مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره یازدهم / تابستان ۱۳۹۱

# توزیع هذلولوی تعمیم یافته و کاربرد آن در ریاضیات مالی

رضا پورطاهری[۱]
محمد کریمی خرمی[۲]

تاریخ دریافت: ۹۰/۱۲/۱۷ تاریخ پذیرش: ۹۱/۴/۲

## چکیده

در دهه‌ی هفتاد مدل بلک شولز نقش عمده‌ای در قیمت‌گذاری مشتقات مالی داشت. اما بعدها به دلیل ضعف عمده‌ی آن، مدل‌های متنوع دیگری ارائه شد. خانواده فرایندهای لوی یکی از متداول‌ترین مدل‌ها است که برای قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرایند هذلولوی تعمیم یافته از جمله‌ی این فرایندها است که مبتنی بر توزیع هذلولوی تعمیم یافته می‌باشد. در این مقاله ابتدا به معرفی این توزیع می‌پردازیم و سپس آن را به داده‌های قیمت سهام در ایران برازش می‌دهیم.

**واژه‌های کلیدی:** توزیع هذلولی، ریاضیات مالی، قیمت‌گذاری مشتقات مالی.

۱- دانشکده اقتصاد، گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی
۲- دانشکده اقتصاد، گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی

**۱- مقدمه**

قیمت‌گذاری اوراق مشتقه از مباحث اساسی مطرح در ریاضیات مالی است و متخصصان زیادی در این زمینه فعالیت می‌کنند. یکی از حیطه‌های فعالیت آنان تعیین یا برازش مدل برای قیمت اختیارات است. از آنجا که اختیار معامله بر روی دارایی تعریف می‌شود پس قیمت اختیار از قیمت آن دارایی خاص منتج می‌شود. پس لازمه‌ی قیمت‌گذاری اختیار، قیمت‌گذاری دارایی پایه‌ی آن است. دارایی پایه در این مقاله، سهام در نظر گرفته شده است، که یکی از پر کاربردترین دارایی‌های پایه است. اولین مدل در زمینه‌ی قیمت‌گذاری دارایی در سال ۱۹۰۰ توسط بشلیه[۱] ارائه شد. وی قیمت سهام را به عنوان حرکت براونی با رانش معرفی کرد. مهم‌ترین اشکال این مدل، امکان بروز قیمت منفی بود. حرکت براونی یکی از شناخته شده‌ترین انواع فرایندهای لوی است. به طور ضمنی این مدل نشان دهنده‌ی کاربرد فرایندهای لوی در ریاضیات مالی از زمان‌های قدیم است. آزبورن در سال ۱۹۵۹ [۱۹] مدل بشلیه را با در نظر گرفتن فرایند براونی هندسی یعنی $e^{B_t}$ به عنوان مدل قیمت‌گذاری سهام بهبود بخشید. او این روش را با یک بحث روانشناسانه که پایه‌ی آن قانون‌وبر-فچنر بود، توجیه کرد. وی بیان کرد که مشاهدات نشان می‌دهد شدت تحریک از مقیاس خطی پیروی نکرده و بیشتر از مقیاس لگاریتمی تبعیت می‌کند. به طور اصولی‌تر ساموئلسن فرایند $e^{B_t}$ را به عنوان مدل قیمت‌گذاری سهام در سال۱۹۶۵ [۲۴] مطرح نمود. مندلبروت [۱۷] با جایگزینی حرکت براونی $e^{B_t}$ با یک فرایند لوی α- پایدار متقارن با α<2، اولین مدل پرش محض را ارائه کرد. در ادامه پرس [۲۲] و مادان و سناتا [۱۶]نیز با ارائه‌ی مدل‌هایی به رفع نواقص مدل‌های پرش محض پرداختند. در سال ۱۹۷۳ مقاله‌ای توسط فیشر بلک و میرون شولز [۱۰] منتشر شد که چند ماه بعد توسط رابرت مرتون تکمیل شد. این مقاله به بیان مدل بلک شولز پرداخته بود. که مدلی پرش محض نیست اما تحولی شگرف در دنیای ریاضیات مالی ایجاد کرده است. در اینجا جهان بازارهای مالی تغییر یافت و نقطه‌ی شروعی برای رشد نمایی بازارهای مشتقات ایجاد شد. در مدل بلک شولز لگاریتم بازده دارای توزیع نرمال، نوسان‌پذیری ثابت و نرخ بهره نیز ثابت معینی است. تجزیه و تحلیل‌های آماری قیمت سهام نشان داد که نوسان‌پذیری با گذشت زمان به طور تصادفی تغییر می‌کند. بنابراین مدل‌هایی برای اصلاح این مفروضات مطرح شد. مدل‌های با نوسان پذیری تصادفی، مدل‌هایی با نرخ بهره تصادفی و مدل‌های GARCH از این قبیل‌اند. بررسی‌ها نشان داد که بازار واقعی چند ویژگی داردکه مدل بلک شولز فاقد آنها است:

۱- مدل بایستی توانایی نشان دادن پرش‌های تصادفی بزرگ را داشته باشد (مسیرهای قیمت سهام به دست آمده از مدل بلک شولز پیوسته است).

۲- توزیع لگاریتم بازده باید کشیده‌تر باشد.

