فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره سی و هشتم/ بهار ۱۳۹۸

مدلی بهینه سازی مبتنی بر شبیه سازی به منظور قیمت گذاری اوراق اختیار بسته‌ای

احسان حاجی زاده[۱]
مسعود ماهوتچی[۲]

تاریخ دریافت مقاله :۹۷/۰۴/۰۲ تاریخ پذیرش مقاله :۹۷/۰۷/۰۹

چکیده

امروزه در بازارهای معتبر مالی دنیا، ابزارهای مدیریت ریسک به خصوص مشتقات مالی شامل قراردادهای آتی و اختیار معامله از اهمیت بسیار زیادی برخوردارند. در بازار بورس ایران نیز این اوراق به تدریج در حال معرفی و توسعه هستند و آگاهی و بهره مندی از این اوراق در بازار سرمایه منجر به آرامش خاطر برای سرمایه گذاران و در نهایت توسعه بازار خواهد شد. بسیاری از فعالان بازار سرمایه اعتقاد دارند علیرغم اهمیت این اوراق در بازار به منظور کاهش و مدیریت ریسک سرمایه گذاری‌ها، قیمت گذاری نادرست این اوراق می تواند منجر به ضرر و زیان های هنگفت برای سرمایه گذاران شود. در این مقاله بحث قیمت گذاری اوراق اختیار آمریکایی از نوع بسته ای به دلیل اهمیت آنها در مدیریت و پوشش ریسک سبدهای سرمایه گذاری مورد بررسی قرار می گیرد. با توجه به اینکه، در ادبیات موضوع، تا به حال برای قیمت گذاری اوراق اختیار آمریکایی حتی با یک دارایی پایه جوابی با فرم بسته ارائه نشده است، عموماً از روش های تقریبی و شبیه سازی برای قیمت گذاری این اوراق استفاده می شود. در روش مورد بررسی از روش برنامه ریزی پویای تقریبی به منظور قیمت گذاری اوراق اختیار بسته ای از نوع آمریکایی استفاده می شود. مدل های ارائه شده بر روی داده های واقعی جمع آوری شده از بازار سرمایه و همچنین داده های شبیه سازی شده پیاده سازی شده و نتایج بدست آمده توسعه و بهبود محسوسی را در این حوزه با توجه به معیارهای عملکردی نشان می دهد.

کلمات کلیدی

قیمت گذاری، برنامه ریزی پویای تقریبی، اوراق اختیار بسته ای، شبیه سازی.

۱ دکترای مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران. (نویسنده مسئول) ehsanhajizadeh@aut.ac.ir
۲ دانشیار دانشکده مهندسی صنایع و سیستم های مدیریت، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.
mmhaootchi@aut.ac.ir

مقدمه

اختیار معامله، فراگیرترین ابزار معامله‌ای است که تاکنون در بازارهای مالی مورد استفاده قرارگرفته است. از آنجائی که اوراق اختیار، هزینه پایین‌تری در مقایسه با خود سهم دارد، به‌عنوان یک ابزار قدرتمند در معاملات به کار گرفته می‌شود و تا حد بسیار بالایی ریسک را کاهش داده و درنتیجه درآمد را افزایش می‌دهد. قراردادهای اختیار بسته‌ای، یکی از انواع قراردادهای اختیار است که کاربردهای بسیاری در مسائل عملی و واقعی بازار سرمایه دارد. این نوع از قراردادها همچنین دارای کاربردهای بسیاری در مؤسسات اعتباری، بیمه و حتی در حوزه‌های انرژی به‌منظور پوشش ریسک پورتفویی از محصولات و دارایی‌ها به کار می‌رود. یکی از مزیت‌هایی که برای خرید این اوراق وجود دارد این است که دارنده این اوراق برای پوشش ریسک یک پورتفوی هزینه کمتری را نسبت به جمع تک‌تک اوراق اختیار محصولات موجود در پورتفوی می‌پردازد. مزیت دیگری که برای خرید این اوراق وجود دارد این است که زمانی که موسسه یا شخص حقیقی اوراق تک‌محصولی را برای پوشش ریسک پورتفوی خود خریداری می‌کند، به دلیل اینکه ممکن است زمان‌های اعمال هریک از اوراق، زمان‌های متفاوتی باشد پوشش ریسک سبد به‌درستی صورت نگیرد.

انواع مختلفی از این اوراق در بازار سرمایه وجود دارد که می‌توان به قراردادهای اختیار بسته‌ای آمریکایی، اروپایی و آسیایی اشاره نمود. به دلیل اینکه قراردادهای اختیار آمریکایی دارای ویژگی اعمال پیش از سررسید را دارند، بنابراین انعطاف بیشتری به شخص سرمایه‌گذار به‌منظور پوشش ریسک می‌دهند، درنتیجه این اوراق می‌توانند کاربرد بیشتری در بازار سرمایه داشته باشند، هرچند با توجه به ایجاد این ویژگی هزینه این اوراق نسبت به سایر انواع اوراق (اروپایی و آسیایی) در بازار بیشتر است. نکته دیگری که برای اوراق اختیار آمریکایی جوابی با فرم بسته[۱] ارائه نشده است، زمانی هم که ابعاد مسئله بالا می‌رود (به این معنا که تعداد دارایی‌های پایه در قرارداد اختیار افزایش می‌یابد)، این مسئله با مشکل ابعاد[۲] مواجه می‌شود که با روش‌های مرسوم مانند درخت دوجمله‌ای قیمت‌گذاری آن امکان‌پذیر نیست.

یکی از روش‌هایی که می‌توان برای مواجهه با این مسئله و حل مشکل ابعاد به کار برد، روش برنامه‌ریزی پویای تقریبی است که کارایی این روش در بسیاری از مشکلات ازاین‌دست و مسائل کنترلی اثبات‌شده است(۱،۲،۳).

به طور مشخص می توان گفت در این مقاله با توجه به اهمیت قیمت گذاری اوراق اختیار بسته‌ای و کاربردهای فراوان در بازار سرمایه و شرکت های سرمایه گذاری، بحث ارتقا و بهبود روش های فعلی قیمت گذاری اختیار معامله بسته ای از نوع آمریکایی با استفاده از برنامه ریزی پویای تقریبی مدنظر است.

برای رسیدن به این هدف تحقیق نیازمند استفاده از شبیه سازی هستیم. به عبارت دقیق‌تر، عمده روش‌های معرفی شده برای تحقق این اهداف، مبتنی بر روش های شبیه سازی است که باید از روش‌های مناسب سناریوسازی قیمت دارایی های مالی بهره جست. در واقع با روش شبیه سازی استفاده شده می توان همبستگی های سری و مابین سهام موجود در سبد را مدل‌سازی نمود. لازم به توضیح است که مدل ارائه شده در این تحقیق قابلیت استفاده در سایر انواع قراردادهای اختیار به خصوص قراردادهایی با یک دارایی پایه[۳] را نیز خواهند داشت.

