مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره سی‌ودوم / پائیز ۱۳۹۶

ارائه مدل برنامه‌ریزی چندهدفه جهت انتخاب سهام با در نظرگرفتن ارزش در معرض خطر فازی: رویکرد تئوری اعتبار فازی

حسین دیده‌خانی[1]
سعید حجتی استانی[2]

تاریخ دریافت: ۹۵/۱۲/۲۱ تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۲/۲۶

چکیده

مسئله بهینه‌سازی پرتفوی و انتخاب سهام یکی از زمینه‌های پرتوجه توسط محققین مالی و سرمایه-گذاران در بازارهای مالی می‌باشد. در این مقاله به برخی از چالش‌های بهینه‌سازی پرتفوی بطور همزمان پرداخته می‌شود. بطوریکه جهت در نظرگرفتن ماهیت چندمعیاره بودن انتخاب سهام و عدم‌قطعیت مرتبط با نرخ بازده دارایی‌ها از مدل برنامه‌ریزی چندهدفه فازی استفاده شد. همچنین با توجه نقاط ضعف معیارهای ریسک سنتی نظیر واریانس از ارزش درمعرض خطر و معیار عدم‌قطعیت با رویکرد تئوری اعتبار فازی جایگزین آن‌ها شدند. در پایان با توجه به ساختار غیرخطی و سخت مدل طراحی شده، از نسخه دوم الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب "NSGA-II"، جهت حل مدل استفاده گردید. جهت نمایش قابلیت کاربرد مدل توسعه داده شده در بین ۱۰ شرکت بین المللی بکارگرفته شد. پس از اجرای مدل و در راستای روایی سنجی، پرتفوی‌های پارتو بهینه بدست آمده با پرتفوهای تصادفی تولید شده مورد مقایسه قرار گرفتند. نتایج مقایسه نشان دهنده سطوح بالاتردستیابی به اهداف در پرتفوهای بهینه بود.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی چندهدفه پرتفوی، الگوریتم NSGA-II، عدم‌قطعیت، تئوری اعتبار.

۱- استادیار، گروه مهندسی مالی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علی‌آباد کتول، علی آباد کتول، ایران (نویسنده مسئول)
h.didehkhani@gmail.com
۲- کارشناس ارشد مهندسی مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد علی‌آباد کتول، Saeid.hojjati@yahoo.com

۱- مقدمه

افزایش میزان سود و کاهش ریسک سرمایه‌گذاری در بورس همیشه مهم‌ترین دغدغه سرمایه‌گذاران بوده است و آنها همواره به دنبال راهی برای بهترین سرمایه‌گذاری در سهام هستند به صورتی که دارای بیشترین بازده و کمترین ریسک سرمایه‌گذاری باشد. تئوری مدرن پرتفوی توسط پژوهش‌های پیشگام مارکوویتز[۱] (۱۹۵۲) که در اصل آغازگر مدل بهینه‌سازی میانگین- واریانس(MVO[۲]) بوده الهام گرفته شده است. بهینه‌سازی پرتفوی به عنوان یکی از زمینه‌های پرکاربرد در مدیریت سرمایه‌گذاری و مهندسی مالی توجه بسیاری از محققین و سرمایه‌گذاران را به خود جلب نموده است.

مسئله بهینه‌سازی پرتفوی از زمان معرفی خود، تاکنون سیر تحولات گسترده‌ای را با توجه به غیرعملی بودن فرضیات مدل اولیه گذرانده است. برخی از این مفروضات غیرعملی، شرط نرمال و قطعی بودن نرخ بازده موردانتظار دارائی‌ها و به تبع آن ماتریس کواریانس‌ها و همچنین نرمال بودن چندمتغیره آن‌ها می‌باشد. اما امروزه با توجه به این‌که در دنیای واقعی آن‌ها نه نرمال هستند و نه قطعی، لزوم استفاده از مدل‌های غیرقطعی همانند تصادفی، فازی، تصادفی فازی، پایدار و ... مشهود می‌باشد. همچنین در هنگام استفاده از داده‌های تاریخی برای بازده‌های سرمایه‌گذاری، از آن‌جایی که در بیشتر موقعیت‌های پویای مالی، بازده‌های سهام تمایل به حالت‌های عدم‌اطمینان و مبهم دارند. ضرورت درنظر گرفتن بازده به عنوان متغیر فازی در بهینه‌سازی پرتفوی وجود دارد.

از مفروضات غیرعملی که در مدل مارکوئیتز وجود داشت فرض وجود ۲ هدف اصلی یعنی بیشینه‌سازی بازده و کمینه‌سازی ریسک می‌باشد که این امر نشات گرفته از فرض نرمال بودن تابع توزیع بازده دارائی‌ها می‌باشد. اکثر تحقیقات انجام شده در مسئله انتخاب پرتفوی با استفاده از دو گشتاور اول توزیع بازده انجام شده‌اند. بسیاری ازمحققان معتقدند تنها در صورتی می‌توان از گشتاور درجات بالاتر صرف‌نظر کرد که یا توزیع بازده متقارن باشد(مثلا نرمال) یا توزیع بازده در انتخاب سرمایه‌گذاران موثر نباشد(لیو و همکاران[۳]،۲۰۰۳؛ پراکاش و همکاران[۴]، ۲۰۰۳) و همچنین ساموئلسون[۵] (۱۹۷۰)، نشان داد که گشتاورهای بالاتر در انتخاب پرتفوی برای سرمایه‌گذاران اهمیت دارند و در انتخاب دو پرتفوی، اگر میانگین و واریانس هر دو برابر باشند، سبدی را انتخاب می‌کنند که گشتاور سوم بزرگتری دارد. اما امروزه پژوهشگران به اهداف متنوعی در این زمینه اشاره می نمایند، اهدافی همچون نرخ بازده، واریانس، چولگی، کشیدگی، ارزش در معرض خطر، نقدینگی و .... بنابراین ماهیت مسئله بهینه‌سازی پرتفوی به یک مسئله بهینه‌سازی چندمعیاره تغییر پیدا می‌کند و مدل‌های متنوع برنامه‌ریزی چندهدفه و برنامه‌ریزی چندشاخصه نظیر برنامه‌ریزی آرمانی، تحلیل سلسله مراتبی، روش‌های وزن‌دهی و ... در بهینه‌سازی و انتخاب پرتفوی بکار گرفته شده‌اند. به عنوان نمونه تیریاکی و اغلو[۶](۲۰۰۹) یک روش جدید سلسله مراتبی فازی محدود اصلاح شده‌ای را برای انتخاب پرتفوی در بورس استامبول پیشنهاد کردند. آنها از مفهوم الگوی چندمعیاره تصمیم‌گیری برای غلبه بر شرایط نامطمئن ناشی از عدم‌اطمینان محیط فعالیت شرکت استفاده کردند. کریش و استون[۷](۲۰۱۰) نیز در تحقیقی، تصمیم‌گیری چندمعیاره فازی را جهت گزینش پرتفوی در شرایط عدم اطمینان ارائه دادند.

کانگ و همکاران[8](۲۰۱۱) با استفاده از تحلیل گزارش‌های مالی و تصمیم‌گیری چندمعیاره به انتخاب بهترین شرکت از بین پنج شرکت مورد بررسی از لحاظ عملکرد مالی پرداختند. آنان از روش تحلیل سلسله مراتبی فازی برای تعیین وزن معیارها و برای انتخاب بهترین شرکت از نظر عملکرد مالی از تاپسیس فازی استفاده کردند. چن و پان[9](۲۰۱۳) روشی برای انتخاب پرتفوی بر مبنای ترکیب فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی و پرومته ارائه دادند. نتایج پژوهش نشان می‌دهد، روش مذکور، محاسبه‌های پیچیده روش تحلیل سلسله مراتبی فازی را کاهش می‌دهد و نتایج معقول‌تری به‌دست می‌آورد.

مسئله دیگر در مدل‌های بهینه‌سازی پرتفوی حل مدل‌های طراحی شده می‌باشد. زیرا در دنیای واقعی، در نظر گرفتن محدودیت‌های واقعی مدل نظیر سقف و کف وزن و دارائی در پرتفوی، هزینه مبادلاتی، حداقل و حداکثر تعداد سهام در پرتفوی و ... و با توجه به بالا بودن تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری و تعداد بالای دارائی‌های در دسترس، مسئله به یک مسئله‌ای با ساختار پیچیده و غیرخطی تبدیل می‌شود که روش‌های حل تحلیلی پاسخگوی حل آنها در زمان مناسب نخواهد بود.

در سالیان اخیر، روش‌های متعدد ابتکاری و فراابتکاری برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه معرفی شده‌اند که از میان آن‌ها، روش‌های بهینه‌سازی هوشمند(الگوریتم‌های تکاملی) جایگاه ویژه‌ای دارند. زیرا اغلب، برخلاف روش‌های کلاسیک در ریاضیات کاربردی، مسائل بهینه‌سازی چندهدفه را به همان شکل اصلی حل می‌کنند و این مدل‌ها به طور وسیعی در مسئله بهینه‌سازی پرتفوی به کار گرفته شده‌اند، که می‌توان به الگوریتم‌هایی نظیر: بهینه سازی ازدحام ذرات چند هدفه[10] MOPSO، الگوریتم انتخاب مبتنی بر الگوی پارتو[11] SPEA و الگوریتم تکاملی چندهدفه مبتنی بر تجزیه[12] MOEA/D اشاره نمود. میشرا و همکاران[13](۲۰۰۹) الگوریتمMOPSO را برای حل مسئله بهینه‌سازی پرتفوی به‌کار بردند و آن‌را با روش‌های SPEA-II و الگوریتم کوتاهترین مسیر سریع[14] SPFA ، NSGA-II مقایسه کردند. اهداف در این مقاله، بیشینه‌شدن بازده و کمینه‌کردن انحراف‌معیار بوده است. لی و همکاران[15] (۲۰۱۱) مدلی جدید چندهدفه فازی میانگین- واریانس و ارزش درمعرض خطر را بر مبنای تئوری اعتبار توسعه دادند که می‌تواند برای سرمایه‌گذاران اطلاعات بهتری برای تصمیم‌گیری فراهم آورد. وی برای حل این مدل از الگوریتم ازدحام ذرات بهبود یافته[16](IPSO) استفاده نمود و آنرا با الگوریتم‌های ژنتیک[17](GA) و کلونی مورچگان[18](SAA) مقایسه نمود.

یکی از موارد دیگری که مسائل بهینه‌سازی پرتفوی می‌بایست در نظر گرفته شود، عدم قطعیت مرتبط با پارامترهای مدل، خصوصا نرخ بازده مورد انتظار دارایی‌ها و رویکرد تبدیل مسئله فازی به مسئله درحالت قطعی و قابل حل می‌باشد. در این زمینه رویکردهای متنوعی نظیر رویکرد تصادفی فازی، رویکرد تبدیل اعداد فازی به بازه‌های حقیقی و رویکرد نوین تئوری امکان توسعه داده شده‌اند.

در خصوص رویکرد مبتنی برتئوری امکان، این تئوری در اصل توسط زاده[19](۱۹۸۷) در رابطه با مجموعه‌های فازی ارائه گردید و به عنوان یک دستکاری در مبنای تئوری مجموعه‌های فازی و مکمل نظریه احتمال توسعه داده شده است(دوبوا و پراد[20]، ۱۹۸۸). در این دیدگاه نرخ بازده مورد انتظار به صورت یک

متغیر تصادفی عمل نمی‌کند، اما مقادیر امکان‌پذیر متغیرها توسط اعداد فازی توضیح داده می‌شوند. اینوگوچی و تانینو[۲۱](۲۰۰۰) یک دیدگاه جدید تئوری امکان برای مسئله انتخاب پرتفوی معرفی نمودند. دیدگاه آن‌ها یک راه حل سرمایه‌گذاری توزیع‌پذیر را ترجیح می‌دهد که بر اساس معیار حذفی Minimax می‌باشد. جانا و همکاران[۲۲](۲۰۰۹) با بکاربردن تئوری امکان در بهینه‌سازی پرتفوی چند هدفه و با در نظرگرفتن هزینه معاملاتی نشان داد که دارائی‌ها به خوبی در پرتفوی بدست آمده توزیع شده اند.

