر اساس نسبت کالمار با متریک واسرشتن پرداختند. استراتژی پژوهش برای استوار سازی پارامتر توزیع بازده، در نظر گرفتن تمام بازده‌هایی می‌باشد که در یک همسایگی از توزیع تجربی سبد قرار دارد که برای تعیین چنین توزیع‌هایی از معیار متریک واسرشتن استفاده‌شده است. سبد نمونه‌ای پژوهش حاضر متشکل از ۸ شاخص یا صنعت از بورس اوراق بهادار تهران و در افق زمانی هفتگی، نشان داد که سبد استوار توزیعی کالمار نسبت مذکور را به میزان۲۷/۱ بهبود می‌دهد و بعلاوه کمینه نسبت کالمار در ۵ دوره در سبد استوار توزیعی نسبت به سبد فاقد این خاصیت بیشتر می‌باشد. شیرکوند و فدایی (۱۴۰۲) به‌منظور به دست آوردن سبد سهام بهینه استوار، از سناریو بندی وضعیت‌های مختلف بازار، بر اساس بازده روزانه شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران و به‌کارگیری الگوریتم بهینه‌سازی توده ذرات و ملاک حداقل حداکثر پشیمانی استفاده کردند. همچنین در این پژوهش، توابع هدف چندمتغیره و امگا ـ ارزش در معرض ریسک شرطی، به‌عنوان توابع برازش در بهینه‌سازی توده ذرات به کار گرفته‌شده است. نتیجه نشان می‌دهد که سناریو بندی بازار و به‌کارگیری ملاک حداقل حداکثر پشیمانی، عملکرد سبدهای سهام بهینه استوار را بهبود می‌دهد. همچنین، تابع چندمتغیره و ضریب امگا ـ ارزش در معرض ریسک شرطی به بهبود بیشتری در عملکرد سبدهای سهام استوار منجر می‌شود.

فن و لجون[11] (۲۰۲۴)، یک خانواده جدید از مسائل بهینه‌سازی استوار توزیعی را تحت ابهام حاشیه‌ای و کاپولایی برای مسائل بهینه‌سازی سبد سهام بررسی کردند. مدل پیشنهادی مجموعه ابهامی از بازده سبد سهام را در نظر می‌گیرد که در آن توزیع‌های حاشیه‌ای در معیار سنجش متریک وازرتین به همتایان اسمی خود نزدیک باشند. نتایج نشان می‌دهد که شعاع همسایگی وازرتین بر روی عملکرد سودآوری سبد سهام تأثیر دارد. همچنین عملکرد سودآوری مدل استوار توزیعی در معیار

نسبت شارپ از مدل وزن برابر و مدل ارزش در معرض ریسک شرطی بدون ابهام بهتر می‌باشد. یویهارا و همکاران[۱۲] (۲۰۲۴) به مساله تخصیص بهینه کوپن‌ها به مشتریانی که تحت محدودیت بودجه در یک وب‌سایت تجارت الکترونیک هستند، پرداختند و یک مدل بهینه‌سازی سبد استوار توزیعی مبتنی بر تقسیم‌بندی مشتری را برای مشکل تخصیص کوپن اعمال کردند. آن‌ها همچنین کارایی روش خود را از طریق آزمایش‌های عددی با استفاده از داده‌های واقعی از کوپن‌های توزیع‌شده به‌طور تصادفی تائید کردند. نتایج عددی دقیق نشان می‌دهد که مدل بهینه‌سازی استوار نسبت به مدل کوله‌پشتی چندگزینه‌ای که معمولاً استفاده می‌شود و مدل بهینه‌سازی میانگین واریانس مرسوم به افزایش فروش بیشتری دست می‌یابد. فن و آنل (۲۰۲۴) به مطالعه ابهام گریزی به کمک استوار سازی توزیعی در چارچوب یک سرمایه‌گذاری به‌منظور به حداکثر رساندن مطلوبیت تحت مدل اصلاح‌شده الاستیسیته نوسانات ثابت برای دارایی اساسی پرداختند و راه‌حل‌های شکل بسته از نوع غیر آفین را برای تخصیص بهینه و تابع مقدار از طریق مسئله کوشی استخراج کردند. شی هان و همکاران[۱۳] (۲۰۲۳) مسئله بهینه‌سازی سبد سهام آلفای استوار توزیعی را تحت عدم قطعیت توزیع بازده بررسی کردند و مدل مرتبط با معیار اول ایمنی و نابرابری چبیشف تعمیم‌یافته را ایجاد کردند. سپس استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه را برای این مدل استخراج کردند و در پایان یک تحلیل تجربی انجام‌شده است.

ژو و یو[۱۴] (۲۰۲۴) یک مدل بهینه‌سازی استوار توزیعی جدید تحت گشتاورهای اول و دوم شناخته‌شده برای توزیع‌های نامشخص ارائه کردند. آن‌ها هر دو معیار انحراف استاندارد و ارزش در معرض خطر شرطی را برای اندازه‌گیری ریسک استفاده کردند. مدل جدید را می‌توان به یک مدل ساده ازنظر توزیع استوار تحت فرضیات اندازه‌گیری پاداش، کاهش داد. علاوه بر این، می‌توان آن را به‌عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی نیمه معین قابل‌حل با قضیه دوگانگی تحت اطلاعات جزئی شناخته‌شده پارامترهای نامشخص بازنویسی کرد. درنهایت، مدل بر روی مسائل سبد سهام آزمایش شد و از نتایج عددی تائید شد که مومنتوم‌های اول و دوم می‌تواند تصمیم معقولی بدهد.

لی (۲۰۲۳) یک نوع استوار سازی از مدل بهینه‌سازی سبد سهام کلی به نام بهینه‌سازی سبد کلی-وازرتین[۱۵] را معرفی کردند. در این مدل یک استوار سازی توزیعی به مسئله اساسی خطای تخمین در بهینه‌سازی سبد سهام کلی[۱۶] با تعریف یک همسایگی از توزیع‌های نزدیک به توزیع بازگشتی تجربی با استفاده از متریک وازرتین می‌پردازد. مدل به‌صورت کارآمد به‌عنوان یک برنامه محدب قابل‌حل است. با استفاده از داده‌های مالی تجربی، مطالعه عددی نشان می‌دهد که سبد کلی-وازرتین می‌تواند در

آزمایش‌های خارج از نمونه در چندین معیار عملکرد بهتر از سبدهای کلی عمل کند و ثبات بیشتری از خود نشان دهد.