پیشینه پژوهش

تا به حال روش‌های زیادی در حوزه قیمت‌گذاری اختیار معامله آمریکایی زمانی که تعداد دارایی‌های پایه افزایش می‌یابد، ارائه‌شده است. یکی از رویکردهایی که برای این منظور ارائه‌شده است، رویکرد lattice-based است که روش‌های درخت دوجمله‌ای، درخت سه‌جمله‌ای و روش تفاضل محدود را می‌توان در این حوزه جای داد. البته خود این روش‌ها به‌تنهایی برای قراردادهای آمریکایی با یک دارایی کاربرد فراوان دارد ولی توسعه مدل‌هایی که بر اساس آن‌ها صورت گرفته قابلیت قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله با ابعاد بالاتر را فراهم نموده است. به‌عنوان‌مثال کاکس[۴] و همکاران (۱۹۷۹)(۴) مدل درخت جمله‌ای را برای قراردادهایی با چهار دارایی پایه و رابینستین[۵] (۱۹۹۴)(۵) این مدل را برای قراردادهایی با دو دارایی پایه توسعه دادند.

با توسعه روش تفاضل محدود نیز می‌توان از این روش برای قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار با ابعاد بالا بهره جست(۶).

لانگ استاف و شوارتز[۶] (۲۰۰۱) روش رگرسیون حداقل مربعات چندجمله‌ای[۷] را برای تخمین مقادیر آتی عایدی و در نهایت قیمت گذاری و مشخص نمودن زمان بهینه اعمال در قراردادهای اختیار با یک دارایی پایه را توسعه دادند. همچنین آنها روش هایی را برای استفاده از روش پیشنهادی برای قراردادهای اختیار با ابعاد بالا پیشنهاد دادند(۷).

دیلسترا[۸] و همکاران (۲۰۰۴) به منظور قیمت گذاری اوراق اختیار بسته ای رابطه ای را بر مبنای فرضیات و معادلات بلک شولز توسعه دادند که از دو جزء تشکیل شده است. جزء اول از قیمت‌های تک تک سهام و جزء دوم بر اساس تابع توزیع مشترک مقادیر بازده سهام موجود در سبد بدست می‌آید. در واقع آنها برای جزء دوم رابطه خود یک حد بالا و پایین تعریف کردند. ایراد این روش زمانی است که تعداد سهام موجود در سبد افزایش می یابد(۸).

لنتوار و اوسترلی (۲۰۰۸) از روش حل دستگاه معادلات دیفرانسیلی جزئی برای قیمت گذاری اوراق اختیار معامله اروپایی بسته ای استفاده کردند. آنها از روش sparse grid برای حل معادلات خود استفاده کردند و مدل ارائه شده روی قراردادهای با ۵ سهم به عنوان دارایی پایه آزمایش شد. ضعف این روش زمانی است که تعداد دارایی های پایه افزایش یابد (۹).

یو[۹] و ژنگ[۱۰] (۲۰۱۰) مسئله ارزشگذاری اوراق اختیار بسته ای را با استفاده از مدل Jump-diffusion مدلسازی کردند. با توجه به اینکه قیمت های دارایی های موجود در سبد ار می‌توان با استفاده از مدل های نوسانات تصادفی چند متغیره مدلسازی نمود، مدل آنها از طریق حل معادلات دیفرانسیلی انتگرالی جزئی (PIDE[۱۱]) و با استفاده از تقریب واریانس تصادفی شرطی مقادیر ارزش سبد قیمت گذاری، قیمت نهایی اختیار بسته ای اروپایی محاسبه می شود(۱۰).

پنا[۱۲] و همکاران (۲۰۱۲) مسئله یافتن حد بالای آبیتراژی برای قیمت اختیار اروپایی بسته ای را با استفاده از قیمت های bid-ask قراردادهای اختیار خرید تک تک سهام موجود در سبد، مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند مسئله نیمه متناهی موجود قابلیت تبدیل به یک برنامه ریزی خطی را دارد. کار پنا و همکاران (۲۰۱۲) مشابه کار دائوم و ورنر (۲۰۱۱) بود با این تفاوت که در این مطالعه آنها به دنبال یک حد بالا برای مدل خود هستند. در واقع با در نظر گرفتن این حد بالا، آنها می توانند گستره قیمت های bid-ask را در قیمت گذاری اختیار معامله در نظر بگیرند. منظور از گستره bis-ask در واقع همان بالاترین قیمتی که خریدار می خواهد دارایی بخرد و کمترین قیمتی که فروشنده حاضر است سهم را بخرد (۱۱).

دینگس و هورمن[۱۳](۲۰۱۳)، یک روش شبیه‌سازی ساده و کارا برای قراردادهای بسته‌ای اروپایی و قراردادهای اختیار آسیایی با فرض حرکت برونین هندسی[۱۴] ارائه کردند. مدل پیشنهادی آنها بر اساس روش کنترل متغیر جدیدی است که از رابطه به فرم بسته عایدی استفاده می کند که با شرط اینکه میانگین هندسی کل قیمت ها بیشتر از قیمت اعمال قرارداد است. ترکیب روش کنترل متغیر

جدید ارائه شده با مدل مونت‌کارلو شرطی و روش کنترل متغیرهای مربعی، منجر به توسعه الگوریتم جدید آن‌ها شد(۱۲).

لایو[15] و لو[16] (۲۰۱۴) مسئله قیمت گذاری اوراق اختیار با چند دارایی پایه از نوع اروپایی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها با توسعه فرمول تقریبی ارائه شده توسط کریک(۱۹۹۵) که برای اوراق با دو دارایی پایه ارائه شده بود، فرمولی با فرم بسته برای اوراق با چند دارایی پایه کردند. آنها برای صحه‌گذاری نتایج خود از روش های مبتنی بر انتگرال و شبیه سازی مونت کارلو استفاده کردند(۱۳).

کالدانا[17] و همکاران (۲۰۱۶) حدود بالا و پایینی را برای قیمت قراردادهای اختیار بسته‌ای از نوع اروپایی ارائه دادند. روش پیشنهادی آنها زمانی قابل استفاده می‌باشد که تابع توزیع مشترک مقادیر بازده دارایی ها شناخته شده باشد. به عبارت دیگر تابع توزیع چند متغیره مقادیر بازده از پیش تعیین شده باشد. آنها نتایج محاسباتی خود را با روش مونت کارلو مقایسه و نتایج را مورد بررسی قراردادند (۱۴).

وو و الیوت[18] (۲۰۱۷) رویکرد جدیدی را برای بدست آوردن قیمت و پارامترهای پوشش ریسک اوراق اختیار بسته ای که دارای لبخند نوسانات[19] هستند ارائه کردند. در واقع مدل پیشنهادی آنها بر پایه مدل‌های بلک شولز و نوسانات تصادفی بوده تا معادله‌ای تقریبی تحلیلی برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار اروپایی بسته ای که دارای لبخند نوسانات هستند ارائه نمودند. نتایج این تحقیق با روش مونت کارلو مقایسه شده و از حیث زمان رسیدن به جواب و دقت آن دارای برتری ضمنی هستند (۱۵).

با توجه به بررسی مرور ادبیات صورت گرفته می توان دریافت، عمده پژوهش های صورت گرفته در حوزه قراردادهای اختیار اروپایی بوده است و به قیمت گذاری قراردادهای اختیار آمریکایی پرداخته نشده است. همچنین بحث نوسانات قیمت سهام در قیمت گذاری اوراق اختیار کمتر مورد توجه قرار گرفته است که در این مقاله این موضوع دیده شده است.