یکی دیگر از رویکردهای پراستفاده در زمینه حل مسایل فازی و تبدیل آن به حالت قطعی رویکرد برش‌های آلفا و تبدیل اعداد فازی به اعداد بازه ای حقیقی می‌باشد. درخصوص رویکرد مبتنی بر تبدیل اعداد فازی به بازه حقیقی($\alpha - cut$ ها) در مسائل بهینه‌سازی پرتفوی می‌توان به پژوهش پارا و همکاران (۲۰۰۱)، اشاره نمود که یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی[۲۳](GP) فازی برای انتخاب پرتفوی را توسعه دادند. اهداف بکارگرفته شده سه معیار بازده، ریسک و نقدشوندگی بودند. لی و همکاران (۲۰۰۲)، مدل مارکوئیتر را به یک مدل برنامه‌ریزی بازه‌ای توسط بیان کردن کمی بازده مورد انتظار و کواریانس به صورت بازه‌ای بسط دادند. همچنین ایدا[۲۴] (۲۰۰۴)، یک مسئله انتخاب چندهدفه پرتفوی با ضرایب بازه‌ای را در قالب مدل مارکوئیتر حل نمود. جیو و همکاران[۲۵](۲۰۰۶)، یک مسئله انتخاب پرتفوی را فرموله نمود که قیمت‌های سهام بصورت متغیرهای بازه‌ای لحاظ گردید. در اینجا مسئله بازه‌ای اولیه به مجموعه‌ای از مسائل بهینه‌سازی تبدیل گردید. معیار ریسک مورد استفاده در این مسئله نیمه انحراف‌معیار بوده است. فانگ و همکاران[۲۶](۲۰۰۶) یک مدل برنامه‌ریزی بازه‌ای خطی ارائه نمودند. بر اساس برخی دیگر از روابط مابین فواصل مدل آنها به یک مدل برنامه‌ریزی خطی سنتی تبدیل گردید.

اما رویکرد نوین در این زمینه تئوری اعتبار فازی می‌باشد که توسط لیو و لیو (۲۰۰۲) به عنوان یک گزینه رقیب برای تئوری امکان مجموعه فازی،ارائه گردید. امتیاز این معیار برآورده ساختن خاصیت خود-دوگانگی[۲۷] است که پس از توسعه آن، این رویکرد بطور وسیعی در بهینه‌سازی پرتفوی در محیط فازی نیز بکار گرفته شد. همانند گوپتا و همکاران[۲۸](۲۰۱۳) که از تئوری اعتبار فازی استفاده نموده و با در نظر گرفتن بازده کوتاه‌مدت و بلندمدت، نیمه‌واریانس و نقدینگی به عنوان توابع هدف مسئله بهینه‌سازی پرتفوی، برای حل این مدل از برنامه‌ریزی آرمانی و الگوریتم ژنتیک استفاده کردند. باتاچاریا و همکاران[۲۹](۲۰۱۴) نیز با استفاده از تئوری اعتبار مدلی مبتنی بر میانگین، آنتروپی و چولگی ارائه و با در نظرگرفتن محدودیت‌های اعمال شده مسئله را توسط الگوریتم ژنتیک حل نمودند.

لذا با توجه به مسائلی که بیان گردید، هدف اصلی از انجام این تحقیق پرداختن به این مسائل به صورت همزمان و در یک مدل جامع می‌باشد بطوریکه با طراحی یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفه با در نظر گرفتن اهدافی نظیر ارزش مورد انتظار و نیمه‌کشیدگی، ارزش در معرض خطر و شاخص عدم قطعیت فازی، اهدافی که در مسائل مختلف به صورت جداگانه در نظر گرفته می شود، به‌طور هم‌زمان در نظر گرفته شود. همچنین برای در نظر گرفتن عدم قطعیت مرتبط با نرخ بازده موردانتظار دارائی ها از اعداد فازی مثلثی[۳۰]

برای تعیین نرخ بازده استفاده گردید. در نهایت مدل توسعه داده شده با رویکرد فراابتکاری و الگوریتم "NSGA-II" حل و جوابهای پارتو بهینه بدست آمد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

۲-۱- پیشینه پژوهش

در این بخش عمده پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه بهینه‌سازی پرتفوی در محیط فازی و چندهدفه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مسائل اولیه مطرح شده بهینه‌سازی پرتفوی با فرض تصادفی بودن بازده دارایی‌ها انجام شده اما در واقعیت، معمولا تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان صورت می‌گیرد و همواره برخی عوامل غیرتصادفی بر بازده دارایی‌ها تاثیرگذار است. یکی از راه‌حل‌های مطرح شده در این زمینه استفاده از تئوری فازی برای مدل سازی بازده دارایی‌ها می‌باشد. اولین پژوهش‌ها در زمینه بکارگیری منطق فازی در بهینه‌سازی پرتفوی توسط مطالعات افرادی مانند پارا و همکاران[۳۱](۲۰۰۱)، تاناکا و جیو[۳۲](۱۹۹۹)، ورچر و همکاران[۳۳](۲۰۰۲) شروع شد. همچنین تاناکا و همکاران[۳۴](۲۰۰۰) روش حل فازی احتمالی انتخاب پرتفوی را مورد بررسی قرار دادند که پایه و اساس این روش بر اساس مدل ریاضی مارکویتز است و سعی کردند با استفاده از تجربه افراد خبره پرتفوی انتخاب شود که بیشترین میزان بازگشت سرمایه و کمترین ریسک را داشته باشد. این موضوع باعث شد که راه‌حل ارائه‌شده به مقدار زیادی به اطلاعات فرد خبره وابسته باشد. پس از آن محققان روش‌های مختلفی را در این زمینه ارائه دادند

از سوی دیگر اخیرا محققان از رویکرد تئوری امکان برای بهینه‌سازی پرتفوی در شرایط فازی استفاده کردند. در این میان واتادا[۳۵](۲۰۰۱) نوع دیگری از مدل بهینه‌سازی پرتفوی بر اساس اصول فازی ارائه نمود. وی بیان نمود که در دیدگاه سنتی تئوری پرتفوی، توزیع سرمایه‌گذاری به عنوان یک دیدگاه مفید برای کاهش ریسک در نظر گرفته می‌شود. بنابراین به عنوان یک کاربرد از تئوری امکان نشان داد که می‌توان این موضوع را از آن انتظار داشت و همچنین وی نشان داد که در دیدگاه تئوری امکان بازده مورد انتظار بصورت متغیر تصادفی عمل نمی‌کند بلکه بصورت متغیرهای امکان‌پذیر می‌باشد. کارسون و همکاران[۳۶](۲۰۰۲) رویکرد امکانی را برای انتخاب پرتفوی بهینه با بیشترین درجه مطلوبیت با فرض بازده دارایی‌ها یک متغیر فازی مثلثی است را معرفی کردند و با الگوریتمی که فقط می‌توانست از بین nسهم، سه سهم را در پرتفوی بهینه بگنجاند، مسئله را حل کردند.

برخی محققان مسئله انتخاب پرتفوی را بوسیله استفاده از اندازه اعتبار که بعضی نواقص اندازه امکان را دارا نمی‌باشد توسعه دادند و در ادامه این مطالعات ارائه شده است. هوانگ[۳۷] (۲۰۰۷) روش اندازه‌گیری جدید ریسک برای بهینه‌سازی پرتفوی را آغاز کرد. وی از شبکه‌های عصبی برای محاسبه مقدار مورد انتظار و تغییر ارزش پرتفوی بهینه استفاده کرد. اگر چه مدل‌های مختلف بهینه‌سازی فازی پیشنهاد شده است، روش‌های کارا و جامع برای ارزیابی ریسک پرتفوی و همچنین برای ارزیابی عملکرد پرتفوی در زمینه مدل سازی فازی انجام نشده است. در حالی که ریسک مرسوم نوسانات و نسبت شناخته شده شارپ در مدل-

سازی احتمالاتی کارائی دارد و در زمینه امکان پذیری فازی مفید نمی‌باشد. همچنین هوانگ(۲۰۰۸)، مدل میانگین- آنتروپی برای انتخاب پرتفوی، آنتروپی از متغیرهای فازی بازده سهام قرضه را به عنوان معیاری ریسک مورد استفاده قرار داد و دو نوع از مدل‌های معتبر میانگین- آنتروپی فازی را معرفی نمود. مدل از طریق یک الگوریتم هوشمند ترکیبی، به دنبال به حداقل رساندن آنتروپی برای به دست آوردن عدم اطمینان کمتر بازده پرتفوی است. بازده سهام نیز به صورت متغیرهای تصادفی فازی مثلثی، ذوزنقه‌ای و گاوسی رفتار می‌کند. هاو و لین[۳۸](۲۰۰۹) در تحقیقی با عنوان مدل میانگین- واریانس برای انتخاب پرتفوی با بازده تصادفی فازی، الگوریتم ژنتیک را به عنوان ابزار حل مدل‌های خود به‌کار بردند. در این تحقیق، نمونه‌های جدیدی از مدل‌های میانگین- واریانس برای مسائل انتخاب پرتفوی با بازده‌های سرمایه‌گذاری تصادفی فازی نمایش داده شدند. در مدل‌های ارائه شده، بازده مورد انتظار پرتفوی را به‌عنوان بازده سرمایه-گذاری و واریانس بازده مورد انتظار را به‌عنوان ریسک سرمایه‌گذاری درنظر گرفتند و در نهایت نمونه عددی برای نشان دادن کارائی روش‌های معرفی شده به‌کار رفت. چانگ و همکاران[۳۹](۲۰۰۹)، یک روش فراابتکاری برای حل مسئله بهینه‌سازی پرتفوی ارائه کردند که درآن الگوریتم ژنتیک، سبدهای سهام مختلف که ریسک آن‌ها به‌شیوه‌های متفاوتی محاسبه شده بود را به کار می‌گرفت. نتایج حاکی از امکان دستیابی به پرتفوی بهینه به کمک الگوریتم ژنتیک دارد. چن و هوانگ[۴۰](۲۰۰۹) بهینه‌سازی سبد دارایی سهام صندوق های سرمایه‌گذاری با در نظرگرفتن نرخ بازده و ریسک فازی، عدم‌اطمینان از بازده آتی و ریسک را در نظر گرفته و آنها را در اعداد فازی مثلثی معرفی کرده و تخصیص دارایی بهینه شده را توسط بهینه‌سازی فازی حل کرده‌اند. یافته‌های راه حل پرتفوی استدلال کرده که آنها در در محیط مالی مبهم معقول و مناسبتر است.

