مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره سی‌وچهارم / بهار ۱۳۹۷

تحلیل توان افزایش دو دارایی طلا و دلار به منظور محاسبه ارزش اختیار مبادله توانی دلار بر مبنای دارایی پایه طلا با سری زمانی

مرتضی رحمانی[۱]
ابوالفضل تاری‌مرزآباد[۲]
سیده نفیسه آل محمد[۳]
طاهره مرادزاده[۴]

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۳/۲۵ تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۱/۱۴

چکیده

در این مقاله با در نظر گرفتن بازار رقابت کامل، ابتدا به بیان فرمول قیمت گذاری اختیار مبادله استاندارد آمریکایی و اروپایی و اختیار مبادله توانی آمریکایی و اروپایی می پردازیم. سپس با هدف انتخاب توان مناسب افزایش دارایی های مورد مبادله به منظور محاسبه ارزش اختیار مبادله توانی دلار بر مبنای دارایی پایه طلا در آینده ای نزدیک، ۵۰۱ داده از قیمت طلا و دلار در بازه‌ی زمانی اول فروردین ۱۳۹۱ تا اول تیر ۱۳۹۴ را با استفاده از سری زمانی و مدل های ARCH، GARCH، GJR-GARCH، ARMA-GARCH مورد آزمون قرار می‌دهیم. آنگاه با در نظر گرفتن معیار های AIC و BIC و مقایسه میانگین خطای توان دوم مشاهدات و واریانس شرطی به دست آمده از مدل های مورد مطالعه و آزمون های کریستوفرسن و کوپیک مدل مناسب را برای پیش بینی بهتر رفتار قیمت طلا و دلار در آینده ای نزدیک و در نتیجه تحلیل توان افزایش هر دو دارایی طلا و دلار انتخاب می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: اختیار مبادله توانی، سری زمانی، مدل اتورگرسیو شرطی با پراکندگی متغیر.

۱- دانشیار دانشگاه علم و فرهنگ، تهران، ایران (نویسنده مسئول) : rahmanimr@yahoo.com
۲- استادیار دانشگاه شاهد، تهران، ایران
۳- استادیار دانشگاه شاهد، تهران، ایران
۴- دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی دانشگاه شاهد، تهران، ایران (مسئول مکاتبات)

۱- مقدمه

امروزه سرمایه گذاران با طیف وسیعی از انتخاب ها برای سرمایه گذاری از خرید دارائیهای فیزیکی تا دارائیهای مالی مواجه هستند. با پیچیده تر شدن محیط ها و شرایط سرمایه گذاری، سرمایه گذاران می بایست برای کاهش ریسک به همه بازارها و همه دارایی ها از جمله مشتقات مالی مانند اختیار خرید و فروش توجه نمایند. بدست آوردن بهترین ترکیب سرمایه گذاری به وضعیت و ترجیحات بازدهی سرمایه گذاری نسبت به ناخشنودی سرمایه گذار از ریسک بستگی خواهد داشت(نیکومرام و همکاران، ۱۳۹۳).

فیشر [۱] و *مارگریب* [۲] در سال۱۹۷۸ به طور مستقل فرمول‌های قیمت‌گذاری را تحت فرض بدون ریسک برای اختیار معامله با پرداخت‌هایی به فرم زیر به دست آوردند:

$$(S_1(T) - S_2(T))^+$$

که S_1 قیمت دارایی اول و S_2 قیمت دارایی دوم است. فیشر در سال ۱۹۷۸ قیمت‌گذاری اختیار خرید در شرایط نامعین را بررسی کرد و سپس فرمول قیمت گذاری اصلاح‌شده اختیار خرید را به دست آورد. مارگریب در همان سال اختیار معامله ای را تحت عنوان اختیار مبادله برای اولین بار مورد بررسی قرارداد. بنابه تعریف اختیار مبادله به دارند آن این حق را می دهد که B واحد از یک دارای را با A واحد از دارای دیگر در زمان مورد توافق مبادله کند. وی با توجه به مدل بلک-شولز معادله‌ای را برای قیمت‌گذاری اختیار مبادله دو دارایی به دست آورد.

در روش فیشر، $S_2(T)$ به عنوان قیمت توافقی‌ای محسوب می شود که می توان با آن دارایی اول با قیمت $S_1(T)$ را خریداری نمود. درحالیکه مارگریب قرارداد اختیار معامله را تنها به عنوان مبادله یک دارایی با دارایی دیگر در نظر می‌گیرد. بنابراین برای بکاربردن فرمول فیشر لازم است تا قیمت بازار ناشی از ریسک قیمت توافقی را تعیین کنیم.

در میان کاربردهای ممکن از اختیار مبادله توانی نیز می توان به بخشی از طراحی جبران خسارت اشاره کرد. اولین بار مارگریب در سال ۱۹۷۸ در مقاله‌ای در زمینه جبران خسارت مبتنی بر پاداش برای مدیران، طراحی جبران خسارت را به عنوان کاربردی از اختیار مبادله استاندار بیان نمود(بلمن و کلارک [۳]، ۲۰۰۵). همچنین *جانسون وتین* [۴] درسال۲۰۰۰ کاربرد اختیار مبادله در زمینه جبران خسارت مدیران اجرایی را بررسی کردند.