بنابراین با توجه به تجزیه و تحلیل صورت گرفته و ضرورت ایجاد شده برای انجام این مقاله مشخصاً می توان نوآوری های این تحقیق را به صورت زیر خلاصه نمود:

۱- استفاده از روش برنامه ریزی پویای تقریبی به منظور قیمت گذاری اوراق اختیار بسته‌ای

۲- توسعه و بهبود روش های مناسب سناریوسازی برای دارایی های موجود در سبد به عنوان دارایی پایه اختیار

۳- معرفی قرارداد اختیار بسته ای

یک قرارداد اختیار بسته ای را می توان به صورت زیر مدلسازی نمود:

فرض کنید:

s_t^i قیمت سهم i ($i=1,...,m$) در زمان t ($t=1,...,T$)

$s_t = \sum_{i=1}^{m} w_i s_t^i$ برابراست با میانگین قیمت سهام موجود در سبد در زمان t.

X : قیمت اعمال قرارداد اختیار.

w_i : وزن دارایی i در سبد.

در نتیجه تابع عایدی قرارداد اختیار فروش و خرید بسته ای را می توان به صورت روابط (۱) و (۲) نوشت:

رابطه ۱) $\max(X - s_t, 0).$ برای اختیار فروش

رابطه ۲) $\max(s_t - X, 0).$ برای اختیار خرید

حال در ادامه مسئله قیمت گذاری قیمت اختیار آمریکایی با استفاده از برنامه ریزی پویای تقریبی مورد بررسی قرار می گیرد.

۴- مدل‌سازی قیمت گذاری اختیار معامله بسته ای با استفاده از برنامه ریزی پویای تقریبی

همانطور که در بخش های قبل اشاره شد، از برنامه ریزی پویای تصادفی (SDP) می توان برای مدل‌سازی و حل مسائلی که از فرآیند مارکوف پیروی کرده و تصمیم‌گیری‌ها باید در فضای عدم قطعیت صورت پذیرد، استفاده نمود. قبل از ورود به مدلسازی ریاضی ابتدا باید متغیرهای زیر تعریف شود:

S: نشان دهنده حالت است.

K: نشان دهنده مرحله است.

A: شامل متغیرهای تصمیم است.

g: عبارتست از تابع عملکرد

وضعیت فرآیندهای مارکوف با متغیرهای حالت مشخص می شوند که در طول زمان تغییر می‌کنند. در مسئله مورد بررسی در این مقاله، متغییر حالت قیمت سبد است.

$s \in S$: شامل مجموعه ایی محدود از متغییرهای حالت است.

A_s: مجموعه تصمیمات امکان پذیر برای هر حالت.

$g_a(s)$: تابع هزینه به ازای هر تصمیم و هر متغیر حالت ($a \in A_s$، $s \in S$)

در نتیجه در این مسئله می‌توان گفت بعد از همگرا شدن توابع action-value می‌توان سیاست بهینه را استخراج نمود.

در مسئله مورد بررسی در این مقاله، می توان هر روز را به عنوان متغیر stage تعریف نمود. در نتیجه کل متغیرهای stage برابر خواهد بود با طول عمر قرارداد اختیار. لازم به ذکر است می‌توان زمان را به بازه‌های زمانی کمتر و یا بیشتر از یک روز نیز تغییر داد. متغیر حالت در هر stage را می‌توان به عنوان قیمت فعلی سبد تعریف نمود.

سایر پارامترها برای یافتن تابع هزینه به شرح زیر است:

r: نرخ بهره بدون ریسک می باشد.

$I_t(s_t)$: عبارتست از تابع عایدی اختیار در زمان t، که می توان به صورت زیر تعریف نمود:

رابطه ۳) $I_t(s_t) = \max(X - s_t, 0).$ برای قرارداد اختیار فروش

رابطه ۴) $I_t(s_t) = \max(s_t - X, 0).$ برای قرارداد اختیار خرید.

در قیمت گذاری قرارداد اختیار معامله آمریکایی، تابع عایدی اختیار به همراه استراتژی اعمال بهینه همزمان در نظر گرفته شود. همزمانی در نظر گرفتن این دو مقوله را می توان با استفاده از محاسبه توابع ارزش در هر حالت در نظر گرفت. توابع ارزش را نیز می توان از طریق دو رابطه محاسبه نمود که شامل عایدی نقدی ($I_t(s_t)$) و مقدار فعلی مقادیر آتی تابع ارزشی که می توان به صورت رابطه (۵) نوشت:

رابطه ۵)
$$E_t\left[e^{-r.\Delta t} V_{t+1}(S_{t+1}) \middle| S_t\right]$$

بنابراین تابع ارزش استفاده شده در قیمت گذاری قراردادهای اختیار آمریکایی را می توان به صورت رابطه (۶) نوشت:

رابطه ۶)
$$V_t(s_t) = \max(I_t(s_t), E_t\,[e^{-r.\Delta t} V_{t+1}(s_{t+1}) | s_t]).$$

همانطور که واضح است تابع ارزش از طریق معادلات بازگشتی به دست می‌آید. نکته مهمی که در مسئله قیمت گذاری اختیار معامله وجود دارد این است که تابع ارزش در این مسئله جمع شونده (additive) نیست. بنابراین، زمانی که نقطه ایی مشاهده شد که ارزش عایدی سریع بیشتر از ارزش فعلی جریان آتی باشد، آنگاه بهترین تصمیم آن است که قرارداد اختیار اعمال گردد. چالش دیگری که در این قسمت وجود دارد نحوه محاسبه درست و دقیق امید ریاضی مقادیر عایدی آتی است که در تعیین استراتژی بهینه در خصوص اعمال یا عدم اعمال قرارداد اختیار نقش اساسی دارد. همچنین تنها پارامتر کنترلی در این مسئله اعمال یا عدم اعمال قرارداد اختیار می‌باشد. هر چند برنامه‌ریزی پویا، روش حل مناسبی برای قیمت گذاری اوراق اختیار آمریکایی است ولی زمانی که تعداد دارایی‌های پایه افزایش می یابد، به دلیل حجم محاسبات بالا و مشکل ابعاد این روش جوابگو نیست.

برای حل این مشکل، رویکرد های زیادی به همراه روش های تقریبی ارائه شده است که از مدل‌های مبتنی بر رگرسیون و شبیه‌سازی استفاده می نمایند تا توابع ارزش را برای حالت‌های مربوطه تخمین بزنند(۱۶).

روش‌های مبتنی بر شبیه سازی به صورت زیادی در مسائل با ابعاد بالا به خصوص در انواع مسائل مهندسی مالی مورد استفاده قرار گرفته است [۷ ، ۱۷، ۱۸).

یکی از روش هایی که در این حوزه مورد استفاده قرار می گیرد، بهره گیری از توابع پایه مناسب برای تخمین توابع ارزش در یک فرآیند بازگشتی است. در شکل اولیه، این توابع پایه به صورت خطی با یکدیگر در ارتباط بوده و توابع ارزش را در مراحل مختلف تخمین میزنند(۱۹). در نتیجه ضرایب این توابع پایه باید به صورت مناسبی و از طریق فرآیند یادگیری تخمین زده شود. به عبارت دیگر، همانطور که رابطه شماره (۷) نشان می‌دهد، مقادیر تنزیل شده مورد انتظار عایدی‌های آتی($E()$) را می‌توان از طریق تابع رگرسیون خطی با توابع پایه مناسب ($\phi_i(S)$) به دست آورد که در همه آنها (κ_i) ضریب آنها خواهد بود و می بایستی به درستی تخمین زده شود.

