



بررسی وجود حساب قیمتی در بازار سهام تهران با استفاده از رهیافت LPPL

حجت‌اله عبدالملکی^۱
شاپور محمدی^۲
ساجده کمالی^۳
رضا وزیری^۴

چکیده

حساب‌های مالی یکی از اصلی‌ترین مسائلی است که اقتصاد مدرن، امروزه با آن در ارتباط می‌باشد. به سبب ارتباط مستقیم آن با بحران‌های مالی، همواره محققین در پی روش‌هایی برای درک این پدیده، تشخیص وجود آن و زمان سقوطش، همچنین تخمین حجم سقوط و زیان حاصل از آن بوده‌اند. یکی از روش‌های ارائه شده برای شناسایی حساب‌ها، مدل قانون توانی تناوب لگاریتمی (LPPL) است که رشد سریع‌تر از نمایی در قیمت‌داری با نوسانات تسریع‌شونده را به عنوان عامل اصلی تشخیص حساب در نظر می‌گیرد. این مدل با موفقیت در بسیاری از بازارهای جهان برای شناسایی حساب‌ها و پیش‌بینی زمان سقوط آن‌ها به کار رفته؛ لیکن در ایران برای اولین بار، در این پژوهش اجرا شده است. در این مقاله، به منظور بررسی وجود حساب و پیش‌بینی سقوط متعاقب شاخص قیمت و بازده نقدی در بازه زمانی ۱۳۸۴-۱۳۸۷ از مدل قانون توانی تناوب لگاریتمی استفاده شده است. در ادامه جهت اطمینان از وجود تناوب لگاریتمی در داده‌ها، تحلیل طیفی Lomb روی داده‌ها اجرا شده است. نتایج، برازش خوب داده‌ها با مدل را نشان داده و همچنین تحلیل طیفی Lomb به خوبی وجود تناوب لگاریتمی را تأیید نموده است؛ از این رو می‌توان نتیجه گرفت داده‌ها، رفتاری مطابق با مدل LPPL دارند. مدل در این بازه زمانی یک حساب را شناسایی کرده، همچنین پیش‌بینی معقولی از زمان بحرانی این حساب ارائه داده است. واژگان کلیدی: سقوط بازار سهام، حساب مالی، قانون توانی تناوب لگاریتمی (LPPL)، تحلیل طیفی Lomb، جستجوی ممنوعه، الگوریتم لونبرگ-مارکوورت.

۱- مقدمه

بازار سرمایه از مهم‌ترین ابزارهای تجهیز و تخصیص منابع مالی به شمار می‌رود؛ بورس اوراق بهادار یکی از ارکان این بازار می‌باشد. بورس از طریق جذب و به کار انداختن سرمایه‌های راکد، حجم سرمایه -

۱- استادیار گروه اقتصاد دانشکده معارف اسلامی و اقتصاد دانشگاه امام صادق
۲- دانشیار گروه مدیریت مالی و بیمه دانشکده مدیریت دانشگاه تهران
۳- دانش‌آموخته مدیریت صنعتی- مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز (مسئول مکاتبات)

گذاری در جامعه را بالا می برد و به تأمین نیازهای سرمایه گذاری واحدهای تولیدی کمک می کند، میان عرضه کنندگان و تقاضاکنندگان ارتباط برقرار نموده، معاملات بازار سرمایه را تنظیم می کند. چنانچه افزایش قیمت دارایی ها در این بازار، متناسب با ارزش ذاتی آنها و فاکتورهای کلان اقتصادی نباشد، می تواند اثرات زیانباری برای کل اقتصاد رقم بزند. ارقام ذیل تنها گوشه ای از اثرات زیان بار حساب را نشان می دهند. در سقوط سال ۱۹۲۹ بازار تنها ظرف ۲ روز، ۳۰ میلیارد دلار از دست داد، تولیدات و تجارت بین المللی از ۶۳ میلیارد دلار به ۲۶ میلیارد دلار کاهش یافت، شمار بیکار شدگان در ایالات متحده آمریکا به ۱۳ میلیون، در انگلستان ۳ میلیون و در آلمان به ۶ میلیون بالغ گردید و همچنین عامل اصلی جنگخانمان سوز جهانی دوم بود. ۲۵ سال طول کشید تا شاخص داو جونز به میزان اولیه اش یعنی ۳۸۱ واحد در نوامبر ۱۹۵۴ برسد.