هاسوکه و همکاران[۴۱](۲۰۰۹)، به مسئله انتخاب پرتفوی با در نظر گرفتن بازده دارایی‌ها بصورت تصادفی فازی پرداخته و چندین مدل تصادفی فازی غیرخطی انتخاب پرتفوی مطرح کردند. همچنین در پایان یک روش حل کارآمد شامل مسئله برنامه ریزی محدب پارامتری برای پیدا کردن یک راه حل بهینه عمومی برای بهینه‌سازی پرتفوی بدست آوردند. لی و ژو[۴۲](۲۰۰۹)، یک مدل جدید انتخاب پرتفوی تعاملی مبتنی بر نظر خبرگان و درنظرگرفتن همزمان عدم قطعیت و عدم اطمینان در قالب اعداد تصادفی فازی ارائه نمودند. راه حل‌های مدل پیشنهادی می‌توانست مرز کارا را با توجه به درجه خوشبینی سرمایه‌گذاران بوجود آورد. آناگاسپولس و مانیز[۴۳](۲۰۰۹)، از سه الگوریتم بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه، شامل NSGAII، SPEA-II و PESA برای حل مسئلهٔ بهینه‌سازی پرتفوی استفاده کردند. نتایج نشان داد که با به‌کارگیری مدل میانگین- واریانس، تمام الگوریتم‌های یادشده، تخمین بسیار نزدیکی به سطح بهینه پارتو دارند. همچنین، الگوریتم PESA بهترین عملکرد را از نظر همگرایی به سطح بهینهٔ پارِتو دارد و الگوریتم SPEA-II بهترین پاسخ‌ها را از نظر گستردگی می‌دهد. لی و همکاران (۲۰۱۰)، مدل سه‌هدفه میانگین واریانس- چولگی برای انتخاب پرتفوی با بازده فازی ارائه دادند. چولگی به‌دلیل عدم‌تقارن و غیرنرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها، درنظر گرفته شد. و در پایان مسئله را با درنظر گرفتن بازده به‌عنوان یک عدد فازی‌مثلثی مدل‌سازی و با

استفاده از الگوریتم ژنتیک و شبیه‌سازی فازی مدل خود را حل نمودند. کامدم و همکاران[۴۴] (۲۰۱۲) به گشتاور و نیمه‌گشتاور برای انتخاب پرتفوی بر اساس تئوری اعتبار با عوامل ریسک فازی(برای مثال ذوزنقه-ایی) پرداخته‌اند. به منظور اندازه‌گیری بازده پرتفوی، مفاهیم گشتاور(برای مثال چولگی) و نیمه گشتاور(برای مثال نیمه کشیدگی) معرفی و خواص ریاضی آنان مورد مطالعه قرار گرفت. در ادامه مدل میانگین، واریانس، چولگی، نیمه کشیدگی ارائه گردید و با یک مثال عددی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. نگوئن و دیگران[۴۵] (۲۰۱۳) معیار جدید ریسک پرتفوی به نام نسبت شارپ فازی و نسبت پاداش به عدم اطمینان را برای ارزیابی عملکرد پرتفوی در مدل سازی فازی مطرح نمودند. در مدل بهینه‌سازی پرتفوی عدم اطمینان در بازده فازی پرتفوی به حداقل رسیده است در حالی که نسبت شارپ فازی به حداکثر رسیده است. این مدل توسط روش فازی و توسط الگوریتم ژنتیک (GA) حل شد. راه حل دو مدل پیشنهادی با مدل مرسوم بهینه سازی میانگین- واریانس(MVO) که به‌صورت متداول در ادبیات مالی مورد استفاده قرارمی گیرد مقایسه گردید. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از روش فازی برای حل مسائل چندهدفه بهتر از الگوریتم ژنتیک برای رسیدن به راه حل‌های بهینه می‌باشد، اگر چه الگوریتم ژنتیک می-تواند یک سری از راه‌حل‌های متنوع پرتفوی در مرز پارتو ارائه دهد.

اما در خصوص مطالعات داخلی در زمینه حل مسئله بهینه‌سازی چندهدفهٔ پرتفوی، از جمله نخستین پژوهش‌هایی که به بهینه‌سازی پرتفوی بورس ایران به کمک الگوریتم‌های فراابتکاری پرداخته‌اند، می‌توان به عبدالعلی‌زاده و عشقی(۱۳۸۲) اشاره کرد که با استفاده از الگوی خاصی از الگوریتم ژنتیک به حل مسئله انتخاب پرتفوی پرداخته‌اند. در این مدل، ابتدا با استفاده از الگوریتم ژنتیک بهترین سهام از نظر بازدهی، ریسک و ضریب همبستگی با سهام دیگر، انتخاب می‌شوند؛ سپس توسط یک الگورتیم ژنتیک دیگر وزن بهینه برای هر سهم منتخب، به دست می‌آید. در ادامه راعی و فلاح پور(۱۳۹۰) در مقاله ای با عنوان" طراحی مدلی برای مدیریت فعال پرتفوی با استفاده از VaR و الگوریتم ژنتیک " به منظور ارائه راه‌حلی برای رفع مشکل عدم توجه به ریسک کل، اثر اضافه نمودن محدودیت جدید VaR به مدل بررسی نمودند. با توجه به پیچیده بودن چنین مدلی، از الگوریتم ژنتیک برای بهینه‌سازی استفاده شده است. برای ارزیابی و مقایسه عملکرد مدل‌ها، از دو معیار شارپ و نسبت بازده به VaR استفاده شده است. نتایج این پژوهش نشان داد، مدل جدید در مقایسه با مدل مدیریت فعال بدون محدودیت در VaR، به طور معناداری از عملکرد بهتری برخوردار است. شاه‌محمدی و همکاران(۱۳۹۱) در مقاله ای با عنوان "ارائه الگوریتم هوشمند ترکیبی بر پایه مدل فازی میانگین- واریانس- چولگی برای انتخاب پرتفوی"، به ارائه روشی کارا به منظور پشتیبانی از فرد تصمیم گیرنده در انتخاب پرتفوی مناسب جهت سرمایه‌گذاری پرداخته است. در روش ارائه شده، الگوریتم ترکیبی جهت رسیدن به جوابی بهینه مورد استفاده قرار گرفته که الگوریتم ژنتیک به‌منظور جستجوی پرتفوی و از شبکه عصبی مصنوعی آموزش داده شده با شبیه سازی فازی جهت تخمین بازده و ریسک پرتفولیو استفاده می‌شود. در این الگوریتم به جهت استفاده از شبکه عصبی مصنوعی در تخمین مقادیر، زمان محاسبات به طور قابل ملاحظه‌ای در مقایسه با استفاده مستقیم از شبیه سازی فازی کاهش

یافته است. بهزادی و بختیاری(۱۳۹۳)، در مقاله‌ای تحت عنوان"ارائه مدلی بر مبنای میانگین- آنتروپی- چولگی برای بهینه‌سازی پرتفوی در محیط فازی" ارائه نموده‌اند که در آن از تئوری اعتبار برای محاسبه پارامترهای مورد نیاز استفاده شده است. در این مقاله برای مقایسه این مدل و مدل میانگین- واریانس از شاخص عملکرد اقتصادی استفاده شده است و در انتها با به‌کار بردن داده‌های بورس اوراق بهادار تهران نشان داده شده است، مدلی که بر مبنای میانگین-آنتروپی چولگی دارای شاخص عملکرد اقتصادی بالاتری است.
در ادامه برخی از مهم‌ترین تحقیقات انجام شده در خصوص بهینه‌سازی چند هدفه پرتفوی در محیط فازی برای مقایسه فهرست می‌گردد.

جدول ۱- مهمترین تحقیقات انجام شده در زمینه بهینه سازی پرتفوی

محقق (محققین)	سال	اهداف در نظر گرفته شده	روش حل
هوانگ	۲۰۰۸	میانگین- آنتروپی	الگوریتم هوشمند ترکیبی
هاو و لین	۲۰۰۹	میانگین- واریانس	هاو و لین
لی و همکاران	۲۰۱۰	میانگین واریانس چولگی	نافازی سازی – تئوری اعتبار
کامدم و همکاران	۲۰۱۲	میانگین، واریانس، چولگی، نیمه کشیدگی	برنامه ریزی خطی تک هدفه در متلب
نگوئن و دیگران	۲۰۱۳	عدم قطعیت، نسبت شارپ فازی، نسبت پاداش به عدم اطمینان	الگوریتم ژنتیک و روش فازی
گوپتا و همکاران	۲۰۱۳	بازده کوتاه‌مدت و بلندمدت، نیمه- واریانس و نقدینگی	برنامه‌ریزی آرمانی و الگوریتم ژنتیک
باتاچاریا و همکاران	۲۰۱۴	میانگین، آنترپی و چولگی	الگوریتم ژنتیک

پژوهش‌هایی که تاکنون انجام شده، توانایی مرتفع ساختن ریسک‌هایی که بر پرتفوی تاثیر می‌گذارند را دارند. اما در این پژوهش از ترکیب متفاوت و متنوع‌تری از اهداف استفاده می‌کنیم.

۲-۲- تئوری اعتبار فازی

تئوری فازی و نظریه امکان فازی علی‌رغم تمامی قابلیت‌هایی که در زمینه استدلال، استنتاج، کنترل، تصمیم‌گیری و بهینه‌سازی سیستمهای مهندسی و اقتصادی همراه با عدم قطعیت دارد، دارای برخی از معایب نظیر عدم وجود خاصیت خود- دوگانگی می‌باشد. عدم داشتن این خاصیت منجر به این خواهد شد که حداکثر امکان یک رویداد فازی نتواند وقوع قطعی این رویداد را تضمین نماید. لیو و لیو[۴۶] در سال ۲۰۰۲ اندازه گیری خود دوگانگی، که اندازه گیری اعتبار نامیده شد معرفی نمود و لیو[۴۷] در سال ۲۰۰۴ یک تئوری جایگزین برای نظریه امکان ارائه داد بطوریکه دارای خاصیت خود- دوگانگی بود. این تئوری به تئوری اعتبار فازی مشهور گردید(لیو، ۲۰۰۴).

تئوری اعتبار فازی در واقع شاخه‌ای از ریاضیات برای مطالعه رفتار پدیده‌های فازی است که در این بخش بطورخلاصه مفاهیم اصلی این تئوری را بیان می‌کنیم. اگر Θ را به عنوان یک مجموعه غیر تهی (به نمایندگی از فضای نمونه) و $P(\Theta)$ مجموعه توانی Θ (به عنوان مثال، همه زیر مجموعه های ممکن Θ)در نظر بگیریم، هر عنصر در $P(\Theta)$ یک رویداد نامیده می‌شود. برای ارائه یک تعریف بدیهی اعتبار، لازم است به هر رویداد A ، یک عدد $Cr\{A\}$ اختصاص یابد، علاوه بر این، می‌بایست دارای برخی از خواص ریاضی شامل چهار اصل زیر باشد(گوپتا و همکاران، ۲۰۱۴):

- اصل ۱. (نرمال بودن): $\mathrm{Cr}\{\Theta\} = 1$
- اصل ۲. (یکنواختی): برای هر $A \subset B$ داشته باشیم $\mathrm{Cr}\{A\} \leq \mathrm{Cr}\{B\}$
- اصل ۳. (خود دوگانگی): برای هر رویداد$A \in P(\Theta)$ داشته باشیم $Cr\{A\} + Cr\{A^c\} = 1$
- اصل ۴. (حداکثر سازی): برای هر رویداد$\{A_i\}$ با در نظر گرفتن $\mathrm{Cr}\{A_i\} \leq 0.5$ و اینکه $\sup_i$ بیشترین مقدار در مجموعهA_i می‌باشد، داشته باشیم $\mathrm{Cr}\{U_i A_i\} \wedge 0.5 = \sup_i \mathrm{Cr}\{A_i\}$

نحوه ایجاد مجموعه های فازی و تعریف تابع عضویت آنها بستگی به زمینه و دامنه کاربری آنها دارد. تعریف یک مجموعه فازی برای مفهوم مورد نظر ما با تعریف یک تابع عضویت مناسب برای آن کامل می-شود. فرض می‌کنیم ξ یک متغیر فازی با تابع عضویت μ_ξ و r عدد حقیقی باشد. آنگاه، معیارهای امکان[۴۸] و الزام[۴۹] در تئوری امکان به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شوند(دوبوا و پراد، ۱۹۸۸):

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pos}\left\{\xi \leq \mathrm{r}\right\} = \sup_{y \leq r} \mu(y) \\ &\mathrm{Nec}\left\{\xi \leq \mathrm{r}\right\} = 1 - \mathrm{Nec}\left\{\xi > \mathrm{r}\right\} = 1 - \sup_{y > r} \mu(y) \end{aligned} \tag{۲-۱}$$

در نتیجه تابع اعتبار رخداد $\xi \leq r$ برابر است با:

$$\mathrm{Cr}\left\{\xi \leq \mathrm{r}\right\} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Pos}\left\{\xi \leq \mathrm{r}\right\} + \mathrm{Nec}\left\{\xi \leq \mathrm{r}\right\}\right] \tag{۲-۲}$$

با در نظر گرفتن خاصیت خود– دوگانگی، داریم(لیو و لیو،۲۰۰۲):

$$\mathrm{Cr}\left\{\xi \leq r\right\} = 1 - \mathrm{Cr}\left\{\xi \geq r\right\} \tag{۲-۳}$$