۳- توزیع لگاریتم بازده باید چوله و غیر متقارن باشد.

۴- توزیع لگاریتم بازده باید دم‌های سنگین‌تری داشته باشد.

همان‌طور که در ادامه به تفصیل بیان خواهد شد، مدل هذلولوی تعمیم‌یافته تا حدودی توانسته این نواقص را برطرف سازد.

در سال ۱۹۷۷ بارندورف نیلسن[۲] توزیع هذلولوی را معرفی کرد. انگیزه‌ی او از ارائه این توزیع، یافتن توزیع مناسب برای داده‌های تجربی در زمینه‌ی زمین‌شناسی بود. او در پروژه‌ای به منظور مدل بندی توزیع اندازه دانه‌های شن، برای اولین بار این توزیع را ارائه کرد. نام هذلولوی برگرفته از این حقیقت می‌باشد که لگاریتم چگالی این توزیع، یک تابع هذلولوی است که این نقطه مقابل توزیع نرمال است. زیرا لگاریتم چگالی توزیع نرمال سهمی می‌باشد. علاوه بر کاربرد بالا، این توزیع را در زمینه‌های مختلف دیگر از جمله تئوری اغتشاشات (بارندورف نیلسن[۲])، ریاضیات مالی (پراوز [۲۰]) و فیزیک آماری به کار برده‌اند. در سال ۱۹۹۵ ابرلین و کلر [۹]یک مدل قیمت‌گذاری دارایی را معرفی کردند که فرض اصلی آن، این بود که لگاریتم بازده‌ها دارای توزیع هذلولوی هستند. آن‌ها این مدل را به قیمت‌های سهام آلمانی NYSE برازش دادند و مشاهده کردند این مدل برازش مناسب‌تری به داده‌ها دارد. ابرلین، کلر و پراوز در سال ۱۹۹۸ [۱۰]پارامترهای تخمین زده شده برای سهام NYSE را برای پیش‌بینی قیمت اختیار به کار بردند. پس از مدتی در همان سال ابرلین و پراوز توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته را برای لگاریتم بازده‌ها جایگزین توزیع هذلولوی کردند. در سال ۲۰۰۳، اسکوتنز[۲۵] توزیع هذلولوی تعمیم یافته را به داده‌های واقعی بازار برازش دادند. در این مقاله پس از معرفی توزیع و فرایند هذلولوی تعمیم‌یافته، مدل هذلولوی تعمیم‌یافته به عنوان مدلی برای قیمت‌گذاری دارایی ارائه می‌شود. پس از آن مدل به داده‌های بازار واقعی برازش داده میشود. داده‌های در نظر گرفته‌شده لگاریم بازده قیمت‌های هشت سهام است که در بورس اوراق بهادار تهران معامله می‌شوند که اطلاعات آنها به همراه بازه زمانی هریک را در جدول یک آورده‌ایم. با استفاده از روش ماکزیمم درستنمایی پارامترهای مدل تخمین زده شده و سپس با استفاده از آزمون نیکویی برازش کای دو، مناسب بودن مدل فوق برای داده‌ها را مورد بررسی می‌کنیم.

## ۲- مبانی نظری تحقیق

### ۲-۱- توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته

توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته (GH) نخستین بار توسط بارندورف نیلسن در ۱۹۷۷ به عنوان الگویی برای توزیع اندازه‌ی ذرات شن ناشی از وزش باد به کار رفت. چگالی توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته به‌صورت زیر است:

$$f_{GH}(x)=a(\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu)(\delta^2+(x-\mu)^2)^{(\lambda-\frac{1}{2})/2}e^{\beta(x-\mu)}\times K_{\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}) \qquad (۱-۲)$$

که در آن $x\in R$،

$$a(\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu)=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda-\frac{1}{2}}\delta^{\lambda}K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}. \qquad (۲-۲)$$

و $k_{\vartheta}(x)$ تابع بسل تعدیل‌شده از نوع سوم از مرتبه $\vartheta$ است که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند[۲۰]:

$$K_{\vartheta}(z)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}y^{\vartheta-1}\exp(-\frac{1}{2}z(y+y^{-1}))dy$$

دامنه‌ی پارامترهای توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته به صورت زیر است:

$$\lambda,\mu\in R\ \ \delta,\alpha>0\ \alpha^2>\beta^2$$

پارامترهای این توزیع دارای معانی خاصی می‌باشند: $\lambda$ پارامتری است که با آن شکل توزیع مشخص می‌شود. برای عدد ثابت $\lambda$، $\alpha$ سنگینی دم‌ها را تعیین می‌کند. $\beta$ پارامتر چولگی و $\delta$ پارامتر مقیاس می باشد. $\mu$ نیز پارامتر مکان است. اگر $\beta=0$، آنگاه توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته متقارن نامیده می‌شود.

تابع مولد گشتاور توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته عبارت است از:

$$M_{GH}(u)=e^{u\mu}\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-(\beta+u)^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\frac{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2-(\beta+u)^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})} \qquad (۳-۲)$$

که در آن $|\beta+u|<\alpha$.