سقوط بازار اوراق بهادار روی سایر دارایی ها و بازارهای مالی نیز تأثیر می گذارد. با توجه به نقش وام دهی بانکها در شکل گیری و گسترش حساب، ترکیدن حساب نیز متقابلاً موجب فشار اقتصادی بر بانک ها می گردد. سقوط شدید قیمت موجب می شود سود شرکتها و مؤسسات کاهش یابد، مصرف و سرمایه گذاری کم شود، سرمایه گذارانی که به منظور خرید اوراق بهادار از بانکها و مؤسسات اعتباری وام گرفته اند، قادر به پرداخت بهره این بانکها و مؤسسات نخواهند بود، بانکها زیان می بینند، ارزش وثیقه برای وام کاهش می یابد، سود بانکها کم می شود، عرضه وام کاهش می یابد و گاهی این رویه تا جایی ادامه پیدا می کند که موجب ورشکستگی بانکها می شود که متعاقب آن شرکتها، کارخانه ها و ... نیز به سبب از دست دادن مصرف کنندگان و تأمین کنندگان سرمایه خود ورشکسته خواهند شد. با توجه به اثرات و پیامدهای حساب های قیمتی، شناسایی حساب علاوه بر این که برای بازارهای کلان اقتصادی ضروری است به سرمایه گذاران نیز کمک می کند.

هدف این پژوهش، بررسی وجود حساب قیمتی در بازار سهام تهران در سالهای ۱۳۸۴-۱۳۸۷ هجری شمسی با استفاده از رهیافت LPPL (قانون توانی تناوب لگاریتمی) است.

۲- مبانی نظری و پیشینه تحقیق:

در ادبیات اقتصادی، زمانی که قیمت دارایی از جریانات نقدی آتی مورد انتظار آن (بدون توجیه بنیادی و اقتصادی) انحراف داشته باشد، بحث حساب مطرح می شود. برای "حساب" تعاریف متعددی ارائه شده است. از جمله آنها می توان به موارد ذیل اشاره نمود:

فرهنگ لغت وبستر^۶ "حساب" را اینگونه تعریف می کند: " چیزی که فاقد ثبات^۷، استواری^۷ و واقعیت^۸ باشد و وضعیت رونق سریع فعالیت های اقتصادی است که اغلب با سقوط ناگهانی پایا نمی یابد" [۲۷] و چارلز

1- Webster Dictionary

6- Firmless

7- Solidity

8- Reality

کیندر برگر^۹ در دیکشنری اقتصادی جدید پالگریو^{۱۰}، حساب را این گونه تعریف کرده است: "حساب، افزایش شدید در قیمت یک دارایی یا طیف وسیعی از دارایی‌ها به طور مستمر^{۱۱} می‌باشد، با افزایش اولیه ای که انتظار افزایش بیشتری را برای خریداران جدید (مخصوصاً سفته بازاری که به جای ظرفیت سودسازی در دارایی، تمایل بیشتری به خرید و فروش سهام دارند). ایجاد می‌کند" [۱۹]. فرهنگ لغت آکسفورد، حساب را شکننده، بی‌اساس، تو خالی یا بی‌ارزش و یک نمایش فریبنده معرفی نموده و معمولاً به رویدادهای تجاری و مالی بی‌اساس و فریبنده اطلاق می‌شود" [۳]. حساب، نوعی پیامد حاصل از سرمایه‌گذاریست که ضعف برخی از جنبه‌های روحی و احساسی بشر را شرح می‌دهد [۱]. حساب، تغییرات قیمتی است که با استفاده از ارزش بنیادی قابل توضیح نمی‌باشد [۱۱]. عوامل بنیادی اشاره به فاکتورهای اقتصادی (نظیر: جریان نقدی و نرخ‌های بهره) دارد که با یکدیگر قیمت دارایی را تعیین می‌نمایند.

▪ سیر شکل‌گیری حساب‌ها

کیندل برگر (۲۰۰۰) و سورنت (۲۰۰۳) سناریوی عمومی که در تمامی حساب‌های تاریخی معمول است را به صورت جا به جایی، رشد و افزایش قیمت‌ها، فراوانی (وفور)، مرحله بحرانی، شکست و سقوط بیان می‌دارند [۱۲].