در این مقاله با هدف محاسبه ارزش اختیار مبادله توانی دلار بر مبنای دارایی پایه طلا، توان افزایش دلار و طلا را با استفاده از سری زمانی و مدل های ARCH، GARCH، GJR-GARCH و ARMA-GARCH بررسی می کنیم. از این رو ابتدا اختیار مبادله استاندارد، سپس به عنوان تعمیمی از آن اختیار مبادله توانی را ارائه می دهیم. در پایان با مورد آزمون قرار دادن ۵۰۱ داده از قیمت طلا و دلار در بازه زمانی اول فروردین ۱۳۹۱ تا اول تیر ۱۳۹۴ و مدل بندی واریانس شرطی، مدل مناسب از چهار مدل مذکور برای داده های مالی به منظور پیش بینی رفتار قیمت طلا و دلار در اول شهریور ۱۳۹۴، وجود و عدم وجود شوک در رفتار قیمت دلار و طلا و در ادامه آن مخالف یک و یا برابر یک بودن توان افزایش دلار و طلا را نتیجه می گیریم.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

۲-۱- اختیار مبادله استاندارد

اختیار مبادله استاندارد توسط مارگریب در سال ۱۹۷۸ مورد مطالعه قرار گرفت. وی در مقاله خود که در زمینه جبران خسارت مبتنی بر پاداش برای مدیران اجرایی بود، طراحی جبران خسارت را به عنوان کاربردی از اختیار مبادله استاندارد بیان نمود. همچنین ایسر[۵] در ۲۰۰۳ و دیوس[۶] در سال ۲۰۰۳ در خصوص اصول و مبانی قیمت گذاری اختیار مباله توانی که در آن قیمت توافقی برابر با ارزش یک دارایی دیگر در زمان انقضاء است، مفاهیم و روابط ریاضی مفیدی را ارائه نمود. همچنین تامپگینز[۷] در ۱۹۹۹ نشان داد که اختیار توانی اروپایی می‌تواند ریسک غیر خطی در بازار های سرمایه را کاهش دهد.

قیمت گذاری اختیار مبادله استاندارد اروپایی

فرض کنید S_1 و S_2 به عنوان قیمت های دارایی های اول و دوم از معادله دیفرانسیل تصادفی زیر پیروی کنند(جان هال، ۱۳۸۴):

$$DS_I = S_I(\mu_I DT + \Sigma_I DB_I) \qquad (I = 1,2)$$

که در آن μ_I و Σ_I به ترتیب بازده و نوسانات دارایی S_I است. اختیار مبادله، یک اختیار خرید روی دارایی اول با قیمت توافقی دارایی‌دوم و یک اختیار فروش روی دارایی دوم با قیمت توافقی دارایی اول محسوب می شود.

دارنده اختیار اروپایی، حق اختیار خود را در تاریخ سررسید و در شرایطی که بازدهی مثبت وجود داشته باشد، اعمال می‌کند به عبارت دیگر

$$W(S_1, S_2, T) = MAX(S_1(T) - S_2(T), 0)$$

از طرفی، با توجه به آنکه قیمت‌های دارایی‌های اول و دوم یعنی S_1 و S_2 مثبت می باشند، نتیجه می گیریم:

$$0 \leq W(S_1, S_2, T) \leq S_1$$

قضیه (مارگریب، ۱۹۷۸): ارزش اختیار مبادله استاندارد اروپایی در زمان T با تاریخ سررسید T برابر است با

$$W(S_1, S_2, T) = S_1 N(D_1) - S_2 N(D_2) \quad (۱)$$

که درآن

$$D_1 = \frac{LN^{S_1}/_{S_2} + (\Sigma^2/_2)(T-T)}{\Sigma\sqrt{(T-T)}}$$

و

$$D_2 = D_1 - \Sigma\sqrt{(T-T)}$$

همچنین با در نظر گرفتن ${\Sigma_1}^2$، ${\Sigma_2}^2$ و P به ترتیب به عنوان واریانس S_1، واریانس S_2 و ضریب همبستگی دو حرکت براونی، N(.) نشان دهنده تابع توزیع نرمال تجمعی با واریانس $\Sigma^2 = {\Sigma_1}^2 - 2\Sigma_1\Sigma_2 P + {\Sigma_2}^2$ از متغیر $(\frac{S_1}{S_2})^{-1} D \frac{S_1}{S_2}$ است.

قیمت گذاری اختیار مبادله آمریکایی

قضیه(مارگریب، ۱۹۷۸): رابطه (۱) برای ارزش اختیار مبادله آمریکایی نیز برقرار است. در شرایطی که قیمت توافقی قیمت یک دارایی باشد، ارزش اختیار مبادله اروپایی، از ارزش اختیار مبادله آمریکایی مشابه بیشتر خواهد بود از این رو اختیار آمریکایی را تا قبل از تاریخ سر رسید اعمال نخواهیم کرد. به همین دلیل هرگاه ارزش اختیار مبادله آمریکایی را با $W(S_1, S_2, T)$ نشان دهیم، داریم

$$W(S_1, S_2, T) = W(S_1, S_2, T)$$

در نتیجه رابطه (۱) برای ارزش اختیار مبادله آمریکایی نیز به کار می رود.