در نتیجه تابع اعتبار به صورت‌های زیر قابل بیان می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cr}\{\xi = \mathrm{r}\} = \frac{1}{2}\left(\mu(\mathrm{r}) + 1 - \sup_{y \neq r}\mu(y)\right) \forall \mathrm{r} \in \mathrm{R} \\ &\mathrm{Cr}\{\xi \leq \mathrm{r}\} = \frac{1}{2}\left(\sup_{y \leq r}\mu(y) + 1 - \sup_{y > r}\mu(y)\right) \forall \mathrm{r} \in \mathrm{R} \\ &\mathrm{Cr}\{\xi \geq \mathrm{r}\} = \frac{1}{2}\left(\sup_{y \geq r}\mu(y) + 1 - \sup_{y < r}\mu(y)\right) \forall \mathrm{r} \in \mathrm{R} \end{aligned} \tag{۲-۴}$$

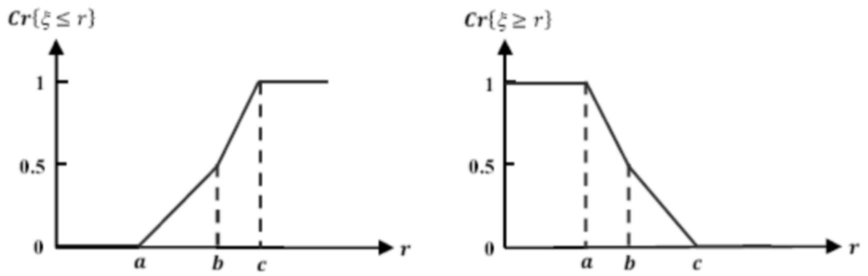
برای بدست آوردن تابع اعتبار$Cr\{\xi \le r\}$ یک متغیر فازی مثلثی از قضیه اعتبار معکوس استفاده می‌کنیم. بر این اساس:

$$Cr\{\xi \le r\} = \begin{cases} 0 & r \le a \\ \dfrac{r-a}{2(b-a)} & a \le r \le b \\ \dfrac{c-2b+r}{2(c-b)} & b \le r \le c \\ 1 & c \le r \end{cases} \qquad (۵\text{-}۲)$$

و

$$Cr\{\xi \ge r\} = \begin{cases} 1 & r \le a \\ \dfrac{2b-a-r}{2(b-a)} & a \le r \le b \\ \dfrac{c-r}{2(c-b)} & b \le r \le c \\ 0 & c \le r \end{cases} \qquad (۶\text{-}۲)$$

که نمایش نموداری اعتبار متغیر مثلثی فازی در شکل ذیل نشان داده شده است.



شکل ۱- نمایش اعتبار متغیر مثلثی فازی(گوپتا وهمکاران، ۲۰۱۴)

۳- مدلسازی تحقیق و روش اجرای پژوهش

روش اجرای پژوهش حاضر مبتنی بر ۴ گام اصلی می‌باشد. در گام اول اهداف و شاخص‌های مسئله بهینه‌سازی پرتفوی را براساس پیشینه پژوهش و ماهیت کابردی مسئله حاضر مورد بررسی و در نهایت ۴ شاخص اصلی انتخاب می‌گردد. سپس در مرحله دوم هر یک اهداف و محدودیت‌ها را در حالت عدم قطعیت و ابهام و بر اساس اصول تئوری اعتبار فازی برای حالتی که نرخ بازده مورد انتظار سهام بصورت عدد فازی مثلثی می‌باشد بدست می‌آید و در مرحله سوم یک مدل چندهدفه فازی مبتنی بر معیارهای انتخاب شده طراحی می‌کنیم و در نهایت روش فراابتکاری به‌کار گرفته شده برای حل مسئله تشریح می‌گردد.

۳-۱- مروری بر پیشینه اهداف به‌کار گرفته شده در مسئله بهینه سازی پرتفوی

تاکنون مدل‌های بسیاری درخصوص بهینه‌سازی پرتوی از زمان معرفی آن توسط محققین مختلف ارائه شده که هر کدام دارای خصوصیت‌هایی برای بهبود عملکرد پرتفوی انتخابی می‌باشند. در این بخش مهمترین اهداف در این زمینه بهینه‌سازی پرتفوی با استفاده از تئوری اعتبار فازی معرفی و نحوه محاسبه آن در جدول ۳-۱ ارائه می‌گردد. لازم به ذکر است معمولا سرمایه‌گذارن برای دستبابی به اهداف خود گشتاورهای فرد همانند میانگین و چولگی را بیشینه و گشتاورهای زوج همانند واریانس و کشیدگی را کمینه می‌نمایند.

جدول ۲- مقادیر اهداف در مسئله بهینه سازی فازی پرتفوی

معیار	منبع	اهداف در مسئله بهینه سازی فازی پرتفوی
میانگین	(لین و لیو، ۲۰۰۸)	$E\left[\xi\right] = \int_0^{+\infty} \mathrm{Cr}\left\{\xi \geq r\right\} dr - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{Cr}\left\{\xi \leq r\right\} dr$
واریانس	(کامدم و همکاران، ۲۰۱۲)	$V[\xi] = E[(\xi - e)^2] = \int_0^{+\infty} Cr\{(\xi - e)^2 \geq r\} dr$
نیمه واریانس	(کامدم و همکاران، ۲۰۱۲)	$V^S[\xi] = E[[(\xi - e)^-]^2] = \int_0^{+\infty} Cr\{[(\xi - e)^-]^2\} \geq r\} dr$
چولگی	(کامدم و همکاران، ۲۰۱۲)	$Sk[\xi] = E[(\xi - e)^3] = \int_0^{+\infty} Cr\{(\xi - e)^3 \geq r\} dr$
نیمه چولگی	(کامدم و همکاران، ۲۰۱۲)	$Sk^s[\xi] = E[[(\xi - e)^-]^3] = \int_0^{+\infty} Cr\{[(\xi - e)^-]^3\} \geq r\} dr$
کشیدگی	(کامدم و همکاران، ۲۰۱۲)	$K[\xi] = E[(\xi - e)^4] = \int_0^{+\infty} \mathrm{Cr}\{(\xi - e)^4 \geq r\} dr$
نیمه کشیدگی	(کامدم و همکاران، ۲۰۱۲)	$\mathrm{K^S}[\xi] = \mathrm{E}[[(\xi - \mathrm{e})^-]^4] = \int_0^{+\infty} \mathrm{Cr}\{[(\xi - \mathrm{e})^-]^4\} \geq \mathrm{r}\}\mathrm{dr}$
آنتریی	(هوانگ، ۲۰۰۸)	$\mathrm{H}[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{S}(\mathrm{Cr}\{\xi = \mathrm{r}\})\, dr$ $\mathrm{S}(t) = -\ln t - (1 - t)\ln(1 - t)$
ارزش در معرض خطر	(دوبوا و پرید،۱۹۸۸)	$VaR_{1-\beta} = \sup\{\lambda \mid \mathrm{Cr}\,(\mathcal{L} \geq \lambda) \geq \beta\}$

۳-۲- روش سنجش اهداف تحقیق، مبتنی بر تئوری اعتبار

در این بخش اهداف مورد استفاده در تحقیق معرفی و مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۳-۲-۱- ارزش مورد انتظار[۵۰] فازی

در ادبیات موضوع، روش‌های بسیاری برای تعریف ارزش مورد انتظار برای متغیرهای فازی وجود دارد، به عنوان مثال، کامپوس و گنزالس[۵۱](۱۹۸۹)، دوبوا و پراد[۵۲](۱۹۸۷)، هیلپرن[۵۳](۱۹۹۲) و یاگر[۵۴](۱۹۸۱) در این زمینه نظریه‌هایی ارائه نموده‌اند. کلی‌ترین تعریف ارزش مورد انتظار متغیر فازی توسط لیو و لیو(۲۰۰۸) ارائه شده است. این تعریف دارای مزیت‌هایی از نظر کاربردی بودن آن دارد، به عنوان مثال، علاوه بر قابل اجرا بودن برای متغیرهای فازی پیوسته، برای متغیرهای فازی گسسته نیز قابل اجرا می‌باشد.

تعریف ۱٫۳. (مقدار مورد انتظار). اگر ξ را یک متغیر فازی در نظر بگیرد، آنگاه مقدار مورد انتظار ξ توسط رابطه ذیل به شرطی که حداقل یکی از دو انتگرال محدود باشد تعریف می‌شود.

$$E\left[\xi\right] = \int_0^{+\infty} \mathrm{Cr}\left\{\xi \geq r\right\} dr - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{Cr}\left\{\xi \leq r\right\} dr \qquad (۱-۳)$$

اما با توجه به‌اینکه در تحقیق از اعداد فازی مثلثی استفاده می‌گردد، جهت سنجش ارزش مورد انتظار یک متغیر مثلثی فازی از قضیه ذیل استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱٫۳. اگر فرض کنیم $\xi = (a, b, c)$ به طوری که $a < b < c$ یک متغیر فازی مثلثی باشد آنگاه $E[\xi]$ توسط رابطه ذیل بدست می‌آید:

$$E\left[\xi\right] = \frac{a + 2b + c}{4} \qquad (۲-۳)$$

۳-۲-۲- نیمه‌کشیدگی[۵۵]

بعد دیگرمسائل بهینه‌سازی پرتفوی انتخاب معیار ریسک مناسب می‌باشد و معیارهای ریسک گوناگونی دراین زمینه ارائه شده است. پارامتر کشیدگی برای مقایسه توزیع تابع مورد نظر با توزیع جامعه نرمال به لحاظ کشیدگی(کوتاهی و بلندی توزیع) مورد استفاده قرار می‌گیرد. از طرفی با توجه به عدم تقارن و غیرنرمال بودن تابع توزیع دارایی‌ها، تابع دارای کشیدگی باشد و از نظرسرمایه‌گذاران قابل چشمپوشی نمی-باشد و آن‌ها به دنبال حدقل‌سازی کشیدگی تابع بازده هستند. اما با توجه اینکه بازده مثبت مطلوب آنها می‌باشد سرمایه‌گذاران فقط نوسانات قسمت نامطلوب از بازده را به عنوان شاخص ریسک در نظر می‌گیرند و به دنبال کمینه‌سازی رو به پایین کشیدگی تابع بازده می‌باشند، لذا انتخاب نیمه‌کشیدگی به جای کشیدگی مطلوبیت بیشتری برای آن‌ها به دنبال دارد. برای بدست آوردن نیمه‌کشیدگی با تعریف نیمه‌گشتاورهای آماری اقدام به محاسبه آن می‌پردازیم.

تعریف ۱٫۳. نیمه گشتاورهای آماری[۵۶] : اگر ξ را متغیر فازی با ارزش مورد انتظار محدود e در نظر بگیرید آنگاه متغیر $(\xi - e)^-$ را به صورت ذیل تعریف می‌کنیم(کامدم و همکاران، ۲۰۱۲):

$$(\xi - e)^- = \begin{cases} (\xi - e) & \text{اگر } \xi \leq e \\ 0 & \text{اگر } \xi \geq e \end{cases} \quad (۳-۳)$$

تعریف ۱٫۳. نیمه کشیدگی: اگر فرض کنیم $\xi = (a, b, c)$ به طوری که $a < b < c$ یک متغیر فازی مثلثی با ارزش مورد انتظار محدود $e = (a + 2b + c)/4$ باشد. آنگاه نیمه‌کشیدگی ξ توسط رابطه ذیل تعریف می‌شود(کامدم و همکاران، ۲۰۱۲):

$$\mathrm{K}^S[\xi] = E\left[\left[(\xi - e)^-\right]^4\right] = \int_0^{+\infty} Cr\left\{\left[(\xi - e)^-\right]^4\right\} \geq r\}dr. \quad (۴-۳)$$

در نتیجه با حل نمودن رابطه فوق نیمه‌کشیدگی متغیر فازی مثلثی $\xi = (a, b, c)$ برابر است با:

$$\mathrm{K}^S[\xi] = \frac{1}{10(b-a)}\left[(e-a)^5 + \frac{1}{(b-c)}(b-e)^5 Min\big(0, (b-e)\big)\right] \quad (۵-۳)$$

۳-۲-۳- ارزش در معرض خطر[۵۷] فازی

بر خلاف معیارهای سنتی همچون واریانس، انحراف معیار و MAD که هرگونه تغییری نسبت به بازدهی(یا درآمد) انتظاری را به عنوان ریسک قلمداد می‌کردند، شاخص‌های جدیدتر تنها نوسانات نامطلوب را به عنوان ریسک در نظر می‌گیرند. اما برخی شاخص‌ها به دنبال سنجش نوسانات نامطلوب هم نیستند، بلکه می‌سنجند که در بدترین شرایط چقدر در معرض خطر و یا زیان هستند. مفهوم ریسک دارای دو ویژگی زیان و احتمالی بودن آن است که VaR این ویژگی را بر خلاف معیارهای سنتی دارا می‌باشد و پس از معرفی آن در سال ۱۹۸۹ توسط جی پی مورگان[۵۸] بطوروسیعی در گزارشگری‌های مالی مورد استفاده قرار گرفته و به عنوان یک Risk Metric مورد پذیرش می‌باشد. به طور خلاصه ارزش در معرض خطر یک معیار آماری است که حداکثر زیان مورد انتظار از نگهداری یک دارایی یا پرتفوی را در دوره زمانی معین و با احتمال مشخص (سطح اطمینان معلوم) محاسبه و به صورت کمی گزارش می‌کند.