▪ پیشینه تحقیق

پیامدها و بی‌ثباتی‌های ناشی از حساب، سبب شده بسیاری از محققان از دیرباز در پی درک این پدیده، دلایل شکل‌گیری آن، روشی برای تشخیص وجود آن و همچنین راهی برای پیش‌بینی زمان سقوط آن باشند. به برخی از این مطالعات در ذیل اشاره شده است:

* اولین تحقیق در مورد حساب‌ها در بازار سهام، توسط رابرت شیلر در مقاله‌ای با عنوان "آیا تغییرات قیمت سهام، تابعی از ارزش‌های جریان سود نقدی زمان حال و آینده است یا خیر؟" ارائه شد. شیلر در این مقاله با استفاده از داده‌های سالانه ۱۹۷۹-۱۸۷۱ و بهره‌گیری از آزمون کران واریانس به این نتیجه رسید که تغییرات قیمت‌ها به وسیله تغییر در ارزش حال جریان سود نقدی، قابل توضیح نیستند [۲۰].

* Boucher (۲۰۰۳) با استفاده از تست بلانچارد - واتسون (۱۹۹۲) وجود حساب‌های تورمی عقلایی را در بازار سهام آمریکا از ۱۸۷۱ تا ۲۰۰۱ و برای فرانسه از ۱۹۵۱ تا ۲۰۰۲ تأیید نمود. وی بوسیله مدل MTAR در بلندمدت، وجود حساب‌های تورمی عقلایی را برای ایالات متحده و فرانسه در دوره‌های مذکور رد کرد [۶].

* کاوستز و سرلیتز (۲۰۰۵)، با استفاده از تکنیک هم‌انباشتگی کسری و مدل ARFIMA به بررسی وجود ریشه واحد در لگاریتم قیمت-سود سهام شاخص S&P500 و این فرضیه که شوک‌های برون‌زا آثار همیشگی دارند پرداختند. بر طبق نتایج تجربی، فرضیه صفر یعنی وجود ریشه واحد و در

۵- چارلز کیندلبرگر، پروفیسور دانشگاه MIT و مولف کتاب معروف "شیدایی‌ها، هراس‌ها و سقوط‌ها: تاریخچه‌ای از بحران‌های مالی"

¹⁰- New Palgrave: a Dictionary of Economics

¹¹- continuous

نتیجه وجود حباب عقلایی در شاخص به شدت رد می شود، که بیانگر آن است که لگاریتم قیمت- سود سهام، نوعی فرایند میانگین معکوس است [۱۳].

* بروکس و کاتساریس در سال ۲۰۰۶ به بررسی حبابسفته بازی در شاخص صنعت S&P500 در دوره زمانی ۱۹۷۶-۲۰۰۱ با استفاده از رویکرد تغییر رژیم پرداختند. آنها در این پژوهش به این نتیجه رسیدند که طی دوره مورد بررسی، در بیش از ۷۰٪ از شاخص S&P500 و ۷ شاخص از ۱۰ شاخص مرکب صنعت رفتار شبه حباب دیده می شود و این رفتار به خصوص در شاخص قیمتی صنایع IT، مخابرات و ارتباطات و رسانه بیشتر مشهود است [۹].

* نانز و دی ای سیلوا (۲۰۰۸)، با استفاده از هم انباشتگی متعارف و هم انباشتگی آستانه ای به بررسی وجود حباب در ۲۲ بازار سهام نوظهور پرداختند. ۶ مدل هم انباشتگی یوهانسن، انگل-گرنجر، TAR، M-TAR، TAR سازگار و M-TAR سازگار بررسی شدند. طبق نتایج، تمامی بازارهای نوظهور وجود حباب را نشان دادند. ۱۸ بازار دارای حباب-های انفجاری^{۱۲} و ۴ بازار فاقد حبابهای انفجاری (شیلی، اندونزی، کره و فیلیپین) بودند [۸].

* چان و وو (۲۰۰۸) با بسط تحلیل Wu و Xiao (2002) آزمون جدیدی را برای شناسایی وجود حباب های ریشه انفجاری تصادفی مطرح کردند. آنها آزمون خود را روی سری داده های شاخص ماهانه قیمت سهام، بازده های سود و شاخص های قیمت برای بازارهای سهام تایوان، مالزی، اندونزی، فیلیپین، تایلند و کره جنوبی در بازه زمانی مارس ۱۹۹۱ تا اکتبر ۲۰۰۵ اجرا کردند. نتایج نشان دهنده شواهدی از وجود حباب در بازارهای تایوان، مالزی، اندونزی، فیلیپین و بود، اما هیچ مدرکی دال بر وجود حباب در کره جنوبی مشاهده نشد [۱۰].