۲-۲- اختیار مبادله توانی

اختیار مبادله توانی یک تعمیم توام از اختیار مبادله فیشر- مارگریب است که در سال ۲۰۰۵ توسط بلنمن و کلارک طی مقاله ای با عنوان اختیار مبادله توانی مطرح و به کمک آن قیمت گذاری اختیار معامله (خرید یا فروش) ارائه گردید. مبنای پرداخت در این نوع اختیار، مقایسه ${S_1}^{A_1}$ از یک دارایی با ${S_2}^{A_2}$ از دارایی دیگر می باشد. منظور از S_1 قیمت دارایی اول و S_2 قیمت دارایی دوم است. چنین اختیاراتی را اختیار مبادله توانی می نامند. ارزش ذاتی این نوع اختیار برابر است با:

$$\Phi\big(S_1(T), S_2(T)\big) := (B_1{S_1}^{A_1}(T) - B_2{S_2}^{A_2}(T))^+ \qquad (۲)$$

در صورتی که $A_1 = A_2 = 1$، رابطه فوق بیانگر ارزش ذاتی اختیار مبادله استاندارد است که می‌توان B_2 واحد از دارایی دوم را با B_1 واحد از دارایی اول در زمان مشخص مبادله کرد(بلمن و کلارک، ۲۰۰۵).

قیمت گذاری اختیار مبادله توانی اروپایی

فرض کنید $(\Omega, F, \{F_T\}_{T\geq 0}, P)$ یک فضای احتمال فیلتر شده یا به عبارتی یک فضای احتمال مجهز به فیلتر $\{F_T\}_{T\geq 0}$ باشد، یعنی اگر (Ω, F) را یک فضای اندازه پذیر در نظر بگیریم یک فیلترینگ $\{F_T\}_{T\geq 0}$ یک دنباله صعودی از σ-جبرها روی فضای اندازه پذیر مذکور است(شرو[۸]، ۲۰۰۴).

بازاری متشکل از دو دارایی ریسکی S_1 و S_2 و یک اوراق قرضه بدون ریسک S_0 را در نظر بگیرید و فرض کنید قیمت دارایی های ریسکی ازمعادلات دیفرانسیل تصادفی زیر پیروی کنند

$$DS_I(T) = (\mu_I - \Delta_I)S_I(T)DT + \Sigma_I\, S_I(T)DW_I, \qquad T \in [0, T]$$

برای هر $I = 1,2$، $\mu_I, \Delta_I \in \Re$ و $\Sigma_I \in \Re^+$ به ترتیب بازده دارایی S_I، بازده سود سهام مستمر و نوسانات دارایی S_I می باشند، W_I حرکت براونی استاندارد نسبت به اندازه P است و داریم $DW_1DW_2 = PDT$ که در آن P ضریب همبستگی دو حرکت براونی است و

$$DS_0(T) = RDT, \qquad T \in [0, T]$$

که در آن $R \in \mathfrak{R}^{+}$ نرخ بهره بدون ریسک می باشد. با استفاده از تعریف زیر، همبستگی بین W_1 و W_2 را به راحتی می توان مدل سازی کرد

$$DS_1(T) = (\mu_1 - \Delta_1)S_1(T)DT + \Sigma_1 S_1(T)DB_1(T),$$

و

$$DS_2(T) = (\mu_2 - \Delta_2)S_2(T)DT + \Sigma_2 PS_2(T)DB_1(T) + \Sigma_2\sqrt{1-P^2}S_2(T)DB_2(T), \quad T \in [0,T].$$

که B_1 و B_2 حرکت های براونی مستقل روی فضای احتمال $(\Omega, F, \{F_T\}_{T\geq 0}, P)$ هستند.
بنابراین روابط فوق روی فضای احتمال $(\Omega, F, \{F_T\}_{T\geq 0}, \widetilde{P})$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$DS_1(T) = (R - \Delta_1)S_1(T)DT + \Sigma_1 S_1(T)D\widetilde{B}_1(T),$$

و

$$DS_2(T) = (R - \Delta_2)S_2(T)DT + \Sigma_2 PS_2(T)D\widetilde{B}_1(T) + \Sigma_2\sqrt{1-P^2}S_2(T)D\widetilde{B}_2(T), \quad T \in [0,T].$$

که برای هر $T \in [0,T]$:

$$\widetilde{B}_1(T) = B_1(T) + \left(\frac{\mu_1 - R}{\Sigma_1}\right)T$$

و

$$\widetilde{B}_2(T) = B_2(T) + \left(\frac{\mu_2 - R - P(\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1})(\mu_1 - R)}{\Sigma_2\sqrt{1-P^2}}\right)T$$

حرکت های براونی استاندارد نسبت به $\widetilde{P}$ اندازه پذیر هستند و

$$DS_0(T) = RDT, \qquad T \in [0,T]$$

قضیه(مارگریب، ۱۹۷۸): ارزش اختیار مبادله توانی اروپایی در زمان T با پارامترهای $\xi = (R, A_1, A_2, B_1, B_2, \Delta_1, \Delta_2)$ و تاریخ سررسید T>T برابر است با :

$$PE\left(T, S_1, S_2, \xi; T\right) = \Gamma_1\left(T, S_1, \xi; T\right)N(D_1) - \Gamma_2\left(T, S_2, \xi; T\right)N(D_2)$$

که

$$D_1 = \frac{LN\left(\frac{B_1 S_1^{A_1}}{B_2 S_2^{A_2}}\right) + [A_1(R-\Delta_1) - A_2(R-\Delta_2) - A_1(1-A_1)\frac{\Sigma_1^{\ 2}}{2} + A_2(1-A_2)\frac{\Sigma_2^{\ 2}}{2} + \frac{\Sigma^2}{2}](T-T)}{\Sigma\sqrt{T-T}},$$

$$D_2 = \frac{LN\left(\frac{B_1 {S_1}^{A_1}}{B_2 {S_2}^{A_2}}\right) + [A_1(R-\Delta_1) - A_2(R-\Delta_2) - A_1(1-A_1)\frac{{\Sigma_1}^2}{2} + A_2(1-A_2)\frac{{\Sigma_2}^2}{2} - \frac{\Sigma^2}{2}](T-T)}{\Sigma\sqrt{T-T}}$$