برمین و هلم[17] (۲۰۲۲) نشان دادند که معامله‌گران استراتژی کلی به‌طور طبیعی به‌گونه‌ای معامله می‌کنند که تعادلی را برای ماتریس کوواریانس آنی القا کنند. این تعادل که به‌تنهایی از معاملات ناشی می‌شود، این ویژگی را دارد که همبستگی تعادل را می‌توان به‌عنوان نقطه زین یک بازی دیفرانسیل تصادفی توصیف کرد. بااین‌حال، ازآنجایی‌که بازی لزوماً یک بازی با مجموع صفر نیست، نوسانات تعادلی کمتر از آن چیزی است که از بازی پیش‌بینی می‌شود. تعادل کوواریانس به‌طور کامل توسط نرخ بازده لگاریتمی، نرخ بهره و تمایل کل به اهرمی که در بازار مشاهده می‌شود مشخص می‌شود. سی[18] (۲۰۲۰) یک سبد زمان گسسته را در نظر گرفتند که شامل فرکانس تعادل مجدد به‌عنوان یک پارامتر اضافی در بیشینه‌سازی می‌شود و معیار کلی به‌عنوان معیار عملکرد استفاده می‌شود. برای این منظور با استفاده از معیار کلی در فرمول‌بندی مبتنی بر فرکانس، ابتدا شرایط لازم و کافی برای سبد بهینه کلی مبتنی بر فرکانس اثبات می‌شود. با کمک این شرایط، چندین ویژگی بهینه جدید مانند بهینه نسبت مورد انتظار و بهینه نسبی مجانبی نشان داده می‌شود. درنهایت یک الگوریتم معاملاتی ساده با استفاده از مفهومی به نام شرط دارایی غالب پیشنهاد می‌شود.

کارتا و کانونسانو[19] (۲۰۲۰) یک چارچوب کلی برای اعمال معیار کلی برای داده‌های بازار سهام و درنتیجه بهینه‌سازی سبد سهام ایجاد کردند. تحت شرایط معدود، با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو با سناریوهای مختلف، ثابت می‌شود که معیار کلی در بسیاری از جنبه‌ها بر هر رویکرد دیگری برتری دارد. به‌ویژه، نرخ رشد مورد انتظار و میانه ثروت نهایی را به حداکثر می‌رساند. همچنین نشان داده می‌شود که تحت یک توزیع نرمال بازده، معیار کلی بهترین عملکرد را در بلندمدت دارد. در مرحله بعد، یک سبد با معیار کلی بدون اهرم و شرایط فروش کوتاه بهینه می‌شود و نشان داده می‌شود که این سبد در مرز کارآمدی میانگین-واریانس قرار دارد و بازده مورد انتظار بالاتر و واریانس بالاتری دارد، اگرچه تنوع کمتری دارد، جی و همکاران[20] (۲۰۲۲) مسئله بهینه‌سازی استوار توزیعی سبد سهام با نسبت بازده تعدیل‌شده با دم پایدار خطی شده را مطالعه کردند که در آن هدف به حداکثر رساندن معیار عملکرد نسبت مذکور در بدترین حالت تحت ابهام وازرتین مبتنی بر داده است. برای منعکس کردن محدودیت‌های بازار سهام، دو محدودیت به نام محدودیت‌های آستانه خرید و تنوع در نظر گرفته می‌شود. مسائل پیشنهادی به مسائل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط فرموله می‌شوند و در پایان نتایج اعتبارسنجی با استفاده از روش افق غلتشی، عملکرد برتر خارج از نمونه سبدهای پژوهش را نشان

می‌دهد. حسینی نوده و همکاران (۲۰۲۲) بهینه‌سازی سبد سهام با فرض توزیع ناشناخته بازده دارایی ازنظر توزیع را با یک محدودیت تسلط تصادفی مبهم در نظر می‌گیرد. هدف، به حداکثر رساندن بازده مورد انتظار در بدترین حالت و مشروط به یک محدودیت غالب تصادفی مرتبه دوم مبهم است نشان داده‌شده است که بهینه‌سازی سبد سهام مبتنی بر ابهام وازرتین را می‌توان به یک برنامه نیمه معین و برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم کاهش داد. مسائل با استفاده از راه‌حل‌های بهینه برنامه‌های بهینه‌سازی بر اساس تنظیمات مختلف به‌طور عمیق موردبررسی قرار می‌گیرند. ژانگ[۲۱] (۲۰۲۲) با در نظر گرفتن ریسک گریزی سرمایه‌گذاران و عدم قطعیت مشخص‌کننده بازده دارایی یک مدل سبد پرتفوی استوار توزیعی را تحت شرایطی ایجاد کردند که توزیع بازده دارایی پرخطر ناشناخته باشد. به‌طور خاص، هدف یافتن یک سبد بهینه از دارایی‌ها است که سطح مطلوبیت بدترین حالت را در اندازه واسرشتن به حداکثر می‌رساند. این مدل همچنین به‌عنوان یک مسئله برنامه‌نویسی اعداد صحیح درجه دوم با محدودیت‌های کاردینالیته (تعداد سهام) فرموله شده است. علاوه بر این، یک الگوریتم ترکیبی برای بهبود کارایی راه‌حل و مناسب‌تر کردن آن برای مسائل در مقیاس بزرگ پیشنهادشده است

سبد سهام با معیار کلی گونه‌ای از مدل‌های انتخاب بهینه سبد سهام می‌باشد که در آن تأکید بر رشد سبد سهام در درازمدت با تابع هدف رشد لگاریتمی می‌باشد. استوار سازی توزیعی سبد سهام با معیار کلی با رویکرد حداکثر اختلاف میانگین تاکنون در ادبیات تحقیق موردمطالعه قرار نگرفته است. بعلاوه سبد سهام کلی در فرم معمولی خود نیز در مورد مطالعاتی بورس اوراق بهادار تهران تاکنون موردبررسی قرار نگرفته است. بر این اساس نوآوری پژوهش حاضر در دو بعد نظری و عملی به‌صورت زیر است:

۱-طراحی مدل سبد سهام استوار توزیعی با معیار کلی با رویکرد حداکثر اختلاف میانگین؛

۲-بررسی عملکرد صورت استوار مدل کلی در بورس اوراق بهادار تهران؛ و مقایسه عملکرد استواری و سودآوری آن با فرم معمولی سبد کلی و سبد هم‌وزن.