* لین و همکاران (۲۰۰۹) مدل خودسازگار LPPL را برای حبابهای مالی عقلایی روی شاخص S&P500 در بازه زمانی ۳ ژانویه ۱۹۵۰ تا ۲۱ نوامبر ۲۰۰۸ به کار گرفتند. نتایج حاصل نشان می دادند که مدل LPPL در سطح اطمینان ۹۹/۹٪ به درستی زمان های بحرانی را در اکتبر ۱۹۸۷، اکتبر ۱۹۹۷، آگوست ۱۹۹۸ و پایان حباب ITC را در ۳ ماهه اول (ربع اول) سال ۲۰۰۰ میلادی تشخیص داد [۱۵].

* کیجئرو و همکاران (۲۰۰۹) با استفاده از مدل قانون توانی تناوب لگاریتمی سورت بر ای داده های برآزش روزانه بازار سهام برزیل، توانایی شناسایی توسعه حبابها و سقوطها در تک تک سهام را آزمون می کنند. آنها نشان دادند که الگوریتم ژنتیک می تواند برای کالیبره کردن پارامترهای معادله قانون توانی تناوب لگاریتمی به کار رود و مفید بودن این روش در تخمین لایکلی هود (درستنمایی) سقوطها با استفاده از آماره های ناپارامتری را آزمون می کنند. نتایج تجربی نشان دادند که این روش در پیش بینی سقوطهای مالی مفید می باشد [۹].

¹²- Explosive Bubble

* ژو و سورنت (۲۰۰۹) به مطالعه موردی حساب‌های سفته‌بازی در بازار سهام آفریقای جنوبی طی دوره ژانویه ۲۰۰۳ تا می ۲۰۰۶ پرداختند. آنها حساب را شتاب سریع‌تر از نمایی با نوسانات چشمگیر متناوب لگاریتمی تعریف می‌کنند و مشخصات تناوب لگاریتمی این سهام را با استفاده از روش مختلف "برازش پارامتری با معادل LPPL، مدل Weierstrass، روش دترندکننده پارامتری و تحلیل H,q" مورد بررسی قرار دادند، ۴ تکنیک برآوردهای سازگاری را برای مقدار فرکانس لگاریتم زاویه ω_1 ارائه دادند. همچنین آنها داده‌های ۶ ماه پس از زمان تحلیل را در نظر گرفته و مشاهده کردند که تعداد زیادی از سهام در بازار آفریقای جنوبی یک افت ناگهانی و شدید را در نیمه ژوئن ۲۰۰۶ داشته‌اند که با زمان بحرانی (t_c) پیش‌بینی شده برای برخی از سهام (نه تمام سهام) مطابقت دارد و نشان‌دهنده این می‌باشد که سقوط کوچک رخ داده در حدود نیمه ژوئن ۲۰۰۶ صرفاً اصلاحی جزئی بوده که شتاب حسابی مجدد خود را تا پایانش در ۲۰۰۷ از سرگرفته است [۲۶].

* باستیانسن و همکاران با استفاده از روش LPPL به تحلیل سری‌های زمانی شاخص مرکب سهام شانگهای (SSE) در دوره ۱۵ اکتبر ۲۰۰۸ تا ۹ جولای ۲۰۰۹ پرداختند. نتایج تحلیل، اثر واضحی از وجود حساب را نشان داد، همچنین آنها پیش‌بینی از محتمل‌ترین تاریخ سقوط حساب (۱۷-۲۷ جولای ۲۰۰۹ با ۲۰٪-۸۰٪ فاصله اطمینان) ارائه دادند [۵].

* بری و جوزف (۲۰۱۰) با استفاده از روش LPPL به بررسی شاخص بازار سهام هانگ‌سنگ در دوره ای بالغ بر ۳۰ سال پرداختند. آنها ۱۱ سقوط را در بازار هانگ‌سنگ در دوره ۱۹۷۰-۲۰۰۸ شناسایی کردند. آنها با برازش LPPL توانستند سقوط مهم در شاخص هانگ‌سنگ را در افت اخیر جهانی پیش‌بینی کنند [۷].

* جیانگ و همکاران (۲۰۱۰) با استفاده از روش LPPL به شناسایی حساب‌های قیمتی و پیش‌بینی سقوط‌های متعاقب بازار آن در سال‌های ۲۰۰۵-۲۰۰۷ و ۲۰۰۸-۲۰۰۹ در شاخص شن زن و شانگهای چین پرداخته‌اند. آنها وجود و تاریخ بحرانی هر دو حساب و همچنین زمان سقوط آنها را با استفاده از این مدل پیش‌بینی نمودند [۱۲].