با استفاده از تعریف تابع مشخصه و تابع مولد گشتاور به‌دست آمده در بالا روشن است که تابع مشخصه توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته عبارت است از

$$\varphi_{GH}(u)=M_{GH}(iu).$$

هم‌چنین اگر X متغیری تصادفی با توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته باشد، آنگاه میانگین و واریانس آن به شرح زیر است:

$$E[X]=\mu+\frac{\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\frac{K_{\lambda+1}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}$$

$$Var[X]=\delta^2(\frac{K_{\lambda+1}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}+\frac{\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{K_{\lambda+2}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}-\left(\frac{K_{\lambda+1}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}\right)^2\right]$$

توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته حالت‌های خاصی نیز دارد:

i-**توزیع هذلولوی**: اگر در رابطه (۲-۱)، ۱=λ جایگذاری شود آنگاه آن رابطه به توزیع هذلولوی(H) تبدیل می‌شود و چهار پارامتر دارد.

$$f_H(x)=\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}\exp(\beta(x-\mu)-\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})$$

ii- **توزیع گاوسی معکوس نرمال:** رابطه‌ی (۲-۱) به ازای $\lambda=-\frac{1}{2}$، چگالی توزیع گاوسی معکوس نرمال (NIG) را ارائه می‌کند:

$$f_{NIG}(x)=\frac{\alpha}{\pi}\exp(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(x-\mu))\frac{\delta K_1(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}$$

## ۲-۲- فرایند لوی هذلولوی تعمیم‌یافته

فرایند لوی هذلولوی تعمیم‌یافته یک فرایند پرش- محض است. به طور کلی فرایندهای لوی منجر به مدل‌هایی می‌شوند که با بازارهای واقعی سازگارتر هستند و دارای دو رده پرش- انتشار و پرش- محض هستند. فرایندهای پرش- انتشار فرایندهایی هستند که در هر بازه‌ی زمانی متناهی تعداد متناهی پرش دارند. این فرایندها در سال ۱۹۷۶ برای نخستین بار توسط مرتون[۱۸] و بعد در سال ۲۰۰۲ توسط کو [۱۵]معرفی شدند. فرایندهای لوی با تعداد نامتناهی پرش در هر بازه‌ی زمانی متناهی فرایندهای پرش- محض نام دارند. فرایند گاوسی معکوس نرمال توسط ابرلین و کلر در ۱۹۹۵ [۹]و بارندورف نیلسن در ۱۹۹۸ [۳] و فرایندهای هذلولوی تعمیم‌یافته در ۱۹۹۸ به وسیله ابرلین، کلر و پراوز [۱۰] معرفی شدند، که در رده‌ی فرایندهای پرش- محض هستند.

برای ساختن فرایندهای لوی راه‌های متنوعی وجود دارد. قضیه‌ی زیر یکی از این راه‌ها را نشان می‌دهد.

**قضیه ۳-۱:** اگر $Z=(Z(t))_{t\geq 0}$ یک فرایند لوی باشد آنگاه توزیع $Z(t)$ برای هر $t \geq 0$ تقسیم‌پذیر نامتناهی است. هم‌چنین اگر F یک توزیع تقسیم‌پذیر نامتناهی باشد آنگاه یک فرایند لوی $Z=(Z(t))_{t\geq 0}$ وجود دارد به گونه‌ای که توزیع $Z(1)$، F است.

**برهان ۳-۱** : به [5]مراجعه شود.

بنابر قضیه‌ی فوق هر توزیع احتمال تقسیم‌پذیر نامتناهی را می‌توان به عنوان توزیع $Z(1)$ یک فرایند لوی $Z=(Z(t))_{t\geq 0}$ محسوب کرد. دکتر آنتونی پاپانتلن در کنفرانسی در ماه مارس سال ۲۰۰۸ در آتن از محاسن استفاده از این روش را آسان بودن تخمین پارامتر و شبیه‌سازی فرایند بیان کرده است.

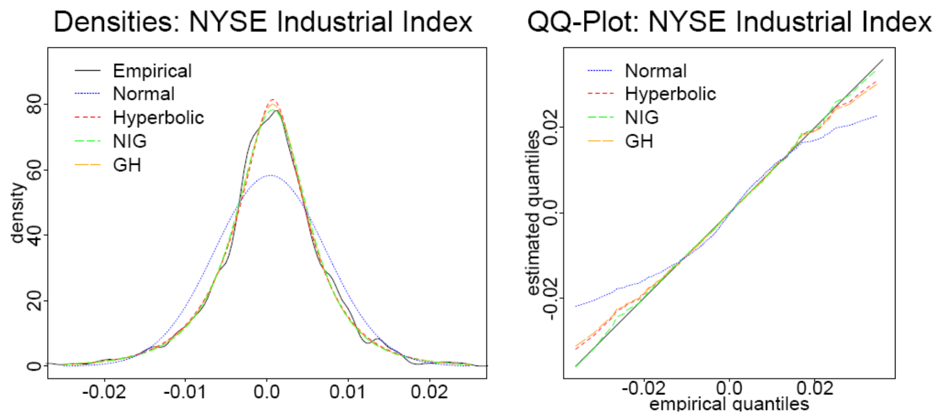
باردورف نیلسن و هالگرین در سال ۱۹۷۷ [۴] تقسیم‌پذیر نامتناهی بودن توزیع هذلولوی و توزیع گاوسی معکوس تعمیم‌یافته را به اثبات رساندند و پراوز در ۱۹۹۹ [۲۰] نشان داد که توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته نیز تقسیم‌پذیر نامتناهی است.

بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۳-۱ فرایند لوی وجود دارد، که نموهای به طول یک آن از توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته تبعیت می‌کند. این فرایند، فرایند لوی هذلولوی تعمیم‌یافته نامیده می‌شود.

فرض کنید $(Z_t)$ فرایند لوی باشد به طوری که چگالی توزیع متغیر $Z_1$ به صورت (۲-۱) است. در این صورت نموهای با طول دلخواه آن از توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته تبعیت نمی‌کنند، که این موضوع نتیجه‌ای مستقیم از تابع مشخصه‌ی این توزیع و این حقیقت است که تابع مشخصه‌ی توزیع نمو با طول t از رابطه‌ی $(\varphi)^t$ به دست می‌آید که $\varphi$ تابع مشخصه توزیع $Z_1$ است. در حقیقت تابع مشخصه‌ی پیچش مرتبه‌ی t ام توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته دیگر به صورت یک تابع مشخصه توزیع هذلولوی تعمیم یافته نمی‌باشد [۲].

## ۳-۲- مدل هذلولوی تعمیم‌یافته برای قیمت‌گذاری دارایی

در سال ۱۹۹۵ ابرلین وکلر [۹]یک مدل جدید برای قیمت‌گذاری دارایی معرفی کردند، که فرض اساسی آن توزیع هذلولوی برای لگاریتم بازده‌ها بود. ابرلین و کلر نشان دادند که استفاده از توزیع نرمال برای لگاریتم بازده روزانه قیمت‌های سهام، مناسب نمی‌باشد و از جهتی نشان دادند که توزیع هذلولوی برازش بهتری به داده‌های واقعی دارد. در سال ۱۹۹۸ ابرلین و پراوز [۱۱]این مدل را به حالت توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته برای لگاریتم بازده‌ها توسیع دادند.




**شکل ۲-۱: مقایسه چگالی و QQ-plot توزیع‌های مختلف برازش داده شده به لگاریتم بازده شاخص** NYSE (از ۲ ژوئن ۱۹۹۰ تا ۱۱ نوامبر ۱۹۹۶).

شکل‌های فوق توسط پراوز در سال ۱۹۹۹ [۲۰]، ترسیم شده است که چگالی و QQ-plot را با در نظر گرفتن توزیع‌های نرمال، هذلولوی، گاوسی معکوس نرمال، هذلولوی تعمیم یافته و تجربی برای لگاریتم بازده شاخص NYSE نشان می‌دهد. وی نشان داد که توزیع هذلولوی تعمیم‌یافته نسبت به سایر توزیع‌های ذکر شده‌ی فوق برازش بهتری به داده‌های تجربی دارد.

حال به معرفی مدل هذلولوی تعمیم‌یافته برای دارایی پایه می‌پردازیم. در مدل بلک شولز قیمت دارایی در هر لحظه به وسیله‌ی یک حرکت براونی نمایی با رانش تعیین می‌شود:

$$S_t = S_o e^{B_t^o} \quad (۱\text{-}۴)$$

که در آن $B_t^o = \mu t + \sigma w_t$ یک حرکت براونی با رانش می‌باشد. البته رابطه‌ی (۴-۱) را می‌توان با استفاده از فرمول ایتو به صورت زیر نوشت.

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu + \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dw_t = dB_t^1 \text{ یا } S_t = S_o + \int_o^t S_u dB_u^1$$

که در آن $B_t^1 = (\mu + \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma dw_t$ یک فرایند براونی متمایز از $B_t^o$ است.

توجه کنید هر عنوان فرایند لوی قابلیت جایگزینی با حالت خاص فرایند لوی هذلولوی تعمیم‌یافته را خواهد داشت، به این صورت که مطالبی را که در ادامه آمده می‌توان برای فرایند لوی هذلولوی تعمیم یافته بی هیچ کم و کاستی تقریر کرد.

**تعریف ۴-۱ مدل لوی نمایی:**

اگر در رابطه‌ی (۴-۱) $B_t^o$ با یک فرایند لوی جایگزین شود، رده‌ی مدل‌های لوی نمایی ایجاد مـی-شود:

$$S_t = S_o e^{Z_t} \tag{۴-۲}$$

که در آن $Z_t$ یک فرایند لوی با اندازه پرش $J_Z$ می‌باشد.با به کار بردن فرمول ایتو برای رابطه‌ی فـوق خواهیم داشت:

$$\frac{dS_t}{S_0} = S_{t^-}(dZ_t + \frac{\sigma^2}{2}dt + (e^{\Delta Z_t} - 1 - \Delta Z_t))$$

حال اگر $S_0 = 1$ و $Z_t$ یک فرایند لوی هذلولوی تعمیم‌یافته باشد، رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$dS_t = S_{t^-}(dZ_t + e^{\Delta Z_t} - 1 - \Delta Z_t) \tag{۴-۳}$$

که آن را مدل هذلولوی تعمیم‌یافته می‌نامند. در ادامه مدل فوق را به داده‌هایواقعی بازار برازش می‌دهیم.