تعریف ۱٫۳. ارزش در معرض خطر فازی: فرض کنید $\mathcal{L}$ متغیری است که معرف بیشترین زیان سرمایه-گذاری در یک پرتفوی می‌باشد. بر اساس تعریف ارائه شده توسط دوبوا و پرید[۵۹](۱۹۸۸) ارزش در معرض خطر(VaR) متغیر $\mathcal{L}$ با سطح اطمینان(β - ۱) به صورت ذیل می‌باشد:

$$VaR_{1-\beta} = \sup\{\lambda | \mathrm{Cr}\ (\mathcal{L} \geq \lambda) \geq \beta\} \qquad (۶-۳)$$

که در آن $\beta \in (0,1)$ است.

معادله فوق نشان دهنده این است که بیشرین زیان $\mathcal{L} = -(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots. + x_n\xi_n)$ با سطح اطمینان $(1 - \beta)$ برابر λ می‌باشد.

۳-۲-۴- عدم قطعیت [۶۰]

یکی از مهمترین دغدغه‌های مدلسازی‌ها انطباق مدل های ریاضی با واقعیت می‌باشد. داده‌های دارای عدم قطعیت می‌توانند، در محدودیتها و یا تابع هدف باشند. اگر داده‌های ورودی در محدودیت‌ها مقداری غیر از مقدار اسمی خود بگیرند، ممکن است آن محدودیت نقض شود و یا حتی مسئله نشدنی شود و اگر داده‌های ورودی تابع هدف از مقدار اسمی خود خارج شوند نیز ممکن است مسئله از بهینگی خارج شود و یا حتی جواب بهینهٔ مسالهٔ اسمی دیگر موجه نباشد. برای در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترها، می‌توان از آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی تصادفی استفاده نمود. در آنالیز حساسیت، ابتدا عدم قطعیت به طور کلی نادیده گرفته می‌شود و بعد از حل مسئله با آنالیز حساسیت تاثیر عدم قطعیت داده‌ها در مسئله مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بهینه‌سازی تصادفی، فرض می‌شود که تابع توزیع پارامترهای ورودی داده شده است. اما نمی‌توان تابع توزیع قطعی پارامترهای دارای عدم قطعیت را بدست آورد. همچنین تغییر پارامترها ممکن است باعث به هم خوردن خصوصیت تحدب پیچیدگی محاسباتی مسئله گردد. این مشکلات باعث شد محققان روی روش-های بهینه‌سازی کار کنند که نسبت به عدم قطعیت مصون باشند.

عدم قطعیت اعداد فازی اولین بار توسط اناو پیزا[۶۱] (۲۰۰۴) معرفی گردید و توسط نگوین و گردون براون[۶۲](۲۰۱۲) در مسئله بهینه‌سازی پرتفوی به کار گرفته شد. در این روش از معیار اندازه‌گیری عدم اطمینانی استفاده می‌کنیم که تعمیم طبیعی از تابع هارتلی برای مجموعه‌های فازی می‌باشد. برای مجموعه‌های فازی عدم‌اطمینان عدد فازی A به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$U(A) = \int_0^1 log[1 + \mu(A^\alpha)] \qquad (۷-۳)$$

که A^α، برش α از اعداد فازی و تابع انتگرال لبگ[۶۳] در$\mu(A^\alpha)$ ، معیار اندازه‌گیری عدم قطعیت از A^α می-باشد.

اگر $A = (a, b, c)$ یک عدد فازی مثلثی باشد عدم قطعیت بدین صورت بیان می‌شود:

$$U(A) = [-\frac{1}{c-a}[(1 + c - a) - \alpha(c - a)].ln(1 + c - l) - \alpha]_0^1 \qquad (۸-۳)$$

در نتیجه با خلاصه‌سازی رابطه فوق داریم:

$$U(A) = -1 + \frac{1+c-a}{c-a}\, ln(1+c-a) \qquad (۹-۳)$$

عدم قطعیت $U(A)$ همیشه دارای یک ارزش مثبت است. اما بازده فازی پرتفوی یک مقدار قطعی نیست و در محدوده یک بازه از کران پایین تا کران بالا از بازده فازی قرار دارد. فاصله بزرگتر بازده پرتفوی مابین بدترین و بهترین مقادیر، شرایط عدم اطمینانی ایجاد می‌کند که برای سرمایه‌گذار مطلوب نمی‌باشد. بنابراین طبیعی است که عدم اطمینان از بازده فازی را به عنوان یک معیار ریسک جدید در بهینه‌سازی پرتفوی درنظر بگیریم.

۳-۳- تعاریف توابع هدف جهت تشکیل پرتفوی

در بخش قبل نحوه سنجش هر یک از اهداف مورد استفاده در تحقیق را برای یک تک دارائی با بازده فازی تشریح گردید. حال در این بخش نحوه سنجش هر یک از این اهداف را را با استفاده از نتایج بدست آمده از تئوری اعتبار برای حالت یک پرتفوی n تایی نشان می‌دهیم:

۳-۳-۱- ارزش مورد انتظار

فرض کنیم بازده تصادفی دارائی iام $\xi_i = (a_i,\ b_i,\ c_i)$ بصورت یک عدد فازی مثلثی بوده، بطوریکه $1 \leq i \leq n$ و بردار $X = (x_1, \dots, x_n)$ بردار وزن هردارائی در پرتفوی باشد. آنگاه بازده پرتفوی به صورت یک عدد فازی مثلثی برابر است با:

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_n \xi_n = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, a_i\,, \sum_{i=1}^{n} x_i\, b_i\,, \sum_{i=1}^{n} x_i\, c_i \right) \qquad (۱۰-۳)$$

با در نظر گرفتن رابطه ۳-۲ ارزش مورد انتظار آن به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$E[\xi(x)] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} (a_i + 2b_i + c_i) x_i \qquad (۱۱-۳)$$

۳-۳-۲- نیمه کشیدگی

با در نظر گرفتن بازده پرتفوی $\xi(x)$ در رابطه ۳-۱۰ و نیمه‌کشیدگی متغیر فازی مثلثی $\xi = (a, b, c)$ در رابطه ۳-۵، آنگاه نیمه‌کشیدگی بازده پرتفوی $\xi(x)$ برابر است با:

$$K^s[\xi] = \frac{1}{10\sum_{i=1}^{n} x_i\,(b_i - a_i)}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,(e_i - a_i)\right)^5 + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i\,(b_i - c_i)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,(b_i - e_i)\right)^5 Min\left(0,\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,(b_i - e_i)\right)\right)\right] \quad (۱۲-۳)$$

۳-۳-۳- ارزش در معرض خطر فازی

با در نظر گرفتن $\xi_i = (a_i,\ b_i,\ c_i)$ به عنوان بازده تصادفی یک دارائی بصورت یک اعدد فازی مثلثی و x_i به عنوان میزان سرمایه گذاری در آن دارائی برای انتخاب پرتفوی، اگرسطح معناداری ارزش در معرض خطر از ۰,۵ کمتر باشد، در این صورت سرمایه‌گذاران ریسک گریز می‌باشند و $VaR_{1-\beta}$ از فرمول زیر بدست می‌آید(وانگ و همکاران[۶۴]، ۲۰۱۱):

$$VaR_{1-\beta} = \sup\{\lambda|\mathrm{Cr}\,(\mathcal{L} \geq \lambda) \geq \beta\} = \mathrm{Min}\sum_{i=1}^{n} x_i\,[(2\beta - 1)a_i - 2\beta b_i\,] \quad (۱۳-۳)$$

در غیر این‌صورت سرمایه گذاران ریسک پذیر می‌باشند و از فرمول زیر استفاده می‌گردد:

$$VaR_{1-\beta} = \sup\{\lambda|\mathrm{Cr}\,(\mathcal{L} \geq \lambda) \geq \beta\} = \mathrm{Min}\sum_{i=1}^{n} x_i\,[(2\beta\ -\ 2)b_i - (2\beta\ - 1)\mathrm{c_i}] \quad (۱۴-۳)$$

باتوجه به این‌که سطح اطمینان معمولا ۱% یا ۵% می‌باشد بطور معمول از فرمول ۳-۱۳ جهت محاسبه ارزش در معرض فازی استفاده می‌گردد.

۳-۳-۴- عدم قطعیت

با در نظر گرفتن $a = \sum_{i=1}^{n} x_i\,a_i$ ، $b = \sum_{i=1}^{n} x_i\,b_i$ و $c = \sum_{i=1}^{n} x_i\,c_i$ به عنوان اعدد فازی مثلثی و با در نظر گرفتن بازده پرتفوی $\xi(x)$ در رابطه ۳-۱۰ و عدم قطعیت یک دارائی در رابطه ۳-۹، آنگاه عدم قطعیت فازی پرتفوی بدین صورت بیان می‌شود:

$$U(\xi(x)) = U_p = -1 + \frac{1 + c - a}{c - a}\,ln(1 + c - a) \quad (۱۵-۳)$$

۳-۴- مدل سازی پرتفوی مبتنی بر نظریه اعتبار

در این بخش مدل چند هدفه تحقیق شامل اهداف، محدودیت‌ها پارامترها و متغیرهای مدل بیان می‌گردد.

۳-۴-۱- مسئله تصمیم گیری

مدل فازی بهینه سازی چهار هدفه براساس تئوری اعتبار برای مسئله انتخاب پرتفوی به صورت ذیل فرموله می‌شود:

Problem

$$\text{Max } E(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots . + x_n\xi_n)$$
$$\text{Min } K^s(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots . + x_n\xi_n)$$
$$\text{Min } VaR_{1-\beta} = \sup\{\lambda \big| \mathrm{Cr}\left(\tilde{L}_t \ge \lambda\right) \ge \beta\}$$
$$\text{Min } U(A)$$

Subject to (۱۶-۳)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
$$x_i \le u_i y_i$$
$$x_i \ge l_i y_i$$
$$x_i \ge 0 \quad i = 1 \dots n$$
$$y_i \in \{0,1\}$$

بطوریکه u_i, l_i به ترتیب کران پایین و بالای درصد سرمایه گذاری در دارایی i-ام می باشند. همچنین متغیر کمکی y_i یک متیر باینری بوده و در صورتیکه دارایی i-ام در پرتفوی باشد مقدار یک و در غیر اینصورت مقدار صفر خواهد داشت. حالت غیر فازی سازی شده مدل تصمیم‌گیری جهت حل مدل:

Problem

$$\text{Max } \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(a_i + 2\mathrm{b}_i + \mathrm{c_i})x_i$$

$$\text{Min } \frac{1}{10\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} x_i\,(b_i - a_i)}\left[\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} x_i\,(e_i - a_i)\right)^5 + \frac{1}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} x_i\,(b_i - c_i)}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} x_i\,(b_i - e_i)\right)^5 Min\left(0,\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} x_i\,(b_i - e_i)\right)\right)\right] \quad (۱۷-۳)$$

$$\text{Min } \sum_{i=1}^{n} x_i\,[(2\beta - 1)a_i - 2\beta b_i]$$

$$\text{Min } U_p = U_p = -1 + \frac{1+c-a}{c-a}\, ln(1 + c - a)$$

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i\,a_i \;\;\&\;\; b = \sum_{i=1}^{n} x_i\,b_i \;\;\&\;\; c = \sum_{i=1}^{n} x_i\,c_i \;\;\&\;\; e_i = \frac{a_i+2b_i+c_i}{4}$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad x_i \le u_i y_i \qquad x_i \ge l_i y_i$$
$$x_i \ge 0 \qquad i = 1 \dots 10$$