* پله و مارینسکیو (۲۰۱۲) به بررسی رفتار حساب با استفاده از مدل قانون توانی تناوب لگاریتمی در بورس سهام بخارست پرداختند. آنها از داده‌های روزانه شاخص BET-FI در بازه زمانی ۲۰۰۱-۲۰۰۸ استفاده کردند و نتیجه گرفتند مدل LPPL ابزار مفیدی برای تشخیص رفتار حساب است و قابلیت پیش‌بینی نقطه بحرانی را داراست [۱۷].

* واعظ و ترکی (۱۳۸۷)، در پژوهش خودبه بررسی وجود یا عدم وجود حساب قیمتی در بازار سهام ایران با استفاده از تکنیک RALS و کاربرد روش شبیه‌سازی مونت کارلو پرداخته‌اند. یافته‌های پژوهش نشان دادند که قیمت سهام از مسیر تعادلی بلندمدت منحرف شده، بنابراین در بازار سرمایه ایران وجود حساب قیمت به اثبات می‌رسد [۴].

* سعید صمدی، محمد واعظ برزانی، محمد رضا قاسمی (۱۳۸۸) در پژوهش خود تحت عنوان تحلیل رفتاری شکل گیری حساب قیمت در بازار

سرمایه (مطالعه موردی بورس اوراق بهادار تهران ۱۳۷۶-۱۳۸۷) پس از استخراج فرایند حباب به وسیله شکل فضای حالت و فیلتر کالمن، به محاسبه اندازه تأثیر این رفتار بر جزء حباب پرداخته اند. نتیجه حاصل از این پژوهش نشان می‌داد که فرایند حباب عقلایی تصادفی در بورس سهام تهران به وسیله رفتار رمه‌ای و مُدگرایی و عواملی که باعث کاهش امنیت روانی عاملین بازار می‌شود، قابل توضیح است [۱].

۳- فرضیه تحقیق:

در بازار سهام تهران و در دوره مورد بررسی، در بازه زمانی ۱۳۸۷-۱۳۸۴ پدیده حباب قیمتی رخ داده است.

۴- روش‌شناسی تحقیق

روش تحقیق در این پژوهش، توصیفی است و در تحقیقات توصیفی از نوع پس‌رویدادی می‌باشد. همچنین از نوع تحقیقات موردکاویاست؛ چرا که مقطع خاصی از زمان را بررسی می‌نماید. جامعه آماری پژوهش، داده‌های شاخص قیمت و بازده نقدی بازه زمانی ۱۳۸۴-۱۳۸۷ است. جهت گردآوری اطلاعات از داده‌های مرکز آمار، داده‌های بورس اوراق بهادار و شرکت فناوری بورس، داده‌های بانک مرکزی و همچنین از منابع کتابخانه‌ای و مقالات منتشر شده در نشریات تخصصی داخلی و خارجی استفاده شده است. جهت محاسبه متغیرها، از نرم افزارهای MATLAB و Excel استفاده شده است. در این پژوهش برای شناسایی^{۱۳} حباب‌ها و پیش‌بینی^{۱۴} زمان بحرانی^{۱۵} آنها، سری‌های زمانی مورد نظر با یک مدل قانون توانی تناوب لگاریتمی (LPPL)^{۱۶} برازش می‌شوند. همچنین جهت اطمینان از وجود تناوب لگاریتمی در داده‌ها، تحلیل طیفی Lomb را روی داده‌ها به دو روش دترند و مشتق $D_q^H f(x)$ اجرا کرده و نتایج را با مقادیر به دست آمده از برازش مدل مقایسه نموده ایم.

۱-۴- مدل تحقیق

اکثر دیدگاه‌ها برای شرح و توضیح سقوط‌ها به جستجوی مکانیزم‌های اثراتی می‌پردازند که در مقیاس زمانی بسیار کوتاهی (ساعت‌ها، روزها یا حداکثر هفته‌ها) عمل می‌کنند. سورنت و همکاران دیدگاه کاملاً متفاوتی را پیشنهاد می‌دهند. به اعتقاد آنها علت اصلی بیشتر سقوط‌ها را باید از ماه‌ها و سال‌ها قبل از آن سقوط جستجو کرد [۲۱]. از نظر آنها سقوط بدین سبب رخ می‌دهد که بازار وارد یک مرحله (حالت) بی‌ثبات شده و هر فرایند یا اختلال کوچکی می‌تواند منجر به بی‌ثباتی شود. خط کشی که به طور عمودی بر روی یک انگشت قرار گرفته را در نظر بگیرید، این حالت بسیار بسیار بی‌ثبات، عاقبت در اثر یک حرکت کوچک دست یا وزیدن یک نسیم فرو خواهد افتاد. می‌توان گفت اساساً سقوط به واسطه موقعیت ناپایدار می‌باشد. از نظر سورنت و همکاران، اساساً یک سقوط، منشأی درونی دارد و شوک‌های بیرونی صرفاً به عنوان عوامل محرک (جرقه‌زننده)^{۱۷} به کار می‌روند [۲۲]. سورنت و همکاران دو ادعای ذیل را مطرح می‌کنند:

۱. وجود یک حباب را می‌توان به طور کمی پیش از پایان (انتقال) آن مشخص کرد.
۲. پایان حباب درجه‌ای از قابلیت پیش‌بینی را داراست [۱۲].

¹³- detecting

¹⁴- predicting

۳- زمان بحرانی (t_c) زمانی است که یک حباب به صورت یک شکست یا تغییر رژیم پایان می‌یابد.

¹⁶- log periodic power law (LPPL) model

¹⁷- triggering factors

برای تحقق این دو ادعا، سورنت و جوهانسن^{۱۸} (از سال ۱۹۹۵ تا سال ۲۰۰۲)، ژو^{۱۹} (از سال ۲۰۰۲)، گروه FCO در ETH زوریخ (از سال ۲۰۰۸)، مجموعه‌ای از مدل‌ها و تکنیک‌ها را در مرزهای بین اقتصاد مالی^{۲۰}، مالی^{۲۱} رفتاری^{۲۱} و فیزیک آماری^{۲۲} توسعه دادند و مدل قانون توانی تناوب لگاریتمی (LPPL)^{۲۳} را به عنوان ابزاری منعطف برای تشخیص حساب‌ها توسعه دادند که سقوط‌های بازار سهام را با قانون توانی ویژه‌ای با نوسانات دوره‌ای (مطرح شده توسط سورنت و همکاران) مرتبط می‌سازد. مدل قانون توانی تناوب لگاریتمی دو جزء اصلی دارد:

۱. رشد فوق‌نمایی^{۲۴}، که منجر به زمان بحرانی می‌شود، نشانه این است که رشد قیمت با دوام نیست (قانون توانی)^{۲۵}.

۲. نوساناتی که به طور فزاینده با نزدیک شدن به زمان بحرانی سریع‌تر می‌شوند. (تناوب لگاریتمی)^{۲۶} این نوسانات عمدتاً با تغییرات سریع و آشکار عقاید سرمایه‌گذاران در این زمان (بحرانی) مرتبط است [۱۴].

سورنت و جوهانسن، لیو و مانگنا نشان دادند که این مدل می‌تواند تغییر در نوسانات تناوب لگاریتمی قیمت‌ها را که مربوط به سقوط‌های بازار (مالی) هستند، در طول زمان اندازه بگیرد [۷]. مزیت مهم روش LPPL نسبت به دیگر روش‌های ارزیابی ریسک مالی این است که این روش علاوه بر تشخیص حساب به پیش‌بینی تاریخ بحرانی حساب نیز می‌پردازد. مدل قانون توانی تناوب لگاریتمی که در این پژوهش استفاده شده، به صورت ذیل می‌باشد:

$$Y_t = A + Bx^m + Cx^m \cos(\omega \ln x + \phi) \quad (1)$$

$$x = t_c - t$$

که در آن:

Y_t : قیمت یا لگاریتم قیمت در زمان t ، A : مقدار Y_t اگر حساب تا زمان بحرانی t_c ادامه پیدا کند، B : ضریب افزایش Y_t در واحد زمان تا زمان شکست می‌باشد، C : دامنه نوسانات، m : توان رشد قانون توانی، ω : فرکانس نوسانات طی دور ϕ حساب، t_c : زمان بحرانی، t : متغیر زمان ($t < t_c$) است. Bx^m شتاب سریع‌تر از نمایی قیمت‌ها را به واسطه مکانیزم‌های بازخور مثبت توضیح می‌دهد. عبارت $\cos(\omega \ln x + \phi)$ اصلاحی برای رفتار فوق‌نمایی است.