مدل تحقیق

در این بخش به طراحی مدل سبد استوار توزیعی کلی با معیار واگرایی کی-ال پرداخته می‌شود. فرض کنیم سبدسهام از N دارایی تشکیل‌شده باشد که به‌صورت یک سبدسهام چند دوره‌ای با T دوره در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین سبد در انتهای هر دوره $t \in \{1,2,...,T\}$ دارای یک ارزش (پولی) می‌باشد. برای دوره tام، بردار بازده دارایی‌های سبدسهام به‌صورت $R_t = [R_{t1}, R_{t2}, ..., R_{tN}]^T$

در نظر گرفته می‌شود و بردار وزن سبدسهام با $w = (w_1, ..., w_N)$ نشان داده می‌شود. به‌وضوح تمام سبدهای شدنی در مجموعه $W := \{w \in R^N \mid 1^T.w = 1;\ w \geq 0\}$ قرار دارند. درصورتی‌که ارزش اولیه سبد برابر یک واحد پول باشد، ارزش نهایی سبدسهام (برحسب واحد پول) بر روی T دوره از رابطه (۱) محاسبه می‌شود.

$$V_T = \prod_{t=1}^{T} (1 + R_t^T w) \qquad (۱)$$

نرخ رشد سبدسهام نیز از طریق لگاریتم میانگین هندسی V_T به‌صورت رابطه (۲) محاسبه می‌شود (برمین و هلم[۲۲]،۲۰۲۲).

$$\gamma_t = \log(\sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T} (1 + R_t^T w)}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \log(1 + R_t^t w) \qquad (۲)$$

نرخ رشد لگاریتمی در سبد سهام به دلیل تعدیل نوسانات و کاهش تأثیر بازده‌های کوتاه‌مدت، ارزیابی دقیق‌تری از رشد بلندمدت ارائه می‌دهد. این روش با ارائه تخمینی بهتر از رشد واقعی، در تحلیل‌های مالی و ارزیابی ریسک بسیار کاربردی است و نسبت به روش‌های دیگر ثبات بیشتری دارد (فن و لجون،۲۰۲۴). بر اساس قانون قوی اعداد بزرگ[۲۳] و با فرض اینکه متغیرهای تصادفی R_t نوفه سفید[۲۴] باشند و دوبه‌دو از هم مستقل باشند، می‌توان نشان داد که

$$\lim_{T \to \infty} \gamma_T = E(\log(1 + R^T w)) \qquad (۳)$$

در رابطه (۳)، R هم توزیع با R_t می‌باشد. سبدسهام کلی به دنبال بیشینه‌سازی نرخ رشد لگاریتمی می‌باشد. بدین‌صورت مسئله بهینه‌سازی سبدسهام کلی در فرم معمولی به‌صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود (لی،۲۰۲۳).

$$\max_{w} E(\log(1 + R^T w)) \quad 1^T.w = 1;\ w \geq 0; w \in R^N \qquad (۴)$$

برای بهینه‌سازی مدل کلی نیاز است تا توزیع متغیر R مشخص باشد. برای این منظور غالباً از توزیع تجربی به شکل $\hat{F}_R = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{\{R_j\}}$ استفاده می‌شود. همان‌طور که بیان شد به‌کارگیری توزیع تجربی باعث پدیده برازش بیش‌ازاندازه در داده‌های آموزشی می‌شود و استواری عملکرد سبد را بر روی داده‌های تست کاهش می‌دهد. برای رفع این مشکل، پژوهش حاضر به استوار سازی توزیعی سبدسهام

کلی با رویکرد حداکثر اختلاف میانگین می‌پردازد و در ادامه معیار حداکثر اختلاف میانگین معرفی می‌گردد.

حداکثر اختلاف میانگین (MMD) یک آزمون آماری نا پارامتریک مبتنی بر هسته (کرنل) است که برای تعیین اینکه آیا دو توزیع داده‌شده مشابه هستند یا خیر در گروتن و همکاران[۲۵] (۲۰۱۲) پیشنهادشده است. حداکثر اختلاف میانگین می‌تواند به‌عنوان یک تابع ضرر/هزینه در الگوریتم‌های مختلف یادگیری ماشین مانند تخمین چگالی، مدل‌های مولد، شبکه‌های عصبی معکوس مورداستفاده در مسائل معکوس استفاده شود. فرض کنیم X,Y دو متغیر تصادفی هستند که به ترتیب دارای تابع‌های توزیع Q,P هستند. برای سنجش فاصله دو توزیع احتمال، یکی از ابتدایی‌ترین ایده‌ها، سنجش اختلاف بین میانگین دو توزیع می‌باشد؛ بنابراین درصورتی‌که P,Q دو اندازه احتمال باشند، حداکثر اختلاف میانگین به‌صورت رابطه (۵) تعریف می‌گردد.

$$MMD^2(P,Q) = |\mu_P - \mu_Q|^2 \qquad (۵)$$

که μ_P و μ_Q به ترتیب میانگین متغیرهای تصادفی X,Y می‌باشد. اگر دو توزیع میانگین یکسان و واریانس متفاوت دارند (پس دو توزیع متفاوت هستند)، در این صورت در نظر گرفتن تفاضل میانگین دو توزیع، به‌صورت آنچه بیان شد، ایده مناسبی نیست؛ زیرا با این انتخاب، فاصله دو توزیع صفر می‌شود. برای رفع این مشکل می‌توان سایر گشتاورهای توزیع را نیز در نظر گرفت. فرض کنیم $\Phi: x \to (x, x^2, ..., x^n)$ تابعی باشد که مقادیر متغیر تصادفی را بر روی n توان اول آن مقدار تصویر می‌کند (مقادیر نمونه‌ای را به داخل فضای اقلیدسی از مراتب بالاتر می‌نگارد). در این صورت

$$\begin{aligned} \mu_P(\Phi(X)) &= [E[X^1], ..., E[X^n]]^T \\ \mu_Q(\Phi(Y)) &= [E[Y^1], ..., E[Y^n]]^T \end{aligned} \qquad (۶)$$