### ۴- روش‌شناسی تحقیق

روش پژوهش حاضر توصیفی از نوع مقایسه‌ای است که داده‌های آن از جمله دارایی پایه است که برای آن سهام در نظر گرفته‌ایم و نمونه مورد بررسی ما قیمت‌های سهام هشت شرکت که در بورس اوراق بهادار تهران معامله می‌شوند، هستند.

**جدول (۱) شامل اطلاعات سهام و تاریخ آنها**

| نمونه | | | |
|---|---|---|---|
| **نام شرکت** | **نماد** | **تاریخ شروع** | **تاریخ پایان** |
| پتروشیمی اصفهان | شصفها | ۱۳۷۸/۱۱/۲۴ | ۱۳۹۰/۰۹/۲۰ |
| ایران خودرو | خودرو | ۱۳۷۵/۰۱/۰۶ | ۱۳۹۰/۰۹/۲۰ |
| معادن روی ایران | کروی | ۱۳۸۰/۰۱/۲۰ | ۱۳۹۰/۰۹/۲۰ |
| شرکت صنعتی دریایی | خصدرا | ۱۳۸۰/۰۱/۰۷ | ۱۳۹۰/۰۹/۲۰ |
| شهد ایران | غشهد | ۱۳۷۵/۰۱/۰۵ | ۱۳۹۰/۰۹/۲۰ |
| گروه بهمن | خبهمن | ۱۳۷۵/۰۱/۱۴ | ۱۳۹۰/۰۹/۲۰ |
| صنعتی بهشهر | غبشهر | ۱۳۷۵/۰۱/۰۶ | ۱۳۹۰/۰۹/۲۰ |
| سایپا | خساپا | ۱۳۷۵/۰۳/۲۲ | ۱۳۹۰/۰۹/۲۰ |

داده‌ها همان لگاریتم بازده روزانه قیمت سهام جدول فوق است که با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌شوند.

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

## ۵- نتایج تحقیق

### ۱-۵- تخمین پارامترها

برای تخمین پارامترهای توزیع از روش ماکزیمم درستنمایی با فرض استقلال لگاریتم بازده‌های روزانه استفاده خواهد شد. در این روش پارامترها به گونه‌ای محاسبه می‌شوندکه تابع زیر را ماکزیمم کنند.

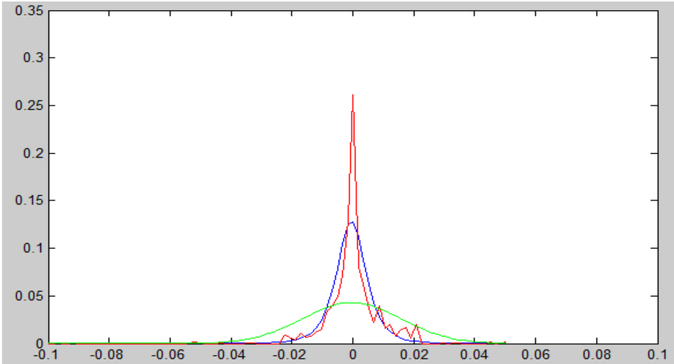
$$L = \sum_{i=1}^{n} \log(f_{GH}(x_i, \alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda))$$

برای به دست آوردن پارامترها روش عددی سیمپلکس دانهیل را طبق مقاله فاجردو و فاریاس (۲۰۰۴)[۱۲]با استفاده از نرم افزار مطلب به کار برده‌ایم.البته برای این کار می‌توانستیم از روش مشتق‌گیری و حل معادلات به دست‌آمده استفاده کنیم.که نتایج در جدول زیر به طور خلاصه آورده شده است.

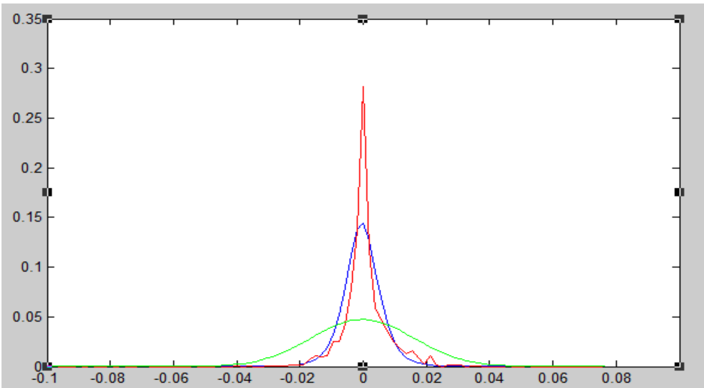
**جدول (۲) شامل برآورد پارامترها**

| نام شرکت | نماد | α | β | δ | µ | λ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| پتروشیمی اصفهان | شصفها | 8.89E-05 | 1.42E-07 | 0.009363 | -0.0005 | -1.74487 |
| ایران خودرو | خودرو | 31.22455 | 0.044533 | 0.010876 | -0.00036 | -2.34072 |
| معادن روی ایران | کروی | 4.93E-05 | 1.4E-07 | 0.017561 | 0.000107 | -1.94031 |
| شرکت صنعتی دریایی | خصدرا | 4.68E-05 | 3.57E-07 | 0.013585 | -0.00042 | -1.02419 |
| شهد ایرن | غشهد | 6.68E-05 | 2.3E-07 | 0.008702 | -0.0004 | -1.94763 |
| گروه بهمن | خبهمن | 2.62E-05 | 3.22E-08 | 0.011147 | -0.00034 | -1.62749 |
| سلیپا | خساپا | 7.36E-06 | -2.1E-08 | 0.006074 | -0.00144 | -1.06531 |
| صنعتی بهشهر | غبشهر | 8.17E-05 | -1.9E-07 | 0.008685 | -0.00043 | -2.47942 |