و

$$\Sigma^2 = {A_1}^2{\Sigma_1}^2 + {A_2}^2{\Sigma_2}^2 - 2A_1A_2\Sigma_1\Sigma_2 P,$$

$$\Gamma_1\left(T, S_1, \xi; T\right) = B_1 {S_1}^{A_1} EXP\left\{\left((A_1-1)R - A_1\Delta_1 - A_1(1-A_1)\frac{{\Sigma_1}^2}{2}\right)(T-T)\right\},$$

و

$$\Gamma_2\left(T, S_2, \xi; T\right) = B_2 {S_2}^{A_2} EXP\left\{\left((A_2-1)R - A_2\Delta_2 - A_2(1-A_2)\frac{{\Sigma_2}^2}{2}\right)(T-T)\right\}.$$

نتیجه: بهترین و بدترین ارزش اختیار مبادله توانی اروپایی در زمان T با تاریخ سررسید T به ترتیب برابراند با

$$PB\left(T, S_1, S_2, \xi; T\right) = \Gamma_1\left(T, S_1, \xi; T\right) N(D_1) - \Gamma_2\left(T, S_2, \xi; T\right) N(-D_2),$$

و

$$PW\left(T, S_1, S_2, \xi; T\right) = \Gamma_1\left(T, S_1, \xi; T\right) N(-D_1) + \Gamma_2\left(T, S_2, \xi; T\right) N(D_2).$$

$$\widetilde{D}_2 = \widetilde{D}_1 - \Sigma\sqrt{(T-T)}$$

قیمت‌گذاری اختیار مبادله توانی آمریکایی

مارگریب در سال۱۹۷۸ نشان داد که در حالت استاندارد ارزش اختیار مبادله آمریکایی و اروپایی با تاریخ سررسید متناهی با هم منطبق هستند و این یعنی قیمت توافقی اختیار مبادله آمریکایی بهینه نمی باشد.

قضیه: اگر $A_2 \leq 1$، $A_1(R-\Delta_1) \geq R$ و $A_2(R-\Delta_2) \leq R$، در آن صورت قیمت توافقی برای اختیار مبادله توانی آمریکایی با پارامترهای $\xi = (R, A_1, A_2, B_1, B_2, \Delta_1, \Delta_2)$ و تاریخ سررسید T بهینه نمی‌باشد و ارزش اختیار مبادله توانی آمریکایی برابر با ارزش اختیار مبادله توانی اروپایی می باشد.

به منظور انتخاب مناسب توان افزایشی، متناسب با دارایی های مورد مبادله به بررسی موردی سری زمانی می پردازیم.

۳- روش شناسی پژوهش

بررسی موردی سری زمانی

یک سری زمانی، داده هایی است که در طول زمان ثبت شده اند. تجزیه و تحلیل سری های زمانی روشی سودمند برای مدل سازی و پیش بینی داده های مالی می‌باشد. مدل های متفاوتی از سری زمانی معرفی شده اند، برخی از آنها مانند مدل اتورگرسیو به صورت یک معادله رگرسیونی تابعی خطی از مشاهدات گذشته می‌باشد و در حالیکه در بررسی داده های سری زمانی فرض ثابت بودن واریانس در بسیاری از موارد فرض مناسبی نیست واریانس مشاهدات در این مدل ثابت در نظر گرفته می‌شود. یکی از راه حل های این مشکل استفاده از مدل های مشروط به ناهمگنی واریانس می‌باشد. این مدل را اتورگرسیو شرطی با پراکندگی متغیر می‌نامند. مدل ARCH برای اولین بار توسط انگل[۹] در سال ۱۹۸۲ معرفی شد. در این مدل مشهور واریانس به صورت ترکیب خطی از توان دوم مشاهدات گذشته نوشته می‌شود. تجربه نشان داده است که مدل ساده ARCH(P) در صورتی بر روی داده ها برازش قابل قبولی دارد که مرتبه P بزرگ باشد، به همین علت ایده تعمیم این مدل به وجود آمد. بولرسلف[۱۰] درسال۱۹۸۶ تعریف انگل از فرایند ARCH را توسعه داد. بدین ترتیب که $\Sigma^2{}_T$ را نه تنها به صورت یک میانگین وزنی از توان دوم مشاهدات گذشته در نظر گرفت، بلکه یک میانگین وزنی از $\Sigma^2{}_T$های گذشته را نیز به آن اضافه کرد. این موضوع منجر به معرفی فرایند اتورگرسیو تعمیم یافته مشروط به ناهمگنی واریانس شده است(آل محمد سیده نفیسه، ۱۳۹۲).