و بر این اساس حداکثر اختلاف میانگین در فضای اقلیدسی بعد بالاتر بر اساس گشتاورها محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} &MMD^2(P,Q) = \| \mu_P(\Phi(X)) - \mu_Q(\Phi(Y)) \|_2^2 = \\ &< \mu_P(\Phi(X)) - \mu_Q(\Phi(Y)), \mu_P(\Phi(X)) - \mu_Q(\Phi(Y)) > \end{aligned} \qquad (۷)$$

این ایده را می‌توان گسترش داد و تابع Φ را به‌صورت دلخواه در نظر گرفت که می‌تواند به داخل یک فضای هیلبرت مقدار بگیرد تا بدین‌صورت تمام گشتاورها در محاسبه وارد گردد. در این صورت

$$MMD^2(P,Q) = \| \mu_P(\Phi(X)) - \mu_Q(\Phi(Y)) \|_H^2 = \\ < \mu_P(\Phi(X)) - \mu_Q(\Phi(Y)), \mu_P(\Phi(X)) - \mu_Q(\Phi(Y)) > = \\ < \mu_P\Phi(X), \mu_P\Phi(X) > -2(< \mu_P\Phi(X), \mu_Q\Phi(Y) >) + < \mu_Q\Phi(Y), \mu_Q\Phi(Y) > \quad (۸)$$

محاسبه عبارت بالا با در دست داشتن تابع Φ امکان‌پذیر می‌باشد؛ اما نکته قابل‌توجه این است که بدون دانستن ضابطه Φ نیز می‌توان عبارت بالا را محاسبه کرد که برای این منظور از حقه کرنل[۲۶] استفاده می‌شود که بیان می‌کند برای تابع Φ تابع کرنل k موجود است به صورتی که

$$< \Phi(x), \Phi(y) >= k(x,y) \quad (۹)$$

بر این اساس رابطه (۸) به‌صورت رابطه (۱۰) بازنویسی می‌شود.

$$MMD^2(P,Q) = E_P[k(X,X)] - 2E_{P,Q}[k(X,Y)] + E_Q[k(Y,Y)] \quad (۱۰)$$

که ازنقطه‌نظر عملیاتی به‌صورت رابطه (۱۱) محاسبه می‌گردد.

$$MMD^2(X,Y) = \frac{1}{m(m-1)} \sum_i \sum_{j \neq i} k(x_i, x_j) - \\ \frac{1}{m.m} \sum_i \sum_{j \neq i} k(x_i, y_j) + \frac{1}{m.(m-1)} \sum k(y_i, y_j) \quad (۱۱)$$

که $k(x_i, x_j) = \exp(\frac{-\| x_i, x_j \|^2}{2\sigma^2})$ تابع کرنل گوسی می‌باشد (گروتن و همکاران[۲۷]، ۲۰۱۲).

برای استوار سازی توزیعی سبدسهام کلی با رویکرد حداکثر اختلاف میانگین، ابتدا یک همسایگی از توزیع‌ها حول توزیع تجربی به‌صورت $B(\varepsilon) := \{F \mid d_{MMD}(F, \hat{F}_R) \leq \varepsilon\}$ مشخص می‌گردد که $B(\varepsilon)$ متشکل از توزیع‌هایی می‌باشد که در شعاع ε از توزیع تجربی قرار دارند. سبد استوار توزیعی کلی که در پژوهش حاضر معرفی می‌شود، یک سبد از خانواده مکس-مین می‌باشد. بدین‌صورت که تابع هدف کلی برای یک انتخاب دلخواه از اوزان سبدسهام برای تمام توزیع‌های موجود در همسایگی محاسبه می‌شود و سپس کمترین مقدار تابع هدف، به‌عنوان مقدار تابع هدف سبد استوار برای آن اوزان استخراج می‌شود. بدین‌صورت اوزانی از سبدسهام به‌عنوان بهینه محسوب می‌گردد که تابع هدف را بیشینه کند. بدین‌صورت سبد استوار توزیعی کلی با معیار واگرایی کی ال به‌صورت رابطه (12) می‌باشد.

$$\max_{w\in W} \min_{F\in B(\varepsilon)} E_F(\log(1+R^T w)) \quad (۱۲)$$
$$1^T.w = 1;\ w \geq 0; w \in R^N$$

که در آن، مطابق رابطه (۳)، $E_F(\log(1+R^T w))$ نرخ رشد لگاریتمی بر اساس توزیع F حول توزیع تجربی می‌باشد. در پژوهش حاضر برای ساختن توزیع‌های در همسایگی توزیع تجربی از رویکرد شبیه‌سازی استفاده خواهد شد و برای بهینه‌سازی مدل (۸) از الگوریتم تجمعی ذرات استفاده خواهد شد. دلیل استفاده از این الگوریتم شبیه‌سازی به‌کاررفته در مدل می‌باشد که عملاً محاسبه جواب بهینه تحلیلی را غیرممکن می‌سازد. ویژگی متمایز مدل سبد سهام پژوهش حاضر در مقایسه با ادبیات تحقیق، استوار سازی توزیعی مدل کلی می‌باشد. استوار سازی توزیعی در سبد سهام اهمیت بسیاری در کاهش ریسک و بهبود عملکرد کلی سرمایه‌گذاری دارد در پیاده‌سازی مدل، به‌صورت عملی نحوه بهینه‌سازی مدل (۱۲) تشریح می‌گردد.