یک سری زمانی (مانند قیمت سهم) بین تاریخ‌های شروع (t_1) و پایان (t_2) در نظر گرفته می‌شود. از طریق تغییر t_1 و t_2 می‌توان ثبات پارامترهای برازش‌کننده را نسبت به نقاط شروع و پایان بررسی کرد

¹⁸ - Sornette, Anders Johansen

¹⁹ - Wei-Xing Zhou

²⁰ - financial economics

²¹ - behavioral finance

²² - statistical physics

²³ - Log periodic power Law

²⁴ - Super-exponential growth

²⁵ - Power Law

²⁶ - Log-Periodicity

برازش فرمول (۱) برای هر خط سیر قیمت، متناظر با انتخاب مقادیر مشخصی برای پارامترهای مدلی باشد؛ لذا با تغییر مناسب پارامترهای مدل می‌توان آن را بر هر مجموعه داده ای برازش نمود. پس برای هر یک از پارامترهای مدل محدودیت‌هایی (۲) در نظر گرفته می‌شود که بخشی از این محدودیت‌ها قیود ریاضی جهت رفتار صحیح تابع LPPL و برخی دیگر از قیود مطرح شده مانند قیود $t_c > 0$ و $t_c > t_2$ ، قیودی عقلانی برای مسئله می‌باشند؛

$$\begin{aligned} & \text{با این} \\ & \text{شروط، رژیم - (۲)} \\ & t > 0, \quad t_c > t, \\ & A > 0, \quad B < 0, \end{aligned}$$

هایی انتخاب

می‌شوند که شتاب لگاریتم قیمت در آنها سریع‌تر از شتاب نمایی است و در نقطه شکست دارای شیبی واگرا هستند. برای برازش مدل LPPL روی داده‌های واقعی، نخست می‌بایست معیار برازندگی مناسبی را تعریف نمود. بدین منظور تابع زیر که همان تابع مجموع مربعات خطاست، در نظر گرفته می‌شود:

(۳)

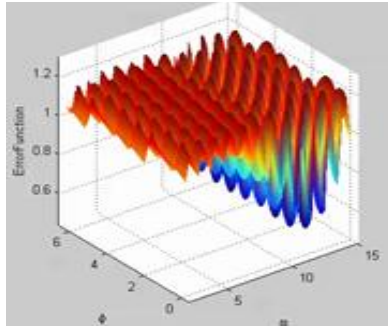
که در آن P قیمت واقعی و \hat{P} قیمتی است که از رابطه LPPL بدست می‌آید.

با توجه به رابطه (۱) و (۳) تابع فوق یک تابع غیرخطی می‌باشد؛ از این رو می‌بایست جهت برازش مدل LPPL روی داده‌ها، از روش‌های حل عددی معادلات غیرخطی استفاده نمود. یکی از روش‌های مناسب برای حل این معادلات روش لونیگ-مارکوورت^{۲۷} است که یکی از کارآمدترین الگوریتم‌های برازش منحنی‌ها می‌باشد. این روش، راه حلی عددی برای حداقل‌سازی توابع (عموماً غیرخطی) در تمام فضای پارامترهای تابع فراهم می‌کند. روش لونیگ-مارکوورت، هم از پایداری و هم از سرعت مناسب برخوردارست. در واقع این روش ترکیبی از روش‌های گوس-نیوتن^{۲۸} و گرادیان-دیسنت^{۲۹} می‌باشد. ضعف بزرگ این روش‌ها اینست که در اولین جواب بدست آمده، متوقف می‌شوند، در واقع از دید مسأله مینیمم‌سازی، در نقطه مینیمم محلی، نه لزوماً مینیمم مطلق متوقف می‌شوند (شکل شماره ۱).

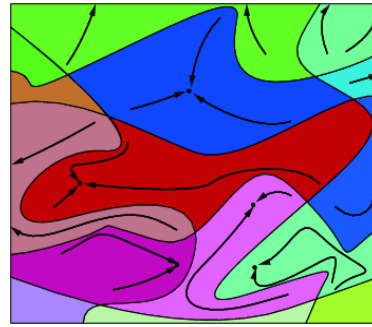
²⁷- Levenberg-Marquardt algorithm (LMA)

²⁸- Gauss-Newton

²⁹- Gradientdescent



شکل (۲) - نمونه‌ای از نقاط مینیمم محلی داده‌های شاخص قیمت و بازده نقدی تهران



شکل (۱) - حساسیت روش لونیگ-مارکوارت به انتخاب نقطه اولیه و توقف الگوریتم در نقاط مینیمم محلی