به منظور پیش بینی رفتار قیمت طلا و دلار در آینده ای نزدیک، ۵۰۱ داده از قیمت طلا و دلار را در بازه ی زمانی اول فروردین ۱۳۹۱ تا اول تیر ۱۳۹۴ و در روزهای فرد هر هفته مورد آزمون قرار داده ایم. سپس با استفاده از نرم افزار متلب و با در نظر گرفتن بازده مشاهدات طلا و دلار، مدل مناسب از ۴ مدل ARCH، GARCH، GJR-GARCH، ARMA-GARCH را بر اساس معیارهای AIC و BIC، میانگین خطای بازده مشاهدات و واریانس شرطی بدست آمده از ۴ مدل مذکور و آزمون های کریستوفرسن و کوپیک انتخاب می کنیم. ابتدا" براساس معیارهای AIC و BIC طول وقفه AR و MA، برای برآورد بهتر مدل های مذکور، مشخص می گردد. برای تعیین درجه مرتبه AR و MA از میان مدل های مورد مطالعه در این مقاله مدلی را که دارای کمترین مقدار از معیار های فوق باشد، انتخاب شده است. از طرفی دیگر با بررسی میانگین خطای واریانس شرطی و بازده مشاهدات طلا و دلار بدست آمده از رابطه (۳)، واریانس شرطی برخی مدل های مورد مطالعه بر اساس معیار های AIC و BIC را برای بازده مشاهدات طلا و دلار در

بازه زمانی ۵۰ روزه، یعنی روز اول تا روز پنجاهم، روز دوم تا روز پنجاه و یکم و در نهایت روز چهارصد و پنجاه و دوم تا پانصدو یکم، مدل سازی کرده که در نتیجه مدل با میانگین خطای کوچکتر را می توان به‌منظور پیش‌بینی بهتر رفتار قیمت طلا و دلار انتخاب نمود. در پایان به منظور تعیین میزان قدرت مدل های انتخاب شده بر اساس معیارهای AIC و BIC و میانگین خطای موجود، آزمون های کریستوفرسن و کوپیک را که برای پیش بینی ارزش در معرض خطر نیز به کار می روند مورد بررسی قرار می دهیم.

۳-۱- آزمون مانایی سری زمانی

در مطالعه حاضر جهت بررسی مانایی بازده مشاهدات طلا و دلار از دو آزمون دیکی فولر تعمیم یافته و آزمون فیلیپس-پرون (PP) استفاده می‌گردد. در این دو آزمون، فرضیه صفر عدم ایستایی و فرضیه مقابل، ایستایی بازده مشاهدات در سری زمانی است. بنابراین چنانچه آماره آزمون فاصله معناداری از صفر داشته باشد، فرضیه صفر رد می شود و در غیر این صورت آن را نمی توان رد کرد. همانطور که در جدول های ۱ و ۲ مشاهده می شود، مقدار P-VALUE نزدیک صفر برآورد شده است. بنابراین آماره آزمون فاصله معناداری با صفر دارد و لذا فرضیه صفر، یعنی عدم ایستایی رد می شود. در نتیجه بازده مشاهدات طلا و دلار ایستا هستند.

جدول۱- بررسی ایستایی مشاهدات طلا و دلار با استفاده از آزمون ADF

بازده مشاهدات طلا	بازده مشاهدات دلار	مقدار معناداری
0.001	0.001	**P-VALUE**

جدول۲- بررسی ایستایی مشاهدات طلا و دلار با استفاده از آزمون PP

بازده مشاهدات طلا	بازده مشاهدات دلار	مقدار معناداری
0.001	0.001	**P-VALUE**

۴- یافته های پژوهش

نتایج حاصل از دو معیار AIC و BIC بر بازده مشاهدات طلا و دلار به ترتیب در جدول های ۳ و ۴ ارائه شده است. مدل GARCH(1,1) برای بازده مشاهدات طلا و مدل

ARMA(1,0,1)-GARCH(1,1) برای بازده مشاهدات دلار با توجه به کمتر بودن مقادیر حاصل از دو معیار AIC و BIC برازش بهتری نسبت به ۴ مدل دیگر دارند.

جدول های ۵ و۶ به ترتیب میانگین خطای مشاهدات و واریانس شرطی بدست آمده از ۴ مدل مذکور برای ۵۰۱ داده مورد آزمون از قیمت طلا و دلار را نشان می دهند.

جدول۳- معیارهای AIC و BIC برای بازده مشاهدات طلا با استفاده از مدل GARCH و مدلهای تعمیم یافته آن

MODEL	ARMAX	AIC	BIC
ARCH(2)	(0,0,0)	$2.0804E^{+3}$	$2.0930E^{+3}$
ARCH(3)	(0,0,0)	$2.0680E^{+3}$	$2.0848E^{+3}$
GARCH(1,1)	(0,0,0)	$2.0430E^{+3}$	$2.0557E^{+3}$
GARCH(1,2)	(0,0,0)	$2.0627E^{+3}$	$2.0796E^{+3}$
ARMA-GARCH(1,1)	(1,0,1)	$2.0441E^{+3}$	$2.0694E^{+3}$
ARMA-GARCH(3,1)	(4,0,1)	$2.0470E^{+3}$	$2.0765E^{+3}$
GJR-GARCH(0,1)	(1,0,0)	$2.1590E^{+3}$	$2.1717E^{+3}$

جدول۴- معیارهای AIC و BIC برای بازده مشاهدات دلار با استفاده از مدل GARCH و مدلهای تعمیم یافته آن

MODEL	ARMAX	AIC	BIC
ARCH(2)	(0,0,0)	$1.9872E^{+3}$	$1.9998E^{+3}$
ARCH(3)	(0,0,0)	$1.9795E^{+3}$	$1.9964E^{+3}$
GARCH(1,1)	(0,0,0)	$1.9795E^{+3}$	$1.9923E^{+3}$
GARCH(1,2)	(0,0,0)	$1.9772E^{+3}$	$1.9941E^{+3}$
ARMA-GARCH(1,1)	(1,0,1)	$1.9427E^{+3}$	$1.9680E^{+3}$
ARMA-GARCH(3,1)	(4,0,1)	$1.9437E^{+3}$	$1.9733E^{+3}$
GJR-GARCH(0,1)	(1,0,0)	$2.2037E^{+3}$	$2.2164E^{+3}$