۳-۴-۲- نمادهای مدل

x_i : میزان (نسبت از کل وجوه) سرمایه گذاری در دارایی i ام $\quad i = 1 \dots n$

ξ_i: بازده فازی سهام i ام

E: بازده مورد انتظار پرتفوی انتخابی

K^s: نیمه‌کشیدگی مورد انتظار مدل انتخابی

$(1 - \beta)$: ضریب اطمینان ارزش در معرض خطر

$VaR_{1-\beta}$: ارزش در معرض خطر مدل انتخابی تحت ضریب اطمینان $(1 - \beta)$

U: عدم قطعیت در مدل انتخابی

۳-۴-۳- محدویت های مدل

محدویت بودجه‌بندی سرمایه بر روی دارائی‌ها به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (۳-۱۸)$$

و نیز مجاز نبود فروش اسقراضی شود به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$x_i \geq 0 , i = 1,2,\dots,n \qquad (۳-۱۹)$$

همچنین میزان حداقل و حداکثر سرمایه گذاری که می‌تواند بر روی تک دارائی انجام پذیرد به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} & x_i \leq u_i y_i \quad , i = 1,2,\dots,n \\ & x_i \geq l_i y_i \quad , i = 1,2,\dots,n \quad , \end{aligned} \qquad (۳-۲۰)$$

۳-۵- روش حل مدل به صورت چند هدفه

۳-۵-۱- الگوریتم ژنتیک مبتنی بر رتبه بندی نامغلوب[۶۵] (NSGA-II)

اسرینیباس و دب[۶۶] (۱۹۹۵) روش بهینه‌سازی NSGA را برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه معرفی نمودند. نکات برجسته‌ای که در مورد این روش بهینه‌سازی وجود دارند، عبارتند از: جوابی که هیچ جواب دیگری، به طور قطع بهتر از آن نباشد، دارای امتیاز بیشتری است. جواب‌ها بر اساس این که چند جواب بهتر از آن‌ها وجود داشته باشند، رتبه بندی و مرتب می‌شوند. با توجه به حساسیت نسبتا زیادی که نحوه عملکرد و کیفیت جواب‌های الگوریتم NSGA به پارامترهای اشتراک برازندگی و سایر پارامترها دارند، نسخه دوم الگوریتم NSGA با نام NSGA-II توسط دب و همکاران[۶۷] (۲۰۰۰) معرفی گردید.

از ویژگی‌های عمده این الگوریتم تعریف فاصله تراکمی[۶۸] به عنوان ویژگی جایگزین برای شیوه‌هایی مانند اشتراک برازندگی و استفاده از عملگر انتخاب تورنومنت دو- دویی و ذخیره و آرشیو کردن جواب‌های نامغلوب که در مراحل قبلی الگوریتم به دست آمده‌اند(نخبه گرایی) می‌باشد.

مکانیزم کلی عملکرد الگوریتم NSGA-II به صورت ذیل می‌باشد:

گام اول: تولید جمعیت اولیه در این روش همانند معمول بر مبنای مقیاس و قیود مسئله

گام دوم : ارزیابی جمعیت تولید شده از دید توابع هدف تعریف شده.

گام سوم : اعمال روش مرتب سازی نامغلوب،

گام چهارم : محاسبه پارامتر کنترلی به نام فاصله جمعیت (Crowding Distance)

این پارامتر برای هر عضو در هر گروه محاسبه می شود و بیان گر اندازه ای از نزدیکی نمونه مورد نظر به دیگر اعضای جمعیت آن دسته و گروه می باشد.

گام پنجم : انتخاب جمعیت والدین برای تولید مثل یکی از مکانیزم های انتخاب مبتنی بر تورنمنت دوتایی میان دو عضو منتخب به طور تصادفی از میان جمعیت می باشد

گام ششم : انجام جهش و تقاطع

۴- یافته‌های پژوهش

در بکارگیری و تفسیر نتایج روش‌های حل چندهدفه می‌بایست توجه داشت که مسئله دارای جواب بهینه نخواهد بود بلکه در مسائل چندهدفه بهینگی، پارتو خواهد بود. یعنی جواب بهینه پارتو جوابی است که هیچ جواب دیگری بر آن غلبه نکند. بنابراین خروجی این مدل مجموعه‌ای از جواب‌های پارتو خواهد بود که سرمایه‌گذار می‌تواند بر اساس ترجیحات ذهنی خود یکی یا مجموعه ای از آنها را به عنوان استراتژی مناسب انتخاب نماید.

۴-۱- محاسبه بازده سهام شرکت ها درمحیط فازی

از آن‌جایی که محیط بورس، محیطی پر تلاتم و سرشار از عدم اطمینان می‌باشد لذا می‌بایست از داده‌های نزدیک به زمان حاضر برای طراحی مدل استفاده شود که تا حدامکان بر عدم اطمینان و تغییرات فائق آییم. لذا دوره زمانی تحقیق، ۵ سال در نظرگرفته شده است. در این پژوهش، برای محاسبه پارامترهای ورودی مسئله از مجموعه داده‌های روزانه سهام‌های ۱۰ شرکت بین المللی در شاخص "BBC Global 30" استفاده شده است. داده‌های مالی استخراج شده در محدوده زمانی از 1-Jan-2010 تا 30-Dec-2014 شامل ۱۲۵۹ نمونه مربوط به قیمت های سهام (بسته شدن، بالاترین، پایین‌ترین) هر شرکت، از پایگاه داده "Yahoo Finance" می‌باشد که از خروجی در نرم افزار Matlab بدست آمد. جهت فازی سازی اطلاعات به‌صورت مثلثی، به‌عنوان ورودی در الگوریتم‌های بهینه‌سازی فازی چند هدفه از رویکرد مبتنی بر قویترین t-norm (T_M)، نسبت به تعیین توابع عضویت مثلثی فازی بازده سهام شرکت‌ها به عنوان ورودی مدل

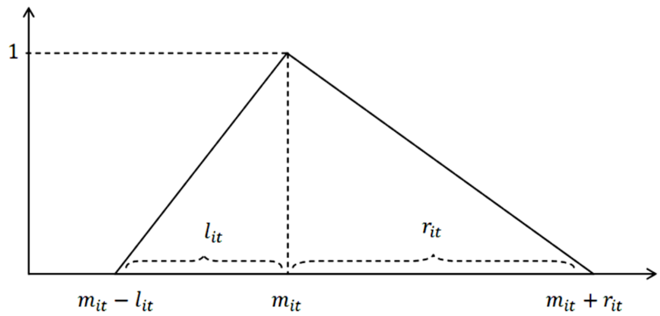
بهینه‌سازی پرتفوی اقدام نمودیم. در این رویکرد برای سهام i ام در زمان thام، قیمت بسته شدن به صورت ($price_{it}$)، پایین‌ترین قیمت به صورت(Low_price_{it}) و بالاترین قیمت به صورت $(High\_price_{it})$ نشان داده شده است. میانه، کرانه سمت چپ و کرانه سمت راست عدد فازی مثلثی (a_{it}, b_{it}, c_{it}) که بیان‌کننده بازده فازی سهام iام (شکل) در نقطه زمانی tام توسط فرمول زیر تعیین می‌شود:

$$a_{it} = m_{it} = \ln\frac{Low\_price_{it}}{price_{i(t-1)}}$$

$$b_{it} = m_{it} = \ln\frac{price_{it}}{price_{i(t-1)}} \qquad (۱-۴)$$

$$c_{it} = m_{it} + r_{it} = \ln\frac{High\_price_{it}}{price_{i(t-1)}}$$

که نمایش آن به‌صورت ذیل می‌باشد:



شکل ۲- مدلسازی بازده توسط اعداد فازی مثلثی

پس از مدل‌سازی بازده تمام سهام‌ها توسط متغیرهای مثلثی فازی توسط رابطه فوق، ما قادر به استخراج بازده مورد انتظار فازی برای هر سهام با استفاده از رابطه ذیل می‌باشیم.

$$(a_i, b_i, c_i) = \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_{it}\, , \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} b_{it}\, ,\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} c_{it}\ ,\right) \qquad (۲-۴)$$

در این رویکرد، بازده مورد انتظار سهام شرکت‌ها توسط رابطه فوق در نرم افزار Excel محاسبه و در جدول ذیل نشان داده شده است.

جدول ۳- بازده فازی روزانه مورد انتظار سهام شرکت¬ها مبتنی بر رویکرد Tm

سهام شرکت	شاخص	بازده فازی مثلثی
Apple Inc	AAPL	(-0.009652,0.000512,0.010060)
AT&T Inc	T	(-0.000142, -0.000140, 0.006367)
Berkshire Hathaway Inc. Class B	BRK-B	(0.002447, 0.002453, 0.008785)
E. I. du Pont de Nemours and Company	DD	(-0.000624, -0.000619,0.007691)
Exxon Mobil Corp	XOM	(-0.000238, -.000236, 0.006352)
General Electric Co.	GE	(-0.000402, -.000401, 0.008207)
Johnson & Johnson	JNJ	(-0.000394, -0.000388, 0.004928)
Procter & Gamble Co	PG	(-0.000330, -0.000329, 0.005187)
Southern Co	SO	(-0.000328, -0.000321, 0.005046)
Wal-Mart Stores Inc	WMT	(-0.000377, -0.000374, 0.005589)

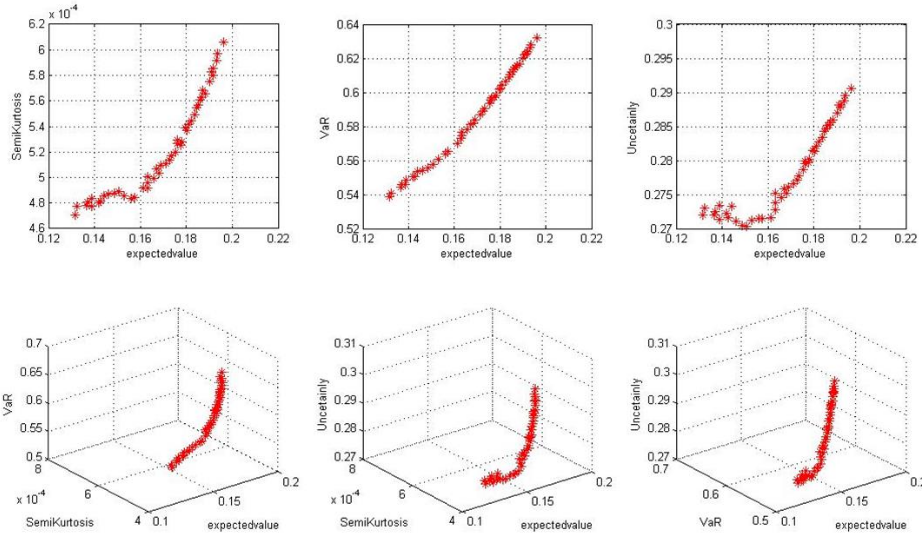
۴-۲- حل مدل به صورت چند هدفه

الگوریتم‌ها باید مجهز به پارامترهای قابل تنظیم باشند تا کاربر بتواند با تغییر آن پارامترها، تعادل مطلوب بین جواب بدست آمده و میزان محاسبات را برقرار نماید. همچنین تغییر در این پارامترها است که دستیابی به پاسخهای بهینه را ممکن می‌سازد. این پارامترها برای همه مسائل ثابت نمی‌باشند و باید پارامترهای سازگار با هر مسئله را برای الگوریتم‌ها یافت.