یافته‌های پژوهش

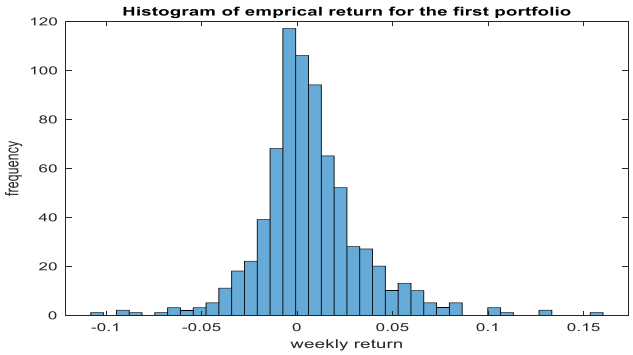
در این بخش نحوه پیاده‌سازی عملی مدل تشریح می‌گردد و عملکرد سبد نمونه‌ای پژوهش با رویکرد استوار توزیعی کلی موردسنجش قرار می‌گیرد. سبدهای نمونه‌ای پژوهش متشکل از ۲۵۲ سبد می‌باشد و هر سبد از ۵ دارایی تشکیل‌شده است. پنج دارایی موجود در هر سبد از بین ۱۰ دارایی لیست شده در جدول (۱) انتخاب می‌شود و ۲۵۲، تعداد کل انتخاب‌های ۵ دارایی از بین ۱۰ دارایی می‌باشد. با توجه به حجم بالای محاسباتی به‌واسطه شبیه‌سازی، تعداد دارایی‌های هر سبد برابر ۵ انتخاب‌شده است؛ بنابراین جامعه آماری همه سبدهای با ۵ دارایی از بین ۱۰ شاخص جدول (۱) می‌باشد و نمونه آماری برابر جامعه آماری در نظر گرفته‌شده است. انتخاب شاخص به‌عنوان دارایی به معنی تشکیل یک سبد متنوع از سهام زیرمجموعه آن شاخص می‌باشد. بدین‌صورت اصل تنوع در تشکیل سبد سهام رعایت می‌گردد.

جدول۱. دارایی‌های نامزد ورود به سبدهای نمونه‌ای پژوهش

دارایی (شاخص)	شماره	دارایی (شاخص)	شماره
قند	۱	بانک	۶
ماشین‌آلات	۲	کانی‌های فلزی	۷
شیمیایی	۳	خودرو	۸
دارو	۴	فرآورده‌های نفتی	۹
سیمان	۵	کانی‌های غیرفلزی	۱۰

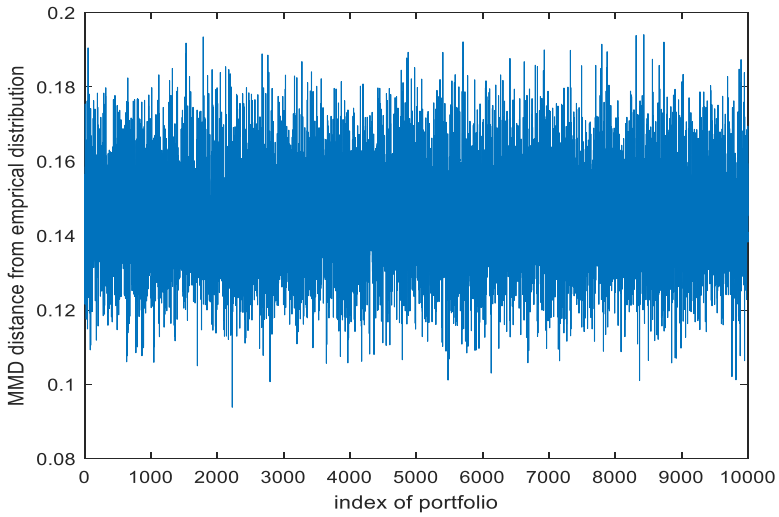
داده‌های تاریخی پژوهش مربوط به ابتدای سال ۱۳۸۸ تا پایان سال ۱۴۰۲ می‌باشد. افق زمانی سبدهای نمونه‌ای پژوهش، هفتگی (۵ روز کاری) می‌باشد و بر این اساس ۷۳۸ بازده تاریخی در اختیار می‌باشد. از این تعداد ۸۵٪ برای آموزش (بهینه‌سازی سبد سهام) و ۱۵٪ برای ارزیابی عملکرد سبد سهام (تست) مورداستفاده قرار خواهد گرفت.

در ادامه روند به‌عنوان نمونه روند ساخت اولین سبد بهینه از بین ۲۵۲ سبد تشریح می‌گردد که سبد متشکل از ۵ دارایی اول جدول (۱) می‌باشد. برای هر انتخاب از اوزان این سبد (یک بردار پنج‌تایی مثبت با مجموع یک)، توزیع بازده سبد بر روی داده‌های آموزشی یا همان توزیع تجربی استخراج می‌گردد. به‌عنوان نمونه در صورت انتخاب برابر اوزان سبد (هرکدام۰/۲) و با تقسیم بازده‌های تاریخی سبد به ۴۰ دسته، توزیع تجربی به‌صورت نمودار فراوانی (۱) محاسبه گردید. ازاین‌رو توزیع تجربی چهل مقدار (مراکز دسته‌ها) را با احتمالات متناسب با فراوانی هر دسته کسب می‌کند.



نمودار۱. توزیع بازده تجربی برای سبد هم‌وزن ابرای سبد متشکل از ۵ دارایی اول

با توجه به اینکه مدل پژوهش از نوع استوار توزیعی کلی می‌باشد، در ادامه باید توزیع‌هایی را بیابیم که در یک همسایگی از توزیع تجربی بر اساس فاصله حداکثر اختلاف میانگین باشند. برای این منظور از رویکرد شبیه‌سازی استفاده گردید و ۱۰۰۰۰۰ سبد نمونه‌ای انتخاب گردید و فاصله آن از توزیع تجربی محاسبه گردید که فاصله ۱۰۰۰۰ سبد شبیه‌سازی اول از توزیع تجربی به‌صورت نمودار (۲) می‌باشد. برای ساختن سبدهای شبیه‌سازی ابتدا ۵ عدد تصادفی بین صفر و یک انتخاب گردید و سپس با تقسیم بر مجموع آن‌ها، یک سبد مجاز (مجموع اوزان برابر یک) به دست آمد.