جدول۵- میانگین خطای مشاهدات و واریانس شرطی برای ۵۰۱ داده طلا

MODEL	ARMAX	MEANS ERROR
ARCH(3)	(0,0,0)	5.6291
GARCH(1,1)	(0,0,0)	5.8739
ARMA-GARCH(1,1)	(1,0,1)	5.9192
GJR-GARCH(0,1)	(1,0,0)	6.9246

جدول۶- میانگین خطای مشاهدات و واریانس شرطی برای ۵۰۱ داده دلار

MODEL	ARMAX	MEANS ERROR
ARCH(3)	(0,0,0)	7.7062
GARCH(1,1)	(0,0,0)	7.7191
ARMA-GARCH(1,1)	(1,0,1)	8.3497
GJR-GARCH(0,1)	(1,0,0)	9.4851

با در نظر گرفتن H(T) و Y(T) به ترتیب به عنوان واریانس شرطی نظیر هر مدل و بازده مشاهدات، میانگین خطای مطلق را با AE نشان می دهیم و داریم:

$$AE = \frac{\sum_{T=51}^{502} |H(T) - Y^2(T)|}{452} \qquad (۳)$$

با توجه به جدول های ۵ و ۶ میانگین خطای مشاهدات و واریانس شرطی مدل ARCH(3) برای هر دو دارایی طلا و دلار کمتر از میانگین خطای ۴ مدل دیگر است، از این رو مدل ARCH(3) می تواند توانایی بیشتری در مدل بندی واریانس شرطی برای هر دو دارایی طلا و دلار در مقایسه با ۴ مدل دیگر داشته باشد.

حال با هدف انتخاب مدل مناسب از مدل های ARCH(3) و GARCH(1,1) برای پیش بینی رفتار قیمت طلا و مدل های ARCH(3) و ARMA(1,0,1)- GARCH(1,1) برای پیش بینی رفتار قیمت دلار از آزمون های کریستوفرسن و کوپیک نیز استفاده می کنیم.

در جدول ۷ مقدار آماره آزمون های کریستوفرسن و کوپیک به همراه P-VALUE برای بازده مشاهدات طلا در سطح ۹۰٪ و ۹۵٪ قابل مشاهده هستند.

بر اساس مقادیر P-VALUE بدست آمده از آزمون کریستوفرسن، در سطح اطمینان ۹۰٪ مدل ARCH(3) به عنوان مدل مناسب ارزیابی شده است. در حالیکه در سطح اطمینان ۹۵٪ هر دو مدل ARCH(2) و GARCH(1,1) می تواند ما را به نتایج مطلوبی برسانند. از طرفی دیگر با توجه به نتایج بدست آمده از آزمون کوپیک می توان به مناسب نبودن هر دو مدل در سطح اطمینان ۹۰٪ و استفاده از مدل ARCH(3) به عنوان مدل مناسب در سطح اطمینان ۹۵٪ اشاره نمود.

جدول ۷- نتایج آزمون کریستوفرسن و کوپیک برای بازده مشاهدات طلا

0.90 Quantile					
MODEL	**ARMAX**	**christoffersen**	**p-value**	**Kupiec**	**p-value**
ARCH(3)	(0,0,0)	4.1310	0.12676	4.1308	0.42108
GARCH(1,1)	(0,0,0)	6.2825	0.04324	5.7332	0.01665
0.95 Quantile					
MODEL	**ARMAX**	**christoffersen**	**p-value**	**Kupiec**	**p-value**
ARCH(3)	(0,0,0)	1.1644	0.55867	0.97686	0.32298
GARCH(1,1)	(0,0,0)	4.9676	0.08324	4.94720	0.02613

در جدول ۸ نیز مقدار آماره آزمون های کریستوفرسن و کوپیک به همراه P-VALUE برای بازده مشاهدات دلار در سطح ۹۰٪ و ۹۵٪ قابل مشاهده هستند.

جدول ۸- نتایج آزمون کریستوفرسن و کوپیک برای بازده مشاهدات دلار

0.90 Quantile					
MODEL	**ARMAX**	**christoffersen**	**p-value**	**Kupiec**	**p-value**
ARCH(3)	(0,0,0)	9.60080	0.008226	9.53670	0.0020
GARCH(1,1)	(1,0,1)	0.53217	0.766380	$-8.8818E^{-15}$	1
0.95 Quantile					
MODEL	**ARMAX**	**christoffersen**	**p-value**	**Kupiec**	**p-value**
ARCH(3)	(0,0,0)	2.5111	0.28492	2.4286	0.11914
GARCH(1,1)	(1,0,1)	4.9676	0.08342	4.9472	0.02613

بر اساس مقادیر P-VALUE بدست آمده از آزمون کریستوفرسن، در سطح اطمینان ۹۰٪ مدل ARMA(1,0,1)- GARCH(1,1) به عنوان مدل مناسب ارزیابی شده است. در حالیکه در سطح اطمینان ۹۵٪ هر دو مدل ARCH(3) و ARMA(1,0,1)-GARCH(1,1) می توانند به نتایج مطلوبی منجر شوند. از طرفی دیگر با توجه به نتایج بدست آمده از آزمون کوپیک می توان به مناسب بودن مدل ARMA(1,0,1)- GARCH(1,1) در سطح اطمینان ۹۰٪ و استفاده از مدل ARCH(3) به عنوان مدل مناسب در سطح اطمینان ۹۵٪ اشاره نمود.