رابطه ۷
$$E\left[e^{-r.\Delta t}V_{t+1}(S_{t+1})\middle|S_t\right]\approx\sum_{i=1}^{O}\kappa_i\varphi_i(S),$$

که مقدار O عبارتست از تعداد توابع پایه.

همچنین لازم به ذکر است که هر یک از توابع پایه ممکن است توابعی غیرخطی باشند ولی ارتباط آنها با یکدیگر در مدل اولیه به صورت خطی می باشند.

برای محاسبه قیمت اختیار معامله از طریق ADP، می بایستی تعداد سناریوهای زیادی ($n = 1,..., N$) تولید شود. روش تولید سناریو به تفصیل در بخش های قبلی توضیح داده شده است. در گام بعدی برای هر سناریو n، زمان اعمال قرارداد اختیار می بایستی از طریق رابطه (۱۱) مشخص گردد.

در نتیجه با داشتن زمان اعمال قرارداد، PV_{Exp}^{n} را میتوان از طریق رابطه (۸) محاسبه نمود:

رابطه ۸)
$$PV_{Exp}^{n} = e^{-r.t}(X - s_t^n)$$

در نتیجه با داشتن تمام قیمت های حاصله به ازای هر سناریو بدست آمده از معادله (۹) می توان قیمت نهایی قرارداد اختیار با استفاده از مدل برنامه ریزی تقریبی را به صورت زیر نوشت:

رابطه ۹)
$$P_{ADP} = \underset{n}{E}(PV_{Exp}^{n})$$

شبیه سازی مقادیر قیمت دارایی ها

با توجه به عدم دسترسی به داده‌های دوره‌های آتی در خصوص قیمت سهام در دنیای واقعی، سناریو سازی داده‌های مالی یکی از موضوعات مهم و ضروری درحل مسائل پیچیده تعریف شده در این حوزه به حساب می‌آید. در مسئله قیمت گذاری اوراق اختیار معامله به خصوص از نوع آمریکایی با توجه به اینکه تصمیمات مربوط به اعمال یا عدم اعمال قرارداد در دوره‌های آتی صورت می گیرد، به منظور قیمت‌گذاری صحیح این اوراق باید سناریوسازی قیمت های سهام مربوطه با توجه به بازه زمانی اوراق اختیار صورت پذیرد. همچنین از آنجائیکه قرارداد اختیار معامله از نوع بسته‌ای است و به عبارت بهتر دارایی پایه سبدی از مجموعه سهام می باشد، بنابراین باید از روشی بهره جست که خودهمبستگی بین بازده هر سهم در طول زمان و وابستگی های بین سهام را به درستی در نظر بگیرد. روش استفاده شده در این مقاله از پژوهش های ذیل بهره می گیرد [۹، ۲۰، ۲۱) در این روش ابتدا روی مقادیر باقیمانده هر یک از سری های بازده یک از مدل های GARCH شامل GARCH ساده، EGARCH و یا مدل GJR-GARCH (هر کدام که بهترین برازش را روی داده ها داشته باشد) پیاده سازی می شود. دلایل استفاده از مدل های GARCH این است که هم همبستگی تغییرات هر یک از سهام را در طول زمان در نظر گرفته می شود و هم از آنجائیکه طبق فرضیات موجود، زمانی می توان از مدل EVT استفاده نمود که مشاهدات دارای متغیرهای تصادفی، مستقل با توزیع یکسان(i.i.d۲۰) باشند. در نتیجه این مهم با استفاده از پیاده سازی‌های مدل‌های GARCH حاصل می شود که به جای پیاده سازی روی مقادیر بازده با مقادیر فیلتر شده پیاده‌سازی می‌شوند.

همانطور که اشاره شد، پارامترهای مدل انتخابی با استفاده از روش حداکثر درست نمایی تخمین زده می‌شود. پس از تخمین پارامترهای مدل و به دست آوردن ε_t و σ_t برای هر سهم، می توان بردار z_t را از رابطه (۱۰) محاسبه نمود:

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \quad is \quad i.i.d$$ رابطه ۱۰)

که این بردار در واقع مقادیر خطای استاندارد فیلتر شده هستند و با توجه به اینکه این مقادیر، متغیرهای تصادفی، مستقل با توزیع یکسان (i.i.d) هستند بنابراین می توان توابع توزیع تجمعی حاشیه ای[۲۱] هر یک از سهام را با روش نیمه پارامتریک تخمین زد. برای تخمین مقادیر دم توزیع از روش تئوری حد مرکزی (EVT) و برای تخمین قسمت میانی از روش گوسین کرنل[۲۲] استفاده می‌شود. این فرآیند می بایستی برای هر یک از سهام انجام شود.

حال با داشتن مقادیر تابع توزیع تجمعی حاشیه ای هر یک از سهام می توان کاپولای مربوطه که در این مقاله از t-copula استفاده می شود را ایجاد کرد. در واقع هدف از ایجاد کاپولا، مدل‌سازی روابط بین سهام و وابستگی میان آنهاست. تعیین پارامترهای کاپولا شامل ρ و v هم از طریق روش حداکثر درست نمایی تخمین زده می شود.

سپس برای هر یک از دارایی ها یک تابع توزیع تجمعی حاشیه ای ساده[۲۳] که از طریق تخمین کرنل گوسین برای مقادیر میانی توزیع و تخمین توزیع پارتو تعمیم یافته[۲۴] برای حدود بالایی و پایینی تابع توزیع انجام می شود. پس از آن، تابع t copula روی داده ها برازش شده و می توان همبستگی بین مقادیر باقیمانده شبیه سازی شده برای هر دارایی را مدل‌سازی نمود.

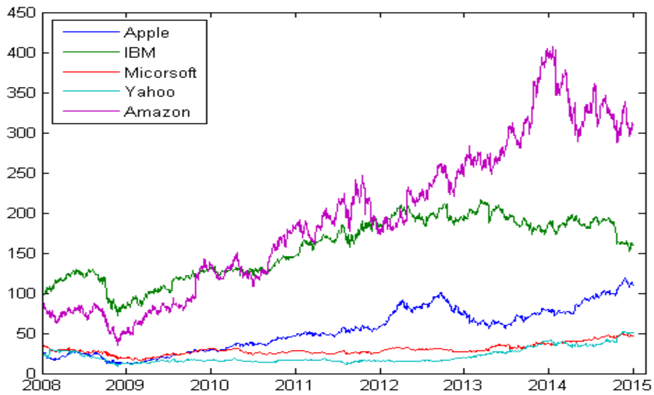
با داشتن تابع t-copula به فرم رابطه (۱۱) و پارامترهای تخمین زده شده، می‌توان اعداد تصادفی را از روی تابع توزیع توأم t-student ایجاد کرد:

$$C(U;\rho,v) = T_{\rho,v}(t_v^{-1}(U_1),\ldots,t_v^{-1}(U_n))$$ رابطه ۱۱)

در نتیجه برداری از اعداد تصادفی به اندازه تعداد سناریوهای دلخواه (N) و T دوره مدنظر خواهیم داشت که سطرها از یکدیگر مستقل بوده ولی بین عناصر هر سطر خطی ρ وجود خواهد داشت. با این روش می توان به تعداد دفعات دلخواه، مسیرهای بیشماری شبیه سازی کرد که این مسیرها از هم مستقل هستند.