با در نظر گرفتن $\beta = 0.05$ برای سطح معناداری ارزش در معرض خطر و در نظر گرفتن بیشینه سرمایه ۰،۳۵ و کمینه سرمایه ۰،۰۳۵ بر روی دارائی ها به عنوان ورودی مسئله، الگوریتم بر اساس اندازه جمعیت تعریف شده ، ۲۰۰ پرتفوی را بعنوان کروموزوم تولید و فرآیند تکامل را تا ۱۰۰ نسل ادامه می‌دهد. همچنین برای برقراری دو محدودیت برای انتخاب نسبت وزنی سهام مورد استفاده در پرتفوی از تغییر متغیر x به w به صورت رابطه ذیل در نرم‌افزار Matlab استفاده می‌گردد، درنتیجه خروجی مدل به w تغییر می‌کند:

$$w = x/sum(x) \qquad (۴-۳)$$

جهت ارائه نتایج تحقیق با توجه به اینکه مسئله دارای یک معیار بیشینه‌سازی وسه معیار کمینه‌سازی می‌باشد. ابتدا ۳ نمودار حاصل از اجرای الگوریتم را بدین صورت که معیار بیشینه‌سازی با معیارهای کمینه‌سازی مقایسه گردد ترسیم می‌نمائیم، سپس ۳ نمودار دیگر را به صورتی که معیار بیشینه‌سازی نشان دهنده محور x باشد، با دو معیار کمینه‌سازی، در محورهای y و z دو به دو مقایسه می‌کنیم.



شکل ۳- جواب بهنیه حاصل از اجرای الگوریتم

با توجه به میزان جمعیت اولیه، در خروجی ۱۰۰ پرتفوی بهینه بدست می‌آید. سپس از بین این مجموعه پارتو مقادیر پرتفوی بهینه برخی مقادیر را به تصادف انتخاب و در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول ۳- مقادیر بهینه از پرتفوی به ازای برخی مقادیر از مجموعه پارتو

Wal-Mart Stores Inc	Southern Co.	Procter & Gamble Co.	Johnson & Johnson	General Electric Co.	Exxon Mobil Corp	du Pont de Nemours and Co	Berkshire Hathaway Inc.	AT&T Inc	Apple Inc	Front
8.2%	14.7%	14.7%	17.8%	3.9%	7.7%	4.0%	18.5%	6.6%	4.0%	10
12.7%	17.2%	16.8%	15.3%	3.8%	3.6%	3.9%	16.0%	7.1%	3.7%	30
11.7%	17.2%	16.1%	16.8%	3.9%	7.8%	3.7%	11.7%	7.6%	3.6%	50
12.7%	17.3%	16.9%	15.4%	3.8%	3.6%	3.9%	15.5%	7.2%	3.7%	70
11.9%	18.9%	16.3%	17.7%	4.3%	5.2%	4.2%	8.8%	8.8%	4.0%	90

ارزش توابع هدف مربوط به این مجموعه پارتو مقادیر پرتفوی بهینه انتخابی در جدول ذیل نشان داده شده است.

جدول ۴- مقادیر بهینه توابع هدف به ازای برخی مقادیر از مجموعه پارتو

Uncertainly	VaR	Semi Kurtosis	expected value		
0.2870	0.6202	0.0006	0.1900	10	جبهه‌های پارتو مربوط به حل چندهدفه
0.2844	0.6107	0.0006	0.1845	30	
0.2759	0.5814	0.0005	0.1671	50	
0.2799	0.5965	0.0005	0.1762	70	
0.2888	0.6265	0.0006	0.1932	90	

همچنین ارزش توابع هدف مربوط مجموعه پارتو مقادیر پرتفوی بهینه نیزدر جدول ذیل نشان می‌دهیم.

جدول ۵- مقادیر بهینه توابع هدف به ازای پرتفوی های پارتو

Uncertainly	VaR	Semi Kurtosis	expected value	شماره پرتفوی
0.2703	0.5577	0.0005	0.1507	1
0.2906	0.6321	0.0006	0.1962	2
.....	.....	.....	.....	….
0.2716	0.5504	0.0005	0.1426	99
0.2726	0.5458	0.0005	0.1371	100
0.2787	0.5870	0.0005	0.1688	Ave
0.2906	0.6321	0.0006	0.1962	Max
0.2703	0.5389	0.0005	0.1317	Min

۴-۳- مقایسه پرتفوی حاصله با پرتفوی تصادفی

در این بخش برای سنجش روایی مدل و جوابهای آن و برای مقایسه مابین پرتفوی تشکیل شده حاصل از پژوهش با پرتفوی تصادفی، تعداد ۱۰۰ پرتفوی با وزن‌های تصادفی در محیط متلب با استفاده از دستور rand(10,1) ایجاد نمودیم که برخی نتایج حاصل از آن در جدول ذیل نشان داده شده است. سپس این مقادیر تصادفی را در تمامی توابع هدف مسئله اصلی وارد نموده و میزان ارزش توابع هدف مربوط به این پرتفوی‌های تصادفی را بدست می‌آوریم.

جدول ۶- پرتفوی های تصادفی ایجاد شده در متلب

Wal-Mart Stores Inc	Southern Co.	Procter & Gamble Co.	Johnson & Johnson	General Electric Co.	Exxon Mobil Corp	du Pont de Nemours and Co	Berkshire Hathaway Inc.	AT&T Inc	Apple Inc	شماره پرتفوی
2.44%	10.14%	1.79%	22.81%	12.33%	18.91%	3.49%	20.92%	5.24%	1.92%	1
7.98%	14.81%	4.81%	7.40%	1.56%	16.08%	15.13%	14.34%	0.09%	17.80%	2
……	…...	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	....	...
11.25%	13.88%	14.28%	8.92%	8.88%	5.35%	7.80%	7.61%	8.50%	13.54%	99
3.55%	10.02%	10.63%	9.39%	14.96%	16.03%	5.99%	9.10%	13.86%	6.47%	100

جدول ۷- مقادیر بهینه توابع هدف به ازای پرتفوی های سهام تصادفی

Uncertainly	VaR	Semi Kurtosis	expected value	شماره پرتفوی
0.1826	0.2764	0.5422	0.0001	1
0.3489	0.5778	0.0016	0.1478	2
.....	.....	.....	.....	….
0.3275	0.5395	0.0011	0.1327	99
0.3035	0.5403	0.0007	0.1513	100
0.3614	0.6023	0.5422	0.1746	Max
0.1826	0.2764	0.0007	0.0001	Min

همانطوری که در نمودار و جداول فوق مشخص گردید، با توجه به اینکه معیار اول بیشنه‌سازی و سه معیار بعدی کمینه‌سازی می‌باشند، در خصوص معیار ارزش مورد انتظار پرتفوی پارتو بهینه، مقدار بیشینه آن به میزان ۰,۰۲۱۶ از مقدار بیشنه و مقدار کمینه ۰,۱۳۱۶ از مقدار کمینه پرتفوی‌های تصادفی بیشتر است و نیز فاصله این دو مقدار در پرتفوی پارتو کمتر می‌باشد. در نتیجه از نظر معیار مورد انتظار پرتفوی-های پارتو شرایط بسیار بهتری دارند. در خصوص معیار نیمه‌کشیدگی با توجه به این‌که این معبار می‌بایست کمینه گردد، حتی میزان بیشنه پرتفوی پارتو بهینه از میزان کمینه پرتفوی‌های تصادفی کمتر می‌باشد. در نتیجه از این معیار نیز کلیه پرتفوی پارتو از پرتفوی تصادفی بهتر می‌باشند. اما در خصوص معیار ارزش در معرض خطر تفاوت فاحشی مابین پرتفوی پارتو و پرتفوی تصادفی مشاهده نگردید و در نهایت از نظر معیار عدم قطعیت با توجه به این‌که این معبار می‌بایست کمینه گردد، مقدار بیشینه آن از مقدار بیشینه پرتفوی تصادفی کمتر و مقدار کمینه آن از مقدار کمینه پرتفوی تصادفی بیشتر می‌باشد اما فاصله مابین مقدار کمینه و بیشینه در پرتفوی پارتو ۰,۰۲۰۳ می‌باشد که در مقایسه با پرتفوی تصادفی به میزان ۰,۱۷۸۸ فاصله کم عدم قطعیت برای سرمایه‌گذاران مطلوبیت فراوانی دارد. با بررسی اجمالی موضوع و در نظر گرفتن

تنوع پرتفوی‌های پارتو و میزان اهداف بدست آمده می‌توان نتیجه گرفت که همیشه پرتفوی‌های تصادفی بدست آمده در سطح پایینتری از رضایت کلی اهداف مسئله می‌باشند.

۵- نتیجه گیری و بحث

انتخاب پرتفوی بهینه، یکی از مسایل مهم مورد بحث در گذشته و حال بوده و با پژوهش‌هایی که در این زمینه صورت گرفته، الگوهایی برای تعیین پرتفوی ارائه شده که به مرور زمان ایرادات هرکدام مشخص و الگویی دیگر، جایگزین آن گردیده است. بازده دارایی‌ها همواره با عدم اطمینان است و همواره در طی زمان نوسانات غیرمنتظره‌ای در بازدهی دارایی‌ها از جمله سهام روی می‌دهد. منطق فازی می‌تواند یکی از گزینه-های مناسب برای مدل کردن بازده دارایی‌ها باشد. اما بعد دیگر مسائل بهینه‌سازی پرتفوی ، انتخاب معیار ریسک مناسب می‌باشد. می‌توان با توجه به عدم تقارن و غیر نرمال بودن تابع توزیع دارایی‌ها به این نتیجه رسید که استفاده از گشتاورهای بالاتر می‌تواند به تولید پرتفوی‌های سرمایه‌گذاری بهتری منجر شود.

این مدل نسبت به مدل‌های ارائه شده در ادبیات تحقیق بدلیل اینکه از ترکیب متفاوت و متنوع‌تری از اهداف، نسبت به مسائل اشاره شده، همانند معیار عدم‌قطعیت در محیط فازی استفاده می‌کند، به‌خوبی می-تواند تغییرات لازم و اثرگذار بر پرتفوی را بیان نمایند.

برای مقایسه مابین پرتفوی‌های سهام تشکیل شده حاصل از پژوهش با پرتفوی‌های دیگر، پرتفوی‌های سهام تصادفی ایجاد نموده و به این نتیجه رسیدیم که مدل بدست آمده نسبت به مدل‌های تصادفی در سطح بالاتری از بعد رضایت اهداف دارد. در کل نتایج حاکی از کارایی بالای الگوریتم در حل مسئله بهینه سازی فازی می‌باشد. توانایی فوق‌العاده الگوریتم‌ها در بدست آوردن نقاط بهینه، این اطمینان خاطر را برای سرمایه‌گذار ایجاد می‌نماید که مسئله گرفتار دام نقاط بهینه محلی نگشته است و از سوی دیگر این تحقیق نشان داد که مسئله بهینه‌سازی با این تعداد متغیر را می‌توان به راحتی و در زمان کوتاهی حل نمود و به نتایج مورد نظر در خصوص انتخاب بهینه پرتفوی دست یافت.

هر تحقیقی در فرایند اجرا با محدودیت‌هایی روبرو می‌شود، در این تحقیق ما ۱۰ شرکت بین المللی در شاخص "BBC Global 30" را به عنوان نمونه انتخاب نمودیم و پرتفوی خود را از این شرکت‌ها تشکیل داده‌ایم، لذا در تعمیم نتایج این تحقیق به کل شاخص باید احتیاط نمود.

برای پژوهش های آتی پیشنهاد می‌گردد از سایر روشهای هوشمند، همانند سیستم‌های عصبی، ازدحام ذرات، رقابت استعماری و ترکیبی از آن‌ها که به روش‌های هیبریدی معروفند، برای این منظور استفاده شود و نتایج حاصله با هم مقایسه گردند. همچنین می‌توان محدودیت‌های دیگری از بازار واقعی، همچون هزینه معامله و محدودیت بودجه و همچنین فرض وجود فروش استقراضی در بازار به مدل اضافه نمود و اضافه نمودن معیارهای جدید از قبیل کمینه کردن هزینه تراکنش، حداکثر کردن معیار نقدشوندگی و همچنین محدودیت عدد صحیح می‌تواند کارآمدی مدل را افزایش دهد. با بکار بردن محدویت‌هایی مانند حداقل میزان

سرمایه‌گذاری در هر سهم، حداکثر میزان سرمایه‌گذاری در هر سهم، محدودیت حداکثر تعداد سهام موجود در سبد اوراق بهادار و ... مدل به فضای واقعی نزدیکتر گردد.