توجه به این نکته ضروری است که مدل های مذکور تنها قادر به پیش بینی شوک های موجود در رفتار قیمت دارایی ها با استفاده از واریانس شرطی نظیر هستند. از این رو واریانس شرطی بدست آمده از مدل ARCH(3) را برای رفتار قیمت طلا و واریانس شرطی بدست آمده

از مدل ARMA(1,0,1)- GARCH(1,1) را برای رفتار قیمت دلار، از ابتدای تیر ۱۳۹۴ تا اول شهریور ۱۳۹۴ مورد ارزیابی قرار دادیم که مطابق جدول ۹ می توان وجود شوک در دلار و عدم وجود شوک در طلا را در اول شهریور ۱۳۹۴ نتیجه گرفت. عدم وجود شوک در طلا نشان دهنده توان افزایشی مساوی یک می باشد. توان افزایشی دلار را می توان با استفاده از رابطه (۴) و با توجه به شرایط بومی حاکم بر بازار محاسبه نمود.

$$\alpha = \frac{\mathrm{LOG\,S}(\mathrm{T}+1)}{\mathrm{LOG\,S}(\mathrm{T})} \tag{۴}$$

که در آن S(T) قیمت دارایی درلحظه Tام است.

جدول ۹- پیش بینی رفتار قیمت طلا و دلار در بازه زمانی اول تیر تا اول شهریور ۱۳۹۴

$H^T(T)$	0.13	0.1645	0.1975	0.1746	0.1887	0.1906	0.1992	0.2002	0.2023	0.2027
$H^D(T)$	0.0224	0.0257	0.0320	0.0653	0.086	0.089	0.0916	0.0917	0.0919	0.0930

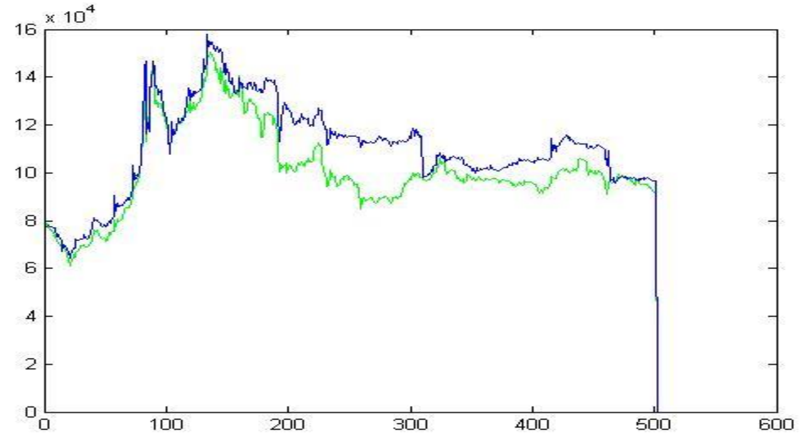
در این مقاله با هدف انتخاب مناسب توان افزایش مناسب هر یک از دارایی های مورد مبادله برای محاسبه ارزش اختیار مبادله توانی دلار بر مبنای دارایی پایه طلا به بررسی موردی سری زمانی پرداختیم. با استفاده از مدل های مذکور قادر به درک مثبت یا منفی بودن شوک موجود در دلار در اول شهریور ۱۳۹۴ نمی باشیم، به عبارتی دیگر با توجه به عدم وجود شوک در رفتار قیمت طلا به سادگی می توان نتیجه گرفت که توان افزایش آن از اول تیر تا اول شهریور ۱۳۹۴ برابر یک می باشد، ولی مثبت یا منفی بودن شوک موجود در رفتار قیمت دلار را با استفاده از مدل های مذکور و بدون در نظر گرفتن شرایط سیاسی و بومی حاکم بر بازار نمی توان تخمین زد.

توجه به این نکته ضروری است که انتخاب توان افزایش نامناسب دارایی مورد مبادله خود به تنهایی می تواند باعث ایجاد ضرر و زیان به یکی از سرمایه گذاران مورد مبادله شود، به این جهت رمز موفقیت یک سرمایه گذار در دانستن شرایط سیاسی و بومی حاکم بر بازار، درک مثبت یا منفی بودن شوک موجود در دارایی های مورد مبادله، انتخاب توان افزایش مناسب دارایی های مورد مبادله و اطلاع از ارزش ذاتی اختیار مبادله توانی دلار بر مبنای دارایی پایه طلا طی سال های گذشته است.