یافته‌های پژوهش

در این مقاله، پیاده سازی مدل های ارائه شده روی داده های داده های قیمت مربوط به ۵ سهم، شامل شرکت های Apple، IBM، Microsoft، Yahoo و Amazon از تاریخ ۲ ژانویه ۲۰۰۸ تا تاریخ ۳۱ دسمبر ۲۰۱۴ جمع آوری گردید. این داده های از بخش مالی وبسایت یاهو[25] جمع آوری و استخراج شده است. شکل (۲) تغییرات قیمت سهام انتخابی را در بازه زمانی مورد استفاده نشان می دهد.



شکل ۲. تغییرات قیمت سهام انتخابی در بازه ۲ ژانویه ۲۰۰۸ تا تاریخ ۳۱ دسمبر ۲۰۱۴

همچنین به منظور پیاده سازی مدل های سری زمانی مقادیر سری های قیمت می بایستی به سری مقادیر بازده تبدیل گردد. جدول (۱) مشخصات دقیق آماری داده های استفاده شده را به ازای سهام مختلف نشان می دهد. این جدول بر اساس مقادیر بازده هر کدام از سهام طراحی شده است. همانطور که نتایج سطر آزمون لیونگ – باکس به ازای دو دوره تاخیر زمانی نشان می دهد به ازای تمام سهام خود همبستگی معنادار در سری زمانی توان دوم مقادیر بازده وجود دارد.

جدول ۱. مشخصات آماری داده های مورد استفاده از هر کدام از سهام

	Amazon	*Yahoo*	*Microsoft*	*IBM*	*Apple*
تعداد مشاهدات	۱۷۶۵	۱۷۶۵	۱۷۶۵	۱۷۶۵	۱۷۶۵
میانگین	۰/۰۰۰۶۶۴	۰/۰۰۰۴۲۹	۰/۰۰۰۱۵۷	۰/۰۰۰۲۴۲	۰/۰۰۰۷۸۲
حداکثر	۰/۲۳۷	۰/۳۹۲	۰/۱۷۱	۰/۱۰۹	۰/۱۳۰
حداقل	-۰/۱۳۷	-۰/۲۳۴	-۰/۱۲۵	-۰/۰۸۶	-۰/۱۹۷
انحراف معیار	۰/۰۲۶	۰/۰۲۶	۰/۰۱۹	۰/۰۱۵	۰/۰۲۲
چولگی	۰/۴۷۲	۱/۲۴۷	۰/۱۳۴	-۰/۰۴۸	-۰/۵۵۹
کشیدگی	۸/۳۰۸	۳۴/۱۵۰	۹/۲۴۴	۵/۸۲۰	۷/۷۶۱
$Q^2(2)^{*\,\&\,**}$	۳۹/۵۵۵	۶/۳۷۴	۸۶/۰۰۱	۸۹/۸۶۲	۷۶/۷۰۹

*** در سطح اطمینان ۹۵٪.**

**** تست لیونگ – باکس برای مقادیر توان دوم بازده و در سطح اطمینان ۹۵٪.**

به منظور بررسی مزیت ایجاد قراردادهای بسته ای برای قیمت های اعمال مختلف، قیمت های قرارداد اختیار اروپایی بسته ای با استفاده از مدل های بلک شولز و مونت کارلو محاسبه شده و نتایج آن با میانگین قیمت های اختیار معامله هر یک از سهام که از مدل بلک شولز بدست آمده مقایسه شده است. جدول (۲) نتایج مقایسه‌ایی این قیمت‌ها را نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است اگر سرمایه‌گذاری بخواهد قراردادهای اختیار را روی تک تک سهام خریداری کند می‌بایستی هزینه‌ای به مراتب بیشتر از یک قرارداد اختیار بسته ای پرداخت کند. یکی از دلایلی که برای این موضوع وجود دارد، با توجه به اینکه مطابق با مفاهیم مطرح شده در تئوری پورتفوی نوین۲۶ (MPT) با ساخت یک پورتفوی، ریسک سرمایه گذاری با توجه به معیارهای مختلف اندازه گیری آن از جمله واریانس تغییرات بازده به مقدار زیادی کاهش پیدا می کند. به تعبیر دقیق تر، می توان گفت با ترکیب دارایی‌های مختلف ریسکی با نوسانات یکسان و همبستگی های صفر و یا منفی می توان به یک دارایی (پورتفوی) با نوسانات و ریسک کمتر رسید. در واقع می توان گفت در اینجا نقش نوسانات بازده به عنوان یکی از پارامترهای تأثیرگذار در قیمت گذاری اختیار معامله به خوبی نشان داده شده است که در ادبیات موضوع هم به این نکته اشاره شده است. یکی دیگر از دلایلی که برای این اختلاف وجود دارد دامنه اختلاف زیاد قیمت های فعلی سهام انتخابی است که کمترین قیمت فعلی ۴۶/۴۵ و بیشترین قیمت فعلی ۳۱۵/۳۵ دلار است.

به لحاظ عملی نیز با توجه به اینکه با خرید قراردادهای اختیار تکی روی هر کدام از سهام، انعطاف بیشتری به سرمایه گذاران داده می شود تا پوشش ریسک بهتری روی سهام خود انجام دهند بنابراین

هزینه بیشتری نیز می بایستی برای این انعطاف بیشتر پرداخت گردد. علاوه براین در این مثال، هزینه معاملات خرید و فروش در نظر گرفته نشده است. بنابراین با در نظر گرفتن این فاکتور، مزیت خرید اوراق اختیار بسته ای بیشتر محسوس می شود. همچنین همانطور که مشخص است برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار بسته ای نتایج مدل بلک شولز و مونت کارلو نزدیک به هم است و اختلافی که وجود دارد به دلیل تفاوت در محاسبه نوسانات بازده مربوط به هر کدام از روش هاست. در نتیجه نزدیکی نتایج هر یک از این دو مدل نشان می دهد که هر یک از این دو مدل به درستی پیاده سازی شده اند.

در ادامه پیاده سازی مدل های ارائه شده مورد بررسی قرار می گیرد. همانطور که واضح است، با توجه به اینکه قیمت های قرارداد اختیار اروپایی می توانند به عنوان حدود پایینی قیمت برای قراردادهای اختیار آمریکایی قرار گیرند، بنابراین در اینجا از دو مدل قیمت گذاری اوراق اختیار بسته‌ای اروپایی شامل روش مونت کارلو و مدل Ju و برای قیمت گذاری اوراق اختیار بسته‌ای آمریکایی از روش ADP استفاده می شود.