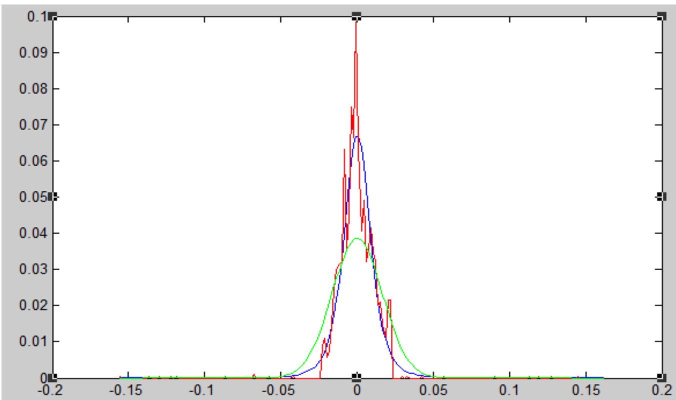
پس از برآورد پارامترها اینک توزیع هذلولوی تعمیم یافته را به داده‌های نمونه برازش می‌دهیم و با توزیع نرمال مبتنی بر مانگین و واریانس داده‌ها به طور همزمان در یک شکل مقایسه می‌کنیم. در هر شکل مشاهدات تجربی با رنگ قرمز، توزیع نرمال با رنگ سبز و توزیع هذلولوی تعمیم یافته با رنگ آبی مشخص شده‌اند.