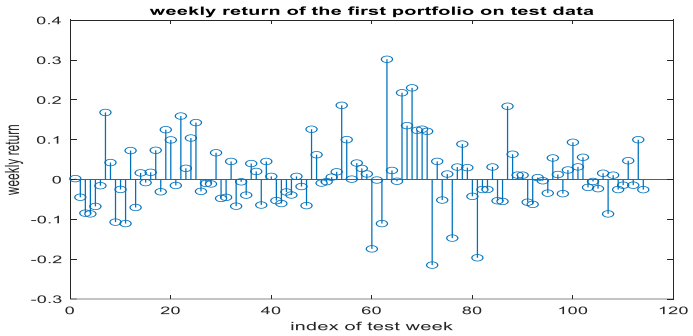
نمودار۲. فاصله حداکثر اختلاف میانگین ۱۰۰۰۰ سبد شبیه‌سازی‌شده از توزیع تجربی برای سبد اول

با توجه به فاصله‌های حاصل‌شده از توزیع تجربی، یک‌دهم بیشترین و کمترین فاصله برای شعاع همسایگی انتخاب گردید؛ بنابراین در فرآیند بهینه‌سازی استوار توزیعی مدل پژوهش از توزیع‌های در این شعاع همسایگی استفاده می‌شود. حال برای هر انتخاب از اوزان سبد شماره یک، تابع هدف مدل استوار توزیعی کلی، برای تمام توزیع‌های موجود در همسایگی یک‌دهم توزیع تجربی موردمحاسبه قرار می‌گیرد و از بین آن‌ها، کمترین بازده لگاریتمی انتخاب می‌شود؛ بنابراین به هر سبد یک بازده تخصیص داده می‌شود. درنهایت سبدی انتخاب می‌شود که کمترین بازده حاصل‌شده از عملکرد آن تحت سناریوهای شبیه‌سازی‌شده، بیشترین مقدار را در بین سبدها داشته باشد. برای پیاده‌سازی این رویکرد مکس-مین، از الگوریتم تجمعی ذرات با ۱۰۰۰ ذره و ۱۰۰ تکرار استفاده گردید. برای پوشش محدودیت مجموع اوزان سبد برابر یک، سبد بهینه پس از محاسبه مورد نرمال‌سازی (تقسیم بر مجموع) قرار گرفت. به‌عنوان نمونه برای اولین سبد، اوزان بهینه مدل استوار توزیعی پژوهش به‌صورت زیر جدول (۲) محاسبه گردید. وزن هر دارایی، درصدی از سرمایه اولیه است که به خرید آن دارایی اختصاص می‌یابد.

جدول۲. اوزان بهینه اولین سبد نمونه‌ای پژوهش

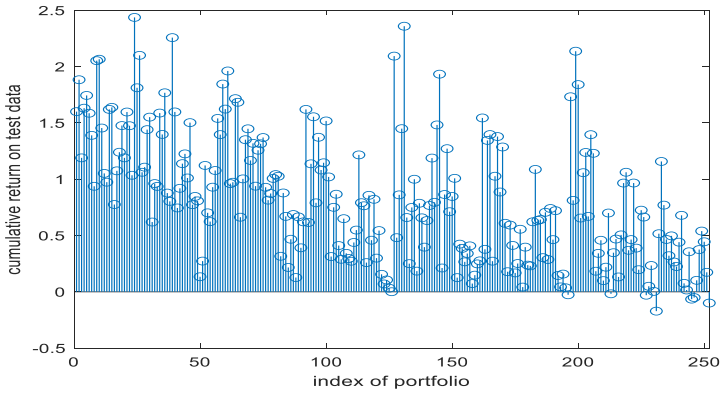
شماره دارایی	۱	۲	۳	۴	۵
وزن	۰	۰/۲۷۰۵۶۲	۰/۲۹۴۲۳۷	۰/۰۳۵۰۴۱	۰/۴۰۰۱۶

پس از بهینه‌سازی ۲۵۲ سبد پژوهش، عملکرد آن‌ها بر روی داده‌های تست ارزیابی گردید و برای هر هفته از داده‌های تست، یک بازده هفتگی ایجاد شد. به‌عنوان نمونه عملکرد سبد بهینه اول بروی ۱۱۴ هفته تست به‌صورت نمودار (۳) استخراج گردید.



نمودار۳. عملکرد سبد بهینه اول بر روی داده‌های تست

همان‌طور که در فلسفه مدل کلی بیان گردید، هدف از این مدل، بیشینه‌سازی بازده تجمعی سبد سهام می‌باشد. برای این منظور بازده تجمعی هر سبد بر روی داده‌های تست محاسبه گردید که به‌عنوان نمونه برای سبد شماره یک برابر ۱/۶۰۰۶ می‌باشد. روند بهینه‌سازی ۲۵۲ سبد مطابق آنچه برای سبد اول بیان شد، صورت گرفت. هر سبد دارای یک وزن بهینه و یک عملکرد بازده تجمعی بر روی ۱۱۴ هفته تست می‌باشد. بازده تجمعی حاصل‌شده برای ۲۵۲ سبد به‌صورت نمودار (۴) می‌باشد.