جدول ۲. مقایسه قیمت های اختیار قراردادهای بسته ای و میانگین قیمت های اختیار

قیمت اعمال	قیمت قرارداد اختیار اروپایی بسته ای با استفاده از مدل BS $\sigma_{basket}=0.0148$	قیمت قرارداد اختیار اروپایی بسته ای با استفاده از مدل MC	میانگین قیمت های اختیار معامله بدست آمده با استفاده از مدل BS	مزیت استفاده از قراردادهای اختیار بسته ای
۱۴۰	۴/۰۴۲	۴/۹۷۹	۴۱/۸۳۵	۳۶/۸۵۶
۱۴۵	۷/۴۲۸	۷/۷۱۵	۴۴/۸۱۱	۳۷/۰۹۶
۱۵۰	۱۱/۶۴۸	۱۱/۱۴۷	۴۷/۷۹۹	۳۶/۶۵۲
۱۵۵	۱۶/۳۲۶	۱۵/۱۴۶	۵۰/۸۵۰	۳۵/۷۰۴
۱۶۰	۲۱/۱۹۹	۱۹/۵۵۰	۵۴/۰۸۴	۳۴/۵۳۴
۱۶۵	۲۶/۱۳۶	۲۴/۲۰۲	۵۷/۶۰۵	۳۳/۴۰۳

BS : مدل بلک - شولز، MC: روش مونت کارلو و سایر پارامترها: T=44, r=0.05

جدول (۳) نتایج مدل های ارائه شده را با تغییرات قیمت اعمال قرارداد نشان می دهد. سایر پارامترهای در نظر گرفته عبارتند از زمان اعمال برابر ۲ ماه (۴۴ روز کاری)، نرخ بهره بدون ریسک برابر ۵٪ (۰/۰۵) و قیمت فعلی سبد (S0) برابر ۱۳۷/۵ دلار در نظر گرفته شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش مقادیر قیمت های اعمال، قیمت قرارداد اختیار فروش افزایش می یابد.

جدول ۳. پیاده سازی مدل های ارائه شده با در نظر گرفتن تغییرات قیمت اعمال

قیمت اعمال	قیمت قرارداد اختیار اروپایی بسته ای با استفاده از مدل MC	مدل Ju	قیمت گذاری اوراق اختیار بسته ای با ADP	مزیت اعمال زودهنگام Early Exercise Feature
۱۴۰	۴/۹۷۹	۳/۷۷۸	۵/۴۹۹	۵۲۰
۱۴۵	۷/۷۱۵	۷/۲۴۴	۹/۲۴	۱/۳۰۹
۱۵۰	۱۱/۱۴۷	۱۱/۵۶۹	۱۳/۷۷۲	۲/۶۲۶
۱۵۵	۱۵/۱۴۶	۱۶/۳۲۱	۱۸/۷۴۱	۳/۵۹۵
۱۶۰	۱۹/۵۵۰	۲۱/۲۲۸	۲۳/۷۳۴	۴/۱۸۴
۱۶۵	۲۴/۲۰۲	۲۶/۱۷۷	۲۸/۷۲۸	۴/۵۲۶

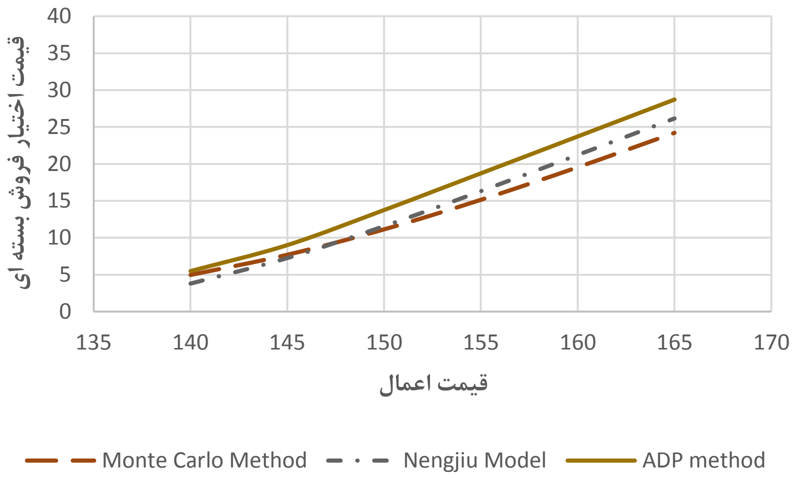
MC=Monte Carlo, ADP=Approximate Dynamic Programming و T=44، r=0.05 و S0=137.5.

شکل (۲) تغییرات قیمت های اختیار فروش را به ازای تغییرات قیمت های اعمال نشان می دهد. نتایجی که می توان از این شکل گرفت به شرح ذیل می باشد:

۱- همانطور که در شکل نیز مشخص است قیمت های اختیار اروپایی به عنوان حدود پایین برای قیمت های اختیار آمریکایی تلقی می شود و این قضیه برای مدل های MC و Ju (قیمت های اختیار بسته ای اروپایی) که حد پایینی برای مدل ADP (قیمت اختیار آمریکایی) هستند رعایت شده است.

۲- با افزایش قیمت های اعمال قرارداد، تمام قیمت های اختیار فروش بدست آمده از تمام مدل ها افزایش می یابد.

۳- قیمت های مدل Ju و مدل MC که برای قیمت گذاری قراردادهای اختیار بسته ای محاسبه شده اند، در فاصله نزدیکی از هم قرار دارند.



شکل ۲. تغییرات قیمت های اختیار فروش به ازای تغییرات قیمت های اعمال

جدول (۴) نتایج مدل های ارائه شده را به ازای تغییرات زمان اعمال قرارداد نشان می دهد. در این حالت قیمت اعمال قرارداد برابر با ۱۵۰، نرخ بهره بدون ریسک برابر با ۵ درصد (۰/۰۵) و قیمت فعلی سبد برابر با ۱۳۷/۵ دلار فرض شده است. در این حالت قیمت های اختیار اروپایی (بدست آمده از روش های MC و Ju's) با افزایش زمان کاهش و قیمت اختیار آمریکایی با افزایش زمان اعمال قرارداد، افزایش می یابد. همچنین مزیت اعمال زود هنگام قرارداد نیز در حالت افزایش می یابد. همچنین در این حالت می توان ادعا کرد با افزایش زمان اعمال قرارداد، قیمت مدل ریسک گریز کاهش و قیمت مدل ریسک پذیر افزایش می یابد.

جدول ۴. پیاده سازی مدل های ارائه شده با در نظر گرفتن تغییرات زمان قرارداد

زمان سررسید قرارداد	قیمت قرارداد اختیار اروپایی بسته ای با استفاده از مدل MC	مدل Ju	قیمت گذاری اوراق اختیار بسته ای با ADP	مزیت اعمال زودهنگام
۱ ماه	۱۲/۲۲	۱۱/۸۸۵	۱۳/۷۶۳	۱/۷۴۱
۲ ماه	۱۱/۱۴۷	۱۱/۵۶۹	۱۳/۷۷۲	۲/۶۲۶
۳ ماه	۱/۶۱۵	۱۱/۳۴۲	۱۳/۷۹۴	۳/۱۸۰
۴ ماه	۱/۲۳۵	۱/۸۴۹	۱۳/۸۶۴	۳/۶۲۹
۵ ماه	۹/۹۳۵	۱/۴۳۷	۱۳/۹۱۳	۳/۹۷۸
۶ ماه	۹/۷۴۷	۱/۸۶	۱۳/۹۸۷	۴/۲۳۹