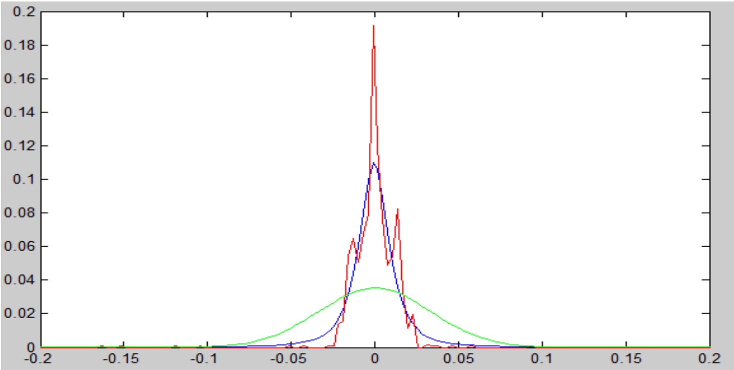

شکل (۱,۶) پتروشیمی اصفهان



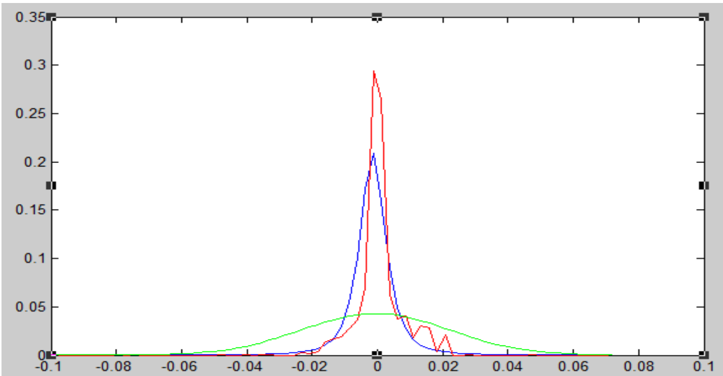

شکل (۲,۶) ایران خودرو



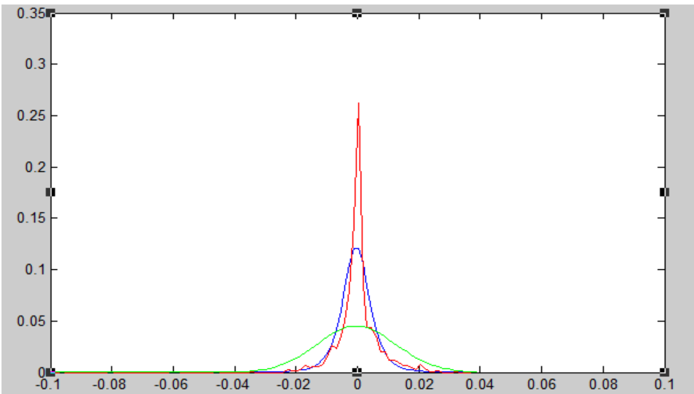

شکل (۳,۶) معادن روی ایران



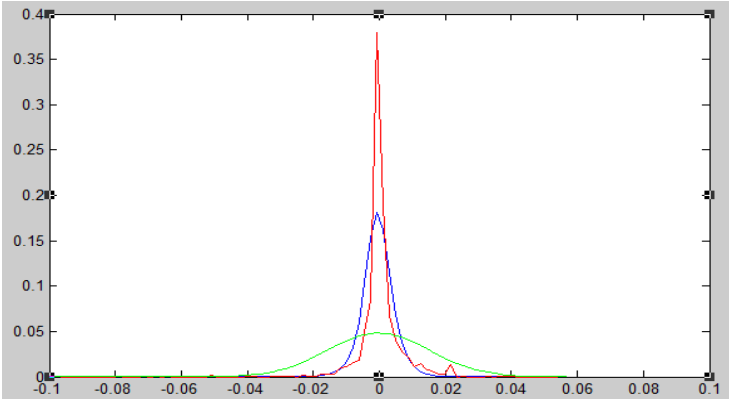

شکل (۴,۶) شرکت صنعتی دریایی



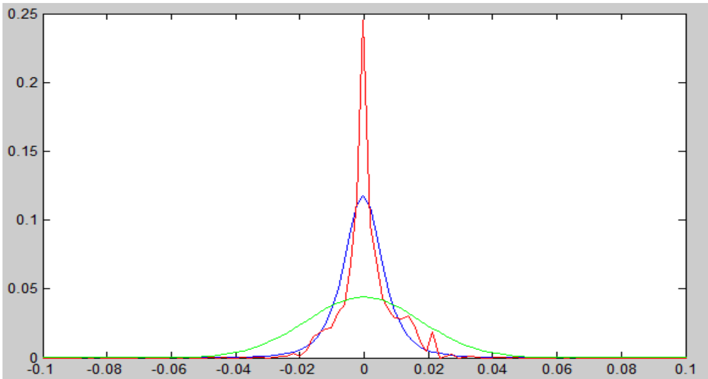

شکل (۵,۶) سایپا




شکل (۶,۶) غشهد




**شکل (۷,۶) غبشهر**




**شکل (۸,۶) خبهمن**

## ۲-۵- نیکویی برازش

برای آزمون نکویی برازش از آزمون معروف کای دو استفاده کردیم که آماره آن به صورت زیر است

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

که در آن $O_i$ فراوانی مشاهدات تجربی، $E_i$ فراوانی پیش بینی شده یا مورد انتظار و $n$ هم تعداد طبقات است. نتایج و مقادیر را در جدول 3 مشاهده می‌کنید. همچنین آزمون کلموگروف اسمیرنوف را نیز برای آزمون بکار بردیم که نتایج آن را در جدول ۴ آورده‌ایم.

جدول (۳) آزمون مربع کای دو

| نمونه | مقدار آماره | p-value | درجه آزادی |
|---|---|---|---|
| شصفها | 702.0039 | 0 | 14 |
| خودرو | 654.3672 | 0 | 10 |
| کروی | 95.7656 | 0 | 6 |
| خصدرا | 316.098 | 0 | 6 |
| غشهد | 6.21۴۲ | 0 | 8 |
| خبهمن | 472.0628 | 0 | 8 |
| خساپا | 1158.981 | 0 | 8 |
| غبشهر | 1044.691 | 0 | 8 |

جدول (۴) آزمون کلموگروف اسمیرنوف

| نماد | p-value |
|---|---|
| شصفها | 6.965714E-21 |
| خودرو | 1.45633720E-36 |
| کروی | 0.00000021956 |
| خصدرا | 1.387826432E-11 |
| غشهد | ۱,۷۵۱۶۲۵E-26 |
| خبهمن | 5.31482762E-27 |
| خساپا | ۱۲۲E-۸,۳۷۶۹۷۹ |
| غبشهر | 1.0537160757E-73 |

## ۶- نتیجه گیری و بحث

همانطور که در شکل‌های ۱,۶ تا ۸,۶دیدید توزیع هذلولوی تعمیم یافته برازش بهتری نسبت به توزیع نرمال به داده‌های تجربی داده است اما باز هم بطور کامل همپوشانی صورت نگرفته است در نتیجه می‌توان گفت این توزیع نسبت به نرمال برازش بهتری به داده‌های تجربی دارد اما بعد از انجام آزمون نکویی برازش و محاسبه‌ی مقادیر $P-Value$ به این نتیجه می‌رسیم که این مدل برای این ۸سهم مناسب نیست و برای قیمت‌گذاری سهام این ۸ شرکت این مدل مناسب نیست. البته نباید از نتیجه این برداشت را کرد که مدل هذلولوی تعمیم یافته مدل ناتوان و ضعیفی برای برازش به داده‌ها است. طبق نتایج مقاله فاجاردو و فاریاس (۲۰۰۴)[۱۲]که در ادامه می‌آوریم پس از برازش این توزیع به داده‌های ۱۵ سهم در بورس کشور برزیل برای ۱۳ سهم توزیع هذلولوی

تعمیم یافته برازش مناسبی داشته و طبق آزمون کای دو فرض صفر مبتنی بر پیروی داده‌ها از توزیع مورد نظر، مورد قبول قرار گرفته است و تنها برای دو سهم فرض صفر آزمون رد شده و توزیع مناسب نبوده است. به هر حال امید است که با بررسی بیشتر و آزمون توزیع‌های دیگر به توزیع و در پی آن به مدل مناسب برای داده‌های ایران برسیم.