نمودار۴. بازده‌های تجمعی برای ۲۵۲ سبد بهینه پژوهش بر روی داده‌های تست

در ادامه به بررسی عملکرد سبدهای نمونه‌ای در داده‌های تست پرداخته می‌شود. برای این منظور، مشخصات آماری مربوط به ۲۵۲ بازده تجمعی حاصل‌شده از سبد استوار توزیعی کلی در معیارهای

میانگین بازده تجمعی، ریسک (انحراف معیار بازده‌های تجمعی) و نسبت شارپ محاسبه گردید. نسبت شارپ از تقسیم میانگین به ریسک محاسبه می‌شود و نشان می‌دهد که به ازای یک واحد ریسک، بازده به چه میزان افزایش می‌یابد. درواقع نسبت شارپ بازده تعدیل‌شده با ریسک می‌باشد و مقادیر بالاتر آن برای سرمایه‌گذاران مطلوب می‌باشد. علاوه بر مدل پژوهش، مدل‌های برابری وزن و مدل کلی بدون خاصیت استوار توزیعی نیز مورد ارزیابی عملکرد بر روی داده‌های تست قرار گرفتند. در مدل برابری وزن، از اطلاعات محیط سرمایه‌گذاری هیچ استفاده‌ای نمی‌شود و وزن همه دارایی در سبد سرمایه‌گذاری یکسان در نظر گرفته می‌شود. مدل سبد کلی معمولی نیز بر اساس الگوریتم فرا ابتکاری تجمعی ذرات در همان داده‌های آموزشی و تست مورداستفاده در مدل استوار توزیعی مورد بهینه‌سازی قرار گرفت. جدول (۳) نتیجه حاصل از سنجش عملکرد سه مدل سبد سهام را در داده‌های تست نشان می‌دهد.

جدول۳. عملکرد مدل پژوهش در مقایسه با مدل‌های برابری وزن و کلی معمولی

سبد	میانگین بازده‌های تجمعی	ریسک (انحراف معیار)	نسبت شارپ
برابری ریسک	۰/۴۶۳۵	۰/۳۲۱۶۹۶	۱/۴۴۰۸
سبد کلی	۰/۵۲۲۵	۰/۶۶۳۹۱۴	۰/۷۸۷
سبد استوار کلی	۱/۲۷۴۴	۰/۵۴۷۵۴	۲/۳۲۷۵

مقایسه نتایج حاصل‌شده در جدول (۳) نشان می‌دهد که سبد استوار توزیعی نه‌تنها دارای میانگین بازده تجمعی بالاتری نسبت به دو سبد دیگر می‌باشد، بلکه بازده تجمعی تعدیل‌شده یا ریسک آن نیز به‌صورت چشمگیری از دو سبد دیگر بالاتر می‌باشد. این مطلب نشان می‌دهد که در بورس اوراق بهادار تهران در نظر گرفتن توزیع‌های حول توزیع تجربی بسیار حائز اهمیت می‌باشد و درواقع توزیع بازده در طول زمان ثابت نیست.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

هدف از پژوهش حاضر ارائه یک صورت از مدل‌سازی استوار توزیعی از سبد بهینه کلی و بررسی عملکرد سودآوری آن در بورس اوراق بهادار تهران بود. پارامتر نا اطمینانی که عمل استوار سازی روی آن صورت گرفت، توزیع بازده سبد سهام می‌باشد. برای این منظور به‌جای در نظر گرفتن تنها یک توزیع و آن‌هم توزیع تجربی، یک خانواده از توزیع‌ها در همسایگی توزیع تجربی مورداستفاده قرار گرفت و برای کنترل شعاع همسایگی از معیار حداکثر اختلاف میانگین استفاده گردید. حداکثر اختلاف میانگین یک رویکرد داده محور برای سنجش فاصله دو اندازه یا توزیع احتمال می‌باشد. در جهت

بررسی عملکرد مدل پیشنهادی، ۲۵۲ سبد ۵ عضوی با افق زمانی هفتگی از بین ۱۰ دارایی به‌عنوان نمونه آماری انتخاب گردید. سبدهای نمونه‌ای بر روی داده‌های تاریخی به کمک شبیه‌سازی و الگوریتم تجمعی ذرات مورد بهینه‌سازی قرار گرفت. ازآنجاکه فلسفه اصلی سبد کلی، کسب بازده تجمعی بالاتر در درازمدت می‌باشد، برای هر سبد بازده تجمعی بر روی داده‌های تست به‌عنوان معیار اصلی عملکرد سودآوری سبدهای نمونه‌ای پژوهش انتخاب گردید. نتایج حاصل از بررسی عملکرد نشان می‌دهد که سبد استوار توزیعی پژوهش در معیار نسبت شارپ از دو سبد هم‌وزن و سبد کلی فاقد ویژگی استوار توزیعی بهتر عمل می‌کند. به صورتی که نسبت شارپ بازده تجمعی سبد پیشنهادی بیش از ۱/۵ برابر سبد کلی معمولی و ۳ برابر سبد هم‌وزن می‌باشد. این مطلب نشان می‌دهد که استوار سازی توزیعی دارای اثر قابل‌توجهی در بهبود بازده تجمعی تعدیل‌شده با ریسک دارد. نتیجه حاصل از پژوهش با پژوهش‌های کارتا و کانونسانو (۲۰۲۰)، لی و همکاران (۲۰۲۳) و فن و لجون (۲۰۲۴) مطابقت دارد. در پژوهش کارتا و کانونسانو با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو با سناریوهای مختلف، ثابت می‌شود که معیار کلی در بسیاری از جنبه‌ها و علی‌الخصوص نسبت شارپ بر هر رویکرد دیگری برتری دارد. همچنین لی نشان داد که سبد کلی-وازرتین می‌تواند در آزمایش‌های خارج از نمونه در چندین معیار عملکرد بهتر از سبدهای کلی عمل کند و ثبات بیشتری از خود نشان دهد و پژوهش حاضر نیز این یافته را مورد تائید قرار می‌دهد. همچنین فن و لجون (۲۰۲۴) نیز نشان دادند که عملکرد سودآوری مدل استوار توزیعی در معیار نسبت شارپ از مدل وزن برابر بهتر می‌باشد که با نتایج پژوهش حاضر مطابقت دارد. نسبت شارپ برای سرمایه‌گذاران ریسک گریزی که تمایل به ریسک به‌اندازه دارند، دارای اهمیت فراوانی می‌باشد. ازاین‌رو به سرمایه‌گذاران ریسک گریز پیشنهاد می‌شود که برای کسب بازده بالا در بلندمدت از سبد کلی با رویکرد استوار توزیعی بهره ببرند و برای این منظور نیاز است تا سبد موردنظر سرمایه‌گذار بر روی داده‌های آموزشی مورد بهینه‌سازی قرار گیرد و پس از عملکرد مناسب سودآوری بر روی داده‌های تست (آزمون) در جهت سرمایه‌گذاری عملی مورداستفاده قرار گیرد.