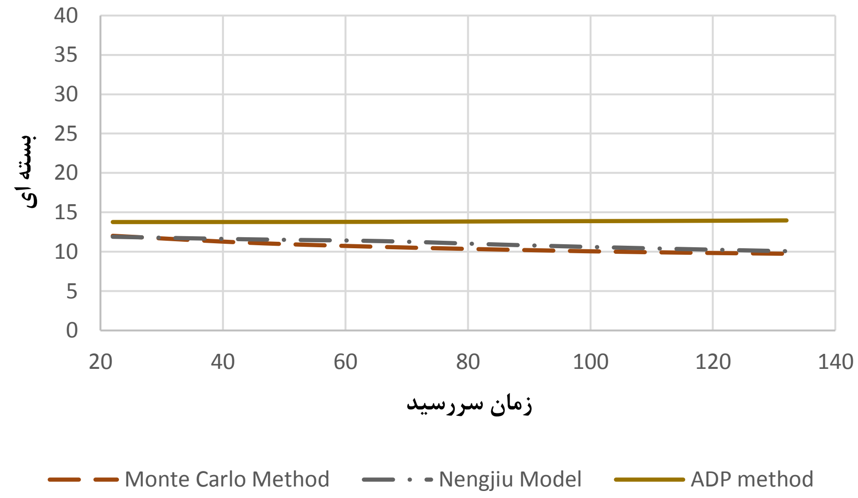
MC=Monte Carlo, ADP=Approximate Dynamic Programming و X=150، r=0.05 و S0=137.5.

شکل (۳) تغییرات قیمت اختیار فروش قراردادهای بسته ای را به ازای تغییرات زمان سررسید قرارداد در حالت های اروپایی، آمریکایی، ریسک پذیری و ریسک گریزی نشان می‌دهد. نتایجی که از این شکل می‌توان گرفت عبارتند از:

۱- با تغییرات زمان سررسید تغییرات قیمت برای دو مدل اروپایی ارائه شده بسیار نزدیک به هم است.

۲- دو مدل قیمت گذاری قراردادهای اختیار اروپایی نیز در این حالت حدود پایینی را برای قیمت قرارداد اختیار آمریکایی بسته ای ارائه می کنند که نشان دهنده صحت جواب های ارائه شده است.

۳- با افزایش زمان سررسید، ارزش قراردادهای اختیار آمریکایی بسته ای افزایش و ارزش قرارداد اختیار اروپایی کاهش پیدا می کنند.



شکل ۳. تغییرات قیمت های اختیار فروش به ازای تغییرات زمان سررسید قرارداد

جدول (۵) نتایج مدل های ارائه شده را به ازای تغییرات نرخ های بهره بدون ریسک مختلف (r) نشان می دهد. سایر پارامترها نیز ثابت در نظر گرفته شده است (قیمت اعمال برابر ۱۵۰، قیمت فعلی سبد برابر با ۱۳۷/۵ و زمان اعمال قرارداد ۲ ماه یا ۴۴ روز کاری در نظر گرفته شده است). همانطور که نتایج این جدول نشان می دهد تغییرات نرخ بهره بدون ریسک روی قیمت قرارداد اختیار

تأثیر معکوس دارد. بدین معنی که با افزایش نرخ بهره بدون ریسک قیمت های اختیار فروش کاهش پیدا می کنند.

جدول ۵. پیاده سازی مدل های ارائه شده با در نظر گرفتن تغییرات نرخ بهره بدون ریسک

نرخ بهره (r%)	قیمت قرارداد اختیار اروپایی بسته ای با استفاده از مدل MC	مدل Ju's	قیمت گذاری اوراق اختیار بسته ای با ADP	مزیت اعمال زودهنگام
۴	۱۱/۱۶۵	۱۱/۵۸۰	۱۳/۷۷۵	۲/۶۰۹
۵	۱۱/۱۴۷	۱۱/۳۴۲	۱۳/۷۷۲	۲/۶۲۶
۶	۱۱/۱۲۸	۱۱/۱۰۵	۱۳/۷۷۱	۲/۶۴۳
۷	۱۱/۱۰۹	۱/۸۶۸	۱۳/۷۷۱	۲/۶۶۲
۸	۱۱/۹۱	۱/۶۳۳	۱۳/۷۷۱	۲/۶۸۱
۹	۱۱/۷۲	۱/۳۹۹	۱۳/۷۷۰	۲/۶۹۸

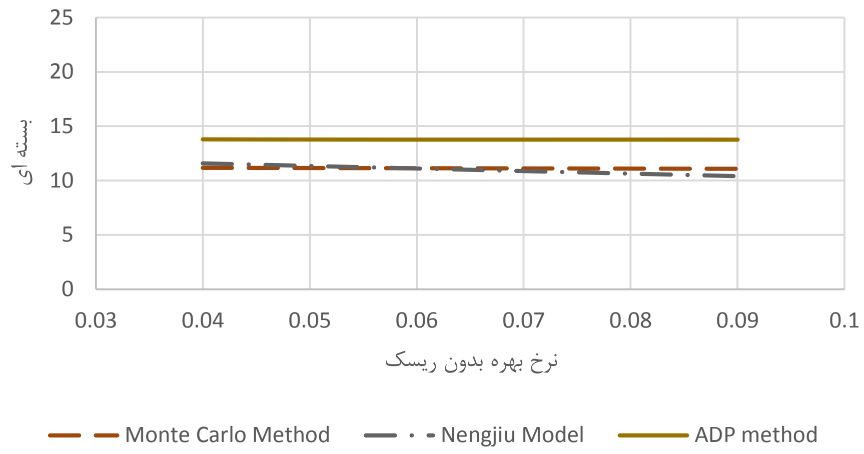
MC=Monte Carlo, ADP=Approximate Dynamic Programming و X=150، r=0.05 و S0=137.5.

شکل (۴) تغییرات قیمت های اختیار فروش را به ازای تغییرات نرخ بهره بدون ریسک نشان می‌دهد. نتایجی که می توان از این شکل گرفت به شرح زیر می باشد:

۱- همانطور که این شکل نشان می دهد تغییرات نرخ بهره تأثیر چندانی روی قیمت های اختیار فروش ندارد ولی در مجموع تأثیر معکوس دارد، البته نکته ایی که وجود دارد دامنه تغییرات نرخ بهره نیز زیاد نیست.

۲- در اینجا نیز قاعده قرارگرفتن قیمت‌های اختیار اروپایی به عنوان حد پایینی برای قیمت‌های اختیار آمریکایی رعایت شده است.

۳- قیمت های روش MC و روش Ju نیز در این حالت بسیار به هم نزدیک هستند.



شکل ۴. تغییرات قیمت های اختیار فروش به ازای تغییرات نرخ بهره بدون ریسک

نتایج به دست آمده از هر یک از حالات فوق را می توان بدین صورت جمع بندی نمود:

هر یک از مدل های ارائه شده به ازای متغیرهای تأثیرگذار در قیمت گذاری اختیار شامل تغییرات نرخ بهره بدون ریسک، تغییرات زمان اعمال و تغییرات قیمت اعمال مورد بررسی قرار گرفت. همانطور که نتایج تغییرات قیمت های اختیار در هر یک از متغیرهای مورد بررسی نشان می دهد که نتایج حاصل از مدل های پیاده سازی شده در خصوص قراردادهای اختیار بسته ای همانند قراردادهای اختیار تک سهم با تغییرات هر یک از متغیرهای مورد بررسی به طور منطقی تغییر کرده و این نشان می دهد هر یک از مدل ها به درستی پیاده سازی شده اند.