**نتایج آزمون نکویی برازش به داده‌های سهام کشور برزیل**

| نمونه | آماره | P-value | درجه آزادی |
|---|---|---|---|
| Bbas4 | ۲۳,۶۵۱۶ | ۰,۰۸۷۷ | 15 |
| Bbdc4 | ۳۴,۱۲۶۸ | ۰,۰۰۰۹ | 14 |
| Brdt4 | ۶۶,۲۱۵۲ | ۰ | 21 |
| Cmig4 | ۲۱,۲۸۷۵ | ۰,۱۶۵۰ | 15 |
| Csna4 | ۱۴۱,۵۹۷۰ | ۰ | 19 |
| Ebtp4 | ۱۳,۶۲۷۹ | ۰,۳۴۱۰ | 11 |
| Elet6 | ۲۱,۳۸۳۰ | ۰,۲۶۸۱ | 17 |
| Ibvsp | ۱۳,۵۲۰۳ | ۰,۵۱۱۰ | 13 |
| Itau4 | ۳۲,۵۰۳۵ | ۰,۰۸۱۹ | 22 |
| Petr4 | ۱۵,۳۰۸۸ | ۰,۷۱۸۹ | 18 |
| Tcsl4 | ۱۸,۹۶۴۱ | ۰,۱۶۳۰ | 13 |
| Tlpp4 | ۲۲,۵۳۸۹ | ۰,۰۸۴۱ | 14 |
| Tnep4 | ۱۳,۳۶۹۹ | ۰,۵۲۲۹ | 13 |
| Tnlp4 | ۱۶,۵۱۷۵ | ۰,۲۲۸۵ | 12 |
| Vale5 | ۱۶,۱۷۷۵ | ۰,۴۶۲۶ | 15 |

## فهرست منابع


1) Bachelier, L. (1900)."Théorie de la speculation". Paris: Gauthier-Villars. Translated in Cootner (1964).
2) Barndorff-Nielsen, O. E. (1977). "Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle Size". Proceedings of the Royal Society London A 353, 401–419.
3) Barndorff-Nielsen, O. E. (1998). "Processes of normal inverse Gaussian type". Finance and Stochastics 2, 41–68.
4) Barndorff-Nielsen, O. E. and Halgreen, C. (1977). "Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distribution" .Zeitschriftf¨ ur Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandteGebiete, 38, 309–311.

5) Bertoin, J. (1996). "Levy processes". Cambridge University Press, Cambridge.
6) Black, F. and Scholes, M. (1973). "The pricing of options and corporate liabilities". Journal of Political Economy 81(3), 637–654.
7) Cont, R. and Tankov, P. (2004). "Financial modeling with jump processes". Chapman & Hall/RCR Financial Mathematic Series.
8) Eberlein, E. and Hammerstein, E. A. (2002). "Generalized Hyperbolic and Inverse Gaussian Distributions: Limiting Cases and Approximation of Processes".FDM Preprint 80, University of Freiburg.
9) Eberlein, E. and Keller, U. (1995). "Hyperbolic distributions in finance". Bernoulli, 1, 281–299.
10) Eberlein, E., Keller, U. and Prause, K. (1998). "New insights into smile, mispricing and value at risk: The hyperbolic model". Journal of Business 71(3), 371–406.
11) Eberlein, E. and Prause, K. (1998). "The generalized hyperbolic model: Financial derivatives and risk measures". FDM preprint 56, University of Freiburg.
12) Fajardo, J., &Farias, A. (2004). Generalized hyperbolic distributions and Brazilian data.Brazilian Review of Econometrics, 24(2), 249–271
13) Hammerstein, V. (2010). "The generalized hyperbolic distributions: Theory and application to CDO pricing". Dissertation.MathematischeFakultät der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg imBreisgau.
14) Jacod, J. &Shiryaev, A. N. (1987). "Limit Theorems for Stochastic Processes".Springer.
15) Kou, S. G. and Wang, H. (2001). "Option pricing under jump-diffusion model" Working paper.
16) Madan, D. B. and Seneta E. (1987). "Chebyshev polynomial approximations and characteristic function estimation". Journal of the Royal Statistical Society Series B 49(2), 163–169.
17) Mandelbrot, B. (1963). "The variation of certain speculative prices". The Journal of Business 36, 394–419.
18) Merton, R. C. (1976). "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous". J. Financial Economics, 3, 125–144.
19) Osborne, M. F. M. (1959). "Brownian motion in the stock market". Operations Research 7, 145–173.
20) Prause, K. (1999). "The generalized hyperbolic model: Estimation, financial derivatives, and risk measures". Dissertation.MathematischeFakultät der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg imBreisgau.
21) Predota, M. (2005). "A survey in mathematics for industry on European and asian option pricing in the generalized hyperbolic model".Journal of applied mathematic, Vol 16, 111-114.
22) Press, S. J. (1967). "A compound events model for security prices". Journal of Business 40, 317–335.
23) Sato, K. (1999). "Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions".Cambridge University Press.
24) Samuelson, P. (1965). "Rational theory of warrant pricing". Industrial Management Review 6, 13–32.

25) Schoutens, W. (2003). "Lévy processes in Finance : Pricing Financial Derivatives". Wiley