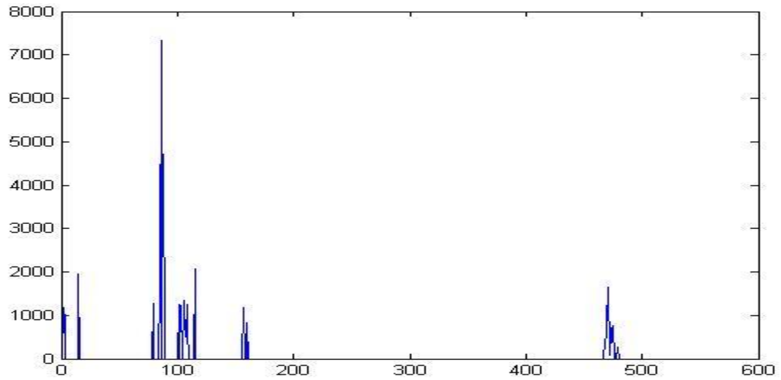
شکل ۱ فرم توانی قیمت طلا یعنی $S_1^{A^T}(T)$ با رنگ سبز و ضریبی از فرم توانی قیمت دلار یعنی $B_2S_2^{A^D}(T)$ با رنگ آبی را بر اساس ۵۰۱ داده مالی نشان می‌دهد. توجه شود که توان

افزایش هر دو دارایی طلا و دلار یعنی A^T و A^D را میانه توان های افزایش روزانه طی بازه یک ساله در نظر گرفته ایم و B_2 نیز نسبت قیمت طلا در زمان شروع قرارداد به توان A^T به قیمت دلار در زمان شروع قرارداد به توان A^D است.

شکل ۲ نیز ارزش ذاتی اختیار مبادله توانی دلار و طلا یعنی $({S_1}^{A^T}(T) - B_2{S_2}^{A^D}(T))^+$ را نشان می دهد که در بدترین شرایط حاکم بر بازار و در بازه زمانی اول فروردین ۱۳۹۱ تا اول تیر ۱۳۹۴ حدود ۷۰۰۰ تومان می باشد.



شکل ۱- ارزش ذاتی اختیار توانی قیمت طلا و دلار (طلا رنگ سبز و دلار رنگ آبی)



شکل ۲- ارزش ذاتی اختیار مبادله توانی دلار و طلا

۵-نتیجه گیری و بحث

در مقاله حاضر اختیار مبادله توانی که یک تعمیم توام از اختیارات مبادله فیشر-مارگریب است و در سال ۲۰۰۵ توسط بلنمن و کلارک در مقاله ای با عنوان اختیار مبادله توانی مطرح شد، مورد بررسی قرار گرفت. در این تحقیق با هدف بررسی و انتخاب مناسب توان افزایش دارایی های مورد مبادله برای محاسبه ارزش اختیار مبادله توانی دلار بر مبنای دارایی پایه طلا، ۵۰۱ داده طلا و دلار را در بازه‌ی زمانی ۱۳۹۴-۱۳۹۱ مورد آزمون قراردادیم. سپس به منظور انتخاب مدل مناسب برای پیش بینی رفتار طلا و دلار در آینده ای نزدیک، مدل‌های ARCH، GARCH، ARMA−GARCH و GJR−GARCH را با توجه به معیارهای AIC و BIC، میانگین اختلاف موجود در واریانس شرطی و توان دوم مشاهدات و آزمون های کریستوفرسن و کوپیک مورد سنجش قرار دادیم.

در پایان نیز با در نظر گرفتن مدل ARCH(3) برای بازده مشاهدات طلا و مدل ARMA(1,0,1)- GARCH(1,1) برای بازده مشاهدات دلار، رفتار قیمت طلا و دلار را از اول تیر ۱۳۹۴ تا اول شهریور ۱۳۹۴ مورد ارزیابی قرار دادیم که نتیجه آن وجود شوک در رفتار دلار و عدم وجود شوک در رفتار طلا در این بازه زمانی می باشد.

فهرست منابع

* آل محمد، سیده نفیسه، ۱۳۹۲، مدل های آمیخته فرآیندهای ARCH با ضرایب متغیر نسبت به زمان، رساله دکتری آمار (فرآیند تصادفی)، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر).
* نیکومرام، هاشم، زمردیان غلامرضا، ۱۳۹۳، بررسی توان تبیین مدل های اقتصادسنجی در سنجش میزان ارزش در معرض خطر پرتفوی شرکتهای سرمایه گذاری جهت تعیین پرتفوی بهینه در بازار سرمایه ایران، فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه گذاری،۱۲، ۱۹۵-۲۱۶.
* هال، جان، ۱۳۸۴، مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک، ترجمه سجاد سیاح و علی صالح آبادی، تهران:گروه رایانه تدبیر پرداز.
* Blenman, L.P., Clark, S.P., 2005, Power exchange option, Finance Research Letters, 2, 97-106 .
* Bollerslev, T., 1986, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics, 31:3, 307–27.
* Davis, M., 2003, Multi-Asset Option, Department of Mathematics, Imperial College London.
* Engle, R. F. 1982, Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, Econometrica, 50:4, 987–1007.
* Esser, A., 2003, General valuation principles for arbitrary payoffs and application to power options under stochastic volatility models, Financial markets and portfolio management, 17, 351-372 .
* Fischer, S., 1978, Call option pricing when the exercise price is uncertain, and the valuation of index bonds, Journal of Finance, 33, 169-176.
* Johnson, S.A., Tian, Y.S., 2000, Indexed executive stock options, Journal of Finance Economics 57, 35-64.
* Margrabe, W., 1978, The Value of an Option to Exchange One Asset for Another, Journal of Finance, 33: 1, 177-186.
* Shreve, S. E., 2004, Stochastic Calculus for Finance I, Springer Finance Series.
* Tompkins, R.G, 1999, Power Options: Hedging nonlinear risks, Journal of Risk 2, 29-45

یادداشت‌ها

[1] Fischer
[2] Margrabe
[3] Blenman, L.P., Clark, S.P.,
[4] Johnson S.A, Tian, Y.S.
[5] Esser
[6] Davis
[7] Tompkins
[8] Shreve S.E.
[9] Engle Robert F.
[10] Bollerslev, T.