همچنین با پیاده‌سازی قرارداد اختیار بسته‌ای و قراردادهای اختیار تک سهم روی هر یک از سهام موجود در بسته می‌توان به مزیت استفاده از قراردادهای اختیار بسته ای در دنیای واقعی پی‌برد.

نتیجه‌گیری

اهمیت اوراق مشتقه به خصوص اوراق اختیار معامله و قراردادهای آتی در بازارهای معتبر مالی دنیا به منظور پوشش ریسک سرمایه گذاری بر کسی پوشیده نیست. در این بازارها، معامله‌گران حرفه‌ایی با بهره‌گیری از قابلیت های منحصر به فرد این اوراق، به مدیریت ریسک و کنترل قوی و منعطف سرمایه گذاری های خود می پردازند. بسیاری از فعالان بازار سرمایه اعتقاد دارند علیرغم

اهمیت این اوراق در بازار به منظور کاهش و مدیریت ریسک سرمایه گذاری‌ها، قیمت گذاری نادرست آنها می تواند منجر به ضرر و زیان های هنگفت برای سرمایه گذاران شود.

اوراق اختیار بسته ای به عنوان یکی از مهمترین انواع اوراق اختیار هم اکنون به عنوان ابزاری برای پوشش ریسک سبدهای سرمایه گذاری استفاده می شود. اوراق اختیار آمریکایی اعمال زودهنگام منجر به چالشی تر شدن قیمت گذاری آنها می شود. با توجه به اهمیت این موضوع، در این مقاله نیز بحث قیمت گذاری اوراق اختیار بسته ای آمریکایی که به طور ویژه به منظور مدیریت و پوشش ریسک سبدهای سرمایه گذاری به کار می روند، مورد توجه قرار گرفته است. برای این منظور، از رویکرد مبتنی بر شبیه سازی برای توسعه مدلی برای قیمت گذاری اوراق اختیار آمریکایی به ویژه نوع بسته ای استفاده شده است. به منظور شبیه سازی مقادیر قیمت های هر یک از سهام موجود در سبد نیز از ترکیب مدل های گارچ و کاپولا به همراه روش مونت کارلو استفاده شده است. همچنین با توجه به عدم دسترسی به قیمت های واقعی این نوع از قراردادها در بازار، از دو مدل مونت کارلو و مدل Ju به عنوان مدل های قیمت گذاری قراردادهای اروپایی استفاده است و قیمت های آنها به عنوان حد پایینی برای قیمت های آمریکایی لحاظ شده است. نتیج بدست آمده نشان می دهد که به ازای تغییرات قیمت های توافقی، زمان اعمال و نرخ بهره این حدود برای تمام حالات رعایت شده است.

به عنوان تحقیقات آتی پیشنهاد می شود تا مدل برنامه ریزی پویای تقریبی استفاده شده را با استفاده از مدل ناپارمتریک همانند مدل های شبکه عصبی مصنوعی ارتقا داد. همچنین توسعه و استفاده از توابع پایه جدید در برنامه ریزی پویای تقریبی می تواند بک عنوان یک نوآوری در این حوزه محسوب شود.

فهرست منابع

1) Powell, W.B., George, A., Bouzaiene-Ayari, B., Simao, H.P., Approximate dynamic programming for high dimensional resource allocation problems, 2005 IEEE International Joint Conference on Neural Networks, 2005.

2) Powell,W.B., Approximate dynamic programming: Solving the curses of dimensionality. New York: John Wiley and Sons.2007.

3) Powell, W. B. Approximate dynamic programming for high-dimensional applications. In Proceedings of the Winter Simulation Conference. New York: OMNI Press. 2006.

4) Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein, 1979, Option Pricing: A Simplified Approach, Journal of Financial Economics, 7, 1979: PP 229-263.

5) Rubinstein, M., Rainbow Options, Journal of Risk , 1994: PP 67-71.

6) Clewlow, L., and C. Strickland, 1998, Implementing Derivatives Models, John Wiley & Sons, 1998.

7) Longstaff, F.A. and Schwartz, E.S., 2001. Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach. The review of financial studies, 14(1), pp.113-147.

8) Deelstra, G., Liinev, J. and Vanmaele, M., 2004. Pricing of arithmetic basket options by conditioning. Insurance: Mathematics and Economics, 34(1), pp.55-77.

9) Leentvaar, C.C.W. and Oosterlee, C.W., 2008. On coordinate transformation and grid stretching for sparse grid pricing of basket options. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 222*(1), pp.193-209.

10) Xu, G. and Zheng, H., 2010. Basket options valuation for a local volatility jump–diffusion model with the asymptotic expansion method. Insurance: Mathematics and Economics, 47(3), pp.415-422.

11) Peña, J., Vera, J.C. and Zuluaga, L.F., 2012. Computing arbitrage upper bounds on basket options in the presence of bid–ask spreads. European Journal of Operational Research, 222(2), pp.369-376.

12) Dingeç, K. D., Hörmann, W., Control variates and conditional Monte Carlo for basket and Asian options, Insurance: Mathematics and Economics, Insurance: Mathematics and Economics 52, 2013: PP 421–434.

13) Lau, C.S. and Lo, C.F., 2014. The pricing of basket-spread options. Quantitative Finance, 14(11), pp.1971-1982.

14) Caldana, R., Fusai, G., Gnoatto, A. and Grasselli, M., 2016. General closed-form basket option pricing bounds. Quantitative Finance, 16(4), pp.535-554.

15) Wu, P. and Elliott, R.J., 2017. A simple efficient approximation to price basket stock options with volatility smile. Annals of Finance, 13(1), pp.1-29.

16) Bellman, R. and Dreyfus, S., 1959. Functional approximations and dynamic programming. Mathematical Tables and Other Aids to Computation, 13(68), pp.247-251.

17) Brandt, M.W., Goyal, A., Santa-Clara, P. and Stroud, J.R., 2005. A simulation approach to dynamic portfolio choice with an application to learning about return predictability. *The Review of Financial Studies*, *18*(3), pp.831-873.

18) Tsitsiklis, J.N. and Van Roy, B., 2001. Regression methods for pricing complex American-style options. *IEEE Transactions on Neural Networks*, *12*(4), pp.694-703.

19) Haugh, M.B. and Kogan, L., 2007. Duality theory and approximate dynamic programming for pricing American options and portfolio optimization. *Handbooks in operations research and management science*, *15*, pp.925-948.

20) Nystrom, K. and Skoglund, J., 2002. Univariate extreme value theory, garch and measures of risk. Preprint, Swedbank.

21) Davari-Ardakani, H., Aminnayeri, M. and Seifi, A., 2014. A study on modeling the dynamics of statistically dependent returns. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 405, pp.35-51.

یادداشت ها :

1 Closed-form solution
2 Curse of dimensionality
3 Single-asset option
4 Cox
5 Rubinstein
6 Longstaff & Schwartz
7 Polynomials
8 Deelstra
9 Xu
10 Zheng
11 Partial Integral Differential Equation
12 Pena
13 Dingec & Hormann
14 Geometric Brownian Motion
15 Lau
16 Lo
17 Caldana
18 Wu & Elliott
19 Volatility smile
20 Independent and Identically Distributed (i.i.d)
21 CDF
22 Gaussian Kernel
23 Sample Marginal Cumulative Distribution Function
24 Generalized Pareto Distribution Estimation
25 Yahoo Finance
26 Modern Portfolio Theory