منابع

۱) بیرانوند، منا؛ داودی، سید محمدرضا و شریفی قزوینی، محمدرضا. (۱۴۰۳). بهینه‌سازی سبد سهام استوار توزیعی بر اساس نسبت کالمار .نشریه مهندسی سیستم و بهره‌وری. ۹۴-۱۰۹.

۲) شیرکوند، سعید؛ فدائی، حمیدرضا. (۱۴۰۱). بهینه‌سازی سبد سهام استوار با به‌کارگیری مدل‌های چند متغیره و امگا- ارزش در معرض ریسک شرطی بر پایه ملاک حداقل حداکثر پشیمانی .تحقیقات مالی ، ۱(۱)24،۱-۱۷.

3) Bermin, H. P., & Holm, M. (2022). Kelly trading and market equilibrium (No. 2019/2). Lund University, Knut Wicksell Centre for Financial Studies.

4) Carta, A., & Conversano, C. (2020). Practical Implementation of the Kelly Criterion: Optimal Growth Rate, Number of Trades, and Rebalancing Frequency for Equity Portfolios. Frontiers in Applied Mathematics and Statistics, 6, 577050.

5) Fan, W. L., & Anel, M. E. (2024). Robust Portfolio Choice under the Modified Constant Elasticity of Variance. Mathematics, 12(3), 440.

6) Fan, Z & Lejeune, M. A. (2024). Distributionally robust portfolio optimization under marginal and copula ambiguity. Journal of Optimization Theory and Applications, 1-38.

7) Gretton, A., Borgwardt, K. M., Rasch, M. J., Schölkopf, B., & Smola, A. (2012). A kernel two-sample test. The Journal of Machine Learning Research, 13(1), 723-773.

8) Hosseini-Nodeh, Z., Khanjani-Shiraz, R., & Pardalos, P. M. (2022). Distributionally Robust Portfolio Optimization with Second-Order Stochastic Dominance Based on Wasserstein Metric. Information Sciences.

9) Hsieh, C. H. (2020). Necessary and sufficient conditions for frequency-based Kelly optimal portfolio. IEEE Control Systems Letters, 5(1), 349-354.

10) Ji, R., Lejeune, M. A., & Fan, Z. (2022). Distributionally robust portfolio optimization with linearized STARR performance measure. Quantitative Finance, 1-15.

11) Li, J. Y. M. (2023). Wasserstein-Kelly Portfolios: A Robust Data-Driven Solution to Optimize Portfolio Growth. arXiv preprint arXiv:2302.13979.

12) Shihan Di, Dong Ma, Peibiao Zhao. (202. 3) α -robust portfolio optimization problem under the distribution uncertainty. Journal of Industrial and management Optimization, 19(4): 2528-2548.

13) Uehara, Y., Nishimura, N., Li, Y., Yang, J., Jobson, D., Ohashi, K., ... & Takano, Y. (2024). Robust portfolio optimization model for electronic coupon allocation. arXiv preprint arXiv:2405.12865.

14) Zhang, X. (2022). Distributional Robust Portfolio Construction based on Investor Aversion. arXiv preprint arXiv:2203.13999

15) Zhou, Y., & Xu, L. (2024). A new distributionally robust reward-risk model for portfolio optimization. Open Mathematics, 22(1), 20240010.

یادداشت‌ها

1 Kelly
2 Carta & Conversano
3 Hsieh
4 MMD: maximum mean discrepancy
5 Fan and Anel
6 Carta & Conversano
7 Overfitting
8 Bermin and Holm
9 Ambiguity sets
10 Li
11 Fan & Lejeune
12 Uehara et al.
13 Shihan et al.
14 Zhou and Xu
15 Wasserstein
16 Li
17 Bermin and Holm
18 Hsieh
19 Carta & Conversano
20 Ji et al
21 Zhang
22 Bermin and Holm
23 strong law of large numbers
24 White noise
25 Gretton
26 Kernel trick
27 Gretton

Distributionally robust Kelly portfolio optimization based on MMD criterion

Asghar Zafari[1], Yaghoub Pourkrim[2], Seyedali Paytakhti oskoii[3], Mehdi Zeynali[4] and Ahmad Mohammady[5]

Receipt: 30/10/2024 Acceptance: 13/03/2025

Abestract

Given the high risk of investing in a single asset, portfolio theory provides a framework for managing risk and return through investment in multiple assets. The goal of a portfolio model is to optimally allocate the investor's budget among several assets to meet investment objectives, which are usually measured by return and risk. The general philosophy of the Kelly portfolio is to maximize cumulative return in the long term. Optimization of this model is usually done using the empirical distribution of historical data, but overfitting to historical data can lead to poor performance on test data. To address this issue, the present study introduces a distributionally robust portfolio with a max-min criterion. The uncertainty parameter on which the robustification is performed is the return distribution of the portfolio. To this end, instead of considering only one distribution, which is the empirical distribution, a family of distributions in the neighborhood of the empirical distribution is used, and the neighborhood radius is controlled using the maximum mean discrepancy criterion. The maximum mean discrepancy is a data-driven approach for measuring the distance between two measures or probability distributions. An analysis of 252 five-asset portfolios selected from 10 assets using the particle swarm optimization algorithm showed that the distributionally robust portfolio not only has a higher mean cumulative return compared to the two conventional Kelly and equally-weighted portfolios but also its risk-adjusted cumulative return is significantly higher than those of the two portfolios. This suggests that considering distributions around the empirical distribution is highly important in the Tehran Stock Exchange, and that the return distribution is not constant over time

Key words

Distributionally Robust, Kelly portfolio, maximum mean discrepancy(MMD)

1-Department of Financial engineering, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran. zafariasghar3852@gmail.com

2-Department of Accounting, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran. (Corresponding Author) pourkarim@iaut.ac.ir

3-Department of Economy, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran. oskooe@iaut.ac.ir

4-Department of Accounting, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran. Zeynali@iaut.ac.ir

5-Department of Accounting, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran. ahmad.mohammady@iaut.ac.ir