فهرست منابع

* بهینه- برای میانگین-آنتروپی- چولگی مبنای بر مدلی .(۱۳۹۳)، ارائه‌بختیاری، مصطفی بهزادی، عادل تابستان ۱۳۹۳، شماره مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، :فازی، مجله محیط در سهام سازی سبد ، صص ۵۶-۱۹.۳۹
* و VaR راعی، رضا. فلاحپور، سعید. (۱۳۹۰)، "طراحی مدلی برای مدیریت فعال پرتفوی با استفاده از الگوریتم ژنتیک "، بررسی‌های حسابداری و حسابرسی، دوره ۱۸ ، شماره ۶۴، صص ۱۹-۳.
* کاربرد الگوریتم ژنتیک در انتخاب یک عبدالعلی زاده شهیر، سیمین؛ عشقی، کوروش. (۱۳۸۲)" مجموعه دارایی از سهام بورس اوراق بهادار، فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران، شمارهٔ ۱۷، زمستان، ص ۱۷۵.
* محسن شاه‌محمدی، لیلی امامی میبدی، یحیی زارع مهرجردی،(۱۳۹۱)، ارائه الگوریتم هوشمند ترکیبی بر پایه مدل فازی میانگین- واریانس- چولگی برای انتخاب پرتفولیو، نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید، سال چهارم، شماره ۲۳ ، صص۴۵۸-۴۴۸
* Anagnostopoulos, K. & Mamanis, G. (2009). Multiobjective evolutionary lgorithms for complex portfolio optimization problems. Springer-Verlag,8(3): 259-279.
* Bellman,R.E., & Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. Management science, 17(4), B-141.
* Bhattacharyya, R., Hossain, S. A., & Kar, S. (2014). Fuzzy cross-entropy, mean, variance, skewness models for portfolio selection. Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences, 26(1), 79-87.
* Campos, L., & Verdegay, J. L. (1989). Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers. Fuzzy sets and systems, 32(1), 1-11.
* Carlsson, C., Fullér, R., & Majlender, P. (2002). A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score. Fuzzy sets and systems,131(1), 13-21.
* Chang, T, G., Yang, S, C., Chang, K.G., (2009), “portfolio optimization problem different risk measure using genetic algorithm”, Expert system with application, 36, PP. 10529-10537.
* Chen, L. H., & Huang, L. (2009). Portfolio optimization of equity mutual funds with fuzzy return rates and risks. Expert Systems with Applications, 36(2), 3720-3727.
* Chen, L. & Pan, H. (2013). “Selection of stocks using constrained fuzzy AHP and PROMETHEE”. Advances in information Sciences and Service Sciences (AISS), 5(15), 97-103.
* Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., & Meyarivan, T. (2000). A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II.Lecture notes in computer science, 1917, 849-858.
* Dubois, D., & Prade, H. (1987). The mean value of a fuzzy number. Fuzzy sets and systems, 24(3), 279-300.

* Dubois, D., & Prade, H. (1988). possibility theory: Approach to computerized processing of uncertainty, plennm N. 4.
* Enea, M., & Piazza, T. (2004). Project selection by constrained fuzzy AHP.Fuzzy Optimization and Decision Making, 3(1), 39-62.
* Fang, Y., Lai, K. K., & Wang, S. Y. (2006). Portfolio rebalancing model with transaction costs based on fuzzy decision theory. European Journal of Operational Research, 175(2), 879-893.
* Giove, S., Funari, S., & Nardelli, C. (2006). An interval portfolio selection problem based on regret function. European Journal of Operational Research, 170(1), 253-264.
* Gupta, P., Inuiguchi, M., Mehlawat, M. K., & Mittal, G. (2013). Multiobjective credibilistic portfolio selection model with fuzzy chance-constraints.Information Sciences, 229, 1-17.
* Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014). Fuzzy Portfolio Optimization. Springer-Verlag, Berlin.
* Hao, f. f.,&Liu, Y. K. (2009). Mean-variance model for portfolio selection whit fuzzy random return. Journal of Applied Mathematics and Computing,30(1-2), 9-38.
* Hasuike, T., Katagiri, H., & Ishii, H. (2007, July). Portfolio selection problems with random fuzzy variable returns. In Fuzzy Systems Conference, 2007. FUZZ-IEEE 2007. IEEE International (pp. 1-6). IEEE.
* Heilpern, S. (1992). The expected value of a fuzzy number. Fuzzy sets and Systems, 47(1), 81-86.
* Huang, X. (2007). A new perspective for optimal portfolio selection with random fuzzy returns. Information Sciences, 177(23), 5404-5414.
* Huang, X. (2008). Mean-entropy models for fuzzy portfolio selection. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 16(4), 1096-1101.
* Ida, M. (2004). Solutions for the portfolio selection problem with interval and fuzzy coefficients. Reliable Computing, 10(5), 389-400.
* Inuiguchi, M., & Tanino, T. (2000). Portfolio selection under independent possibilistic information. Fuzzy sets and systems, 115(1), 83-92.
* Jana, P., Roy, T. K., & Mazumder, S. K. (2009). Multi-objective possibilistic model for portfolio selection with transaction cost. Journal of Computational and Applied Mathematics, 228(1), 188-196.
* Kamdem, J. S., Deffo, C. T., & Fono, L. A. (2012). Moments and semi-moments for fuzzy portfolio selection. Insurance: Mathematics and Economics, 51(3), 517-530.
* Kiris, S. &Ustun, o. (2010). Fuzzy MCDM Approach of Stocks Evaluation and Portfolio Selection, 24th Mini EURo International Conefernce, June 23-26, Izmir, Turkey. PP.330-336.
* Kung, J. Y., Chuang, T. N., & Ky, C. M. (2011, June). A fuzzy MCDM method to select the best company based on financial report analysis. InFuzzy Systems (FUZZ), 2011 IEEE International Conference on (pp. 2013-2017). IEEE.
* Kwakernaak, H. (1978). Fuzzy random variables-I. Definitions and theorems. Information Sciences, 15(1), 1-29.
* Lai, K. K., Wang, S. Y., Xu, J. P., Zhu, S. S., & Fang, Y. (2002). A class of linear interval programming problems and its application to portfolio selection. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10(6), 698-704.
* Li, J., & Xu, J. (2009). A novel portfolio selection model in a hybrid uncertain environment. Omega, 37(2), 439-449.
* Li, X., Qin, Z., & Kar, S. (2010). Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns. European Journal of Operational Research, 202(1), 239-247.

* Li, Y., Wang, B., & Watada, J. (2011, June). Building a fuzzy multi-objective portfolio selection model with distinct risk measurements. In Fuzzy Systems (FUZZ), 2011 IEEE International Conference on (pp. 1096-1102). IEEE.
* Lin, C. C., & Liu, Y. T. (2008). Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots. European Journal of Operational Research, 185(1), 393-404.
* Liu, B., & Liu, Y. K. (2002). Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, 10(4), 445-450.
* Liu, S. Y. W. S., Wang, S. Y., & Qiu, W. 2. (2003). Mean-variance-skewness model for portfolio selection with transaction costs. International Journal of Systems Science, 34(4), 255-262.
* Liu, B. D. (2004). Uncertain theory: An introduction to its axiomatic foundation. Berlin: Springer-Verlag.
* Markowitz, H. (1952). Portfolio selection*. The journal of finance, 7(1), 77-91.
* Mishra, S. K., Panda, G., & Meher, S. (2009, December). Multi-objective particle swarm optimization approach to portfolio optimization. In Nature & Biologically Inspired Computing, 2009. NaBIC 2009. World Congress on (pp. 1612-1615). IEEE.
* Nguyen, T. T., & Gordon-Brown, L. (2012). Constrained fuzzy hierarchical analysis for portfolio selection under higher moments. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, 20(4), 666-682.
* Parra, M. A., Terol, A. B., & Urıa, M. R. (2001). A fuzzy goal programming approach to portfolio selection. European Journal of Operational Research,133(2), 287-297.
* Prakash, A. J., Chang, C. H., & Pactwa, T. E. (2003). Selecting a portfolio with skewness: Recent evidence from US, European, and Latin American equity markets. Journal of Banking & Finance, 27(7), 1375-1390.
* Puri, M. L., & Ralescu, D. A. (1986). Fuzzy random variables. Journal of mathematical analysis and applications, 114(2), 409-422.
* Tanaka, H., & Guo, P. (1999). Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions. European Journal of Operational Research, 114(1), 115-126.
* Tanaka, H., Guo, P., & Türksen, I. B. (2000). Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions. Fuzzy sets and systems,111(3), 387-397.
* Samuelson, P. A. (1970). The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments. The Review of Economic Studies, 537-542.
* Srinivas, N., & Deb, K. (1995). Comparative study of vector evaluated GA and NSGA applied to multiobjective optimization. In Proceedings of the Symposium on Genetic Algorithms (pp. 83-90).
* Tiryaki, F., & Ahlatcioglu, B. (2009). Fuzzy portfolio selection using fuzzy analytic hierarchy process. Information Sciences, 179(1), 53-69.
* Vercher, E., Bermúdez, J. D., & Segura, J. V. (2007). Fuzzy portfolio optimization under downside risk measures. Fuzzy sets and systems,158(7), 769-782
* Wang, B., Wang, S., & Watada, J. (2011). Fuzzy-portfolio-selection models with value-at-risk. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 19(4), 758-769.
* Watada, J. (2001). Fuzzy portfolio model for decision making in investment. In Dynamical aspects in fuzzy decision making (pp. 141-162). Physica-Verlag HD.
* Yager, R. R. (1981). A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval.Information sciences, 24(2), 143-161.
* Zadeh, L. A. (1987). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy sets and applications: selected papers by LA Zadeh.
* Zimmermann, H. J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. Fuzzy sets and systems, 1(1), 45-55.

یادداشت‌ها

[1]. Markowitz
[2]. Mean variance optimization
[3]. Liu et all
[4]. Prakash et all
[5]. Samuelson
[6]. Tiryaki & Ahlatcioglu
[7]. Kiris & Ustun
[8]. Kung et all
[9]. Chen, L. & Pan
[10]. Multi-objective Particle Swarm Optimization
[11]. Pareto Envelope-based Selection Algorithm
[12]. Multi-objective Evolutionary Algorithm based on Decomposition
[13]. Mishra et all
[14]. Shortest Path Faster
[15]. Li et all
[16]. Improved Particle Swarm Optimization Algorithm
[17]. Genetic Algorithm
[18]. Simulated Annealing
[19]. Zadeh
[20]. Dubois & Prade
[21]. Inuiguchi & Tanino
[22]. Jana et all
[23]. Goal programming
[24]. Ida
[25]. Giove
[26]. Fang et all
[27]. Self-Dual
[28]. Gupta et all
[29]. Bhattacharyya et all
[30]. Fuzzy triangular numbers
[31]. Parra rt all
[32]. Tanaka & Guo
[33]. Vercher et all
[34]. Tanaka et all
[35]. Watada
[36]. Carlsson et all
[37]. Huang
[38]. Hao & lin
[39]. Chang et all
[40]. Chen & Huang
[41]. Hasuike et all
[42]. Li & Xu
[43]. Anagnostopoulos & Mamanis
[44]. Kamdem et all
[45]. Nguyen et all
[46]. Liu & Liu
[47]. Liu
[48]. Possibility
[49]. Necessity
[50]. Expected value
[51]. Campos & Gonzalez
[52]. Dubois & Prade
[53]. Heilpern

[54]. Yager
[55]. Semi-Kurtosis
[56]. Semi-moment
[57]. Value at Risk
[58]. J.P.Morgan
[59]. Dubois & Prade
[60]. Uncertainty
[61]. Enea & Piazza
[62]. Nguyen & Gordon-Brown
[63]. Lebesgue
[64]. Wang et all
[65]. Non dominated sorting genetic algorithm
[66]. Srinivas & Deb
[67]. Deb et all
[68]. Crowding Distance