با توجه به شکل (۲)، شاخص قیمت و بازده نقدی تهران دارای تعداد زیادی نقطه مینیمم محلی است و امکان به دام افتادن و توقف در هر یک از این نقاط بسیار می‌باشد. جهت فائق آمدن به این نقیصه می‌توان از روش‌هایی مانند جستجوی تصادفی، الگوریتم ژنتیک، شبیه سازی حرارتی، جستجوی ممنوعه و ... استفاده نمود. اما از آنجا که ذات این الگوریتم-ها گسسته می‌باشد، در نتیجه جواب آنها نیز گسسته خواهد بود و در حقیقت نزدیک به نقطه مینیمم و نه لزوماً خود آن نقطه می‌باشد. بدین جهت پس از اجرای این الگوریتم‌ها چند جواب برتر آنها به عنوان نقاط شروع به الگوریتم لونیگ-مارکوارت داده می‌شود تا نقاط مینیمم متناظر هر یک بدست آیند، سپس بهترین جواب از بین آنها به عنوان مینیمم مطلق انتخاب می‌شود.

با توجه به این که دامن جستجوی جواب با تعداد متغیرهای مسئله به صورت توانی بزرگ می‌شود. لذا اگر بتوان به طریقی تعداد متغیرهای مسئله را کاهش داد، سرعت دستیابی به جواب و تعداد تکرارهای لازم برای آن به طرز چشمگیری کاهش می‌یابد. از این رو، با بازنگری در فرمول LPPL و نوشتن آن به صورت ذیل:

(۴)

ملاحظه می‌شود که معادله LPPL نسبت به سه پارامتر A, B, C ، با فرض داشتن ۴ پارامتر دیگر مدل $(m, \omega, t_c, \varphi)$ ، خطی می‌باشد. در نتیجه بهترین تخمین خطی برای A, B, C با داشتن ۴ پارامتر غیرخطی دیگر از رابطه زیر بدست می‌آید:

(۵)

با تغییر بازه زمانی داده‌های استفاده شده برای عمل برازش و تکرار مراحل بالا برای هر بازه، رفتار آماری هر پارامتر معین شده و تخمینی از t_c بدست می‌آید. این تغییر بازه زمانی برای آزمودن حساسیت پارامترها نسبت به فواصل برازش متغیرها $[t_1, t_2]$ است (در واقع تغییرات پارامترهای برازش را با تغییر بازه زمانی می‌آزماید). بدین جهت

استراتژی ثابت بودن یک نقطه و متغیر بودن نقطه دیگر اتخاذ می‌شود. به طور مثال، اگر t_2 ثابت باشد، پنجره زمانی بر حسب t_1 که با یک گام ۵ روزه به t_2 نزدیک می‌شود؛ منقبض می‌گردد. اگر t_1 ثابت باشد، پنجره زمانی بر حسب t_2 که با یک گام ۵ روزه از t_1 دور می‌شود؛ بسط می‌یابد. از بین برآزش‌های مختلف، برآزش‌هایی که شروط LPPL را برآورده می‌کنند، انتخاب می‌شوند. نسبت این برآزش‌ها به کل برآزش‌ها و پراکندگی پارامترهای بدست آمده، ملاک صحت و تطابق داده‌ها با مدل را ارائه می‌کند.

۲-۴- تحلیل طیفی Lomb:

برآزش لگاریتم قیمت‌ها با استفاده از فرمول (۱) حکایت از وجود تناوب لگاریتمی با فرکانس زاویه ای ثابت و پایدار ω می‌کند. به منظور اثبات این ویژگی از تحلیل طیفی Lomb روی داده‌های متناوب لگاریتمی بی‌روند شده و مشتق H و q استفاده می‌شود. با داشتن یک سری زمانی، تحلیل Lomb، یک مجموعه از فرکانس‌ها (ω) و توان مرتبط با هر فرکانس یعنی $P_N(\omega)$ را ارائه می‌دهد. در این پژوهش، فرکانس با توان حداکثر به عنوان فرکانس Lomb یعنی ω_{Lomb} در نظر گرفته می‌شود.

۴ ۴ ۱

رویکرد پارامتری

دترندکننده (روندزدایی پارامتری)

با فرض اینکه داده‌های واقعی مطابق با مدل LPPL رفتار می‌کنند، سری پسماند داده‌های واقعی از طریق فرمول ذیل روندزدایی می‌شود:

(۶)

که در آن:

A و B و m و t_c از طریق برآزش رابطه (۱) روی داده‌ها بدست آمده است. بعد از اجرای تحلیل طیفی Lomb روی سری پسماند بدست آمده با مقیاس زمانی $\ln(t_c - t)$ ، چنانچه مؤلفه غالب طیف حاصل دارای واریانس اندک حول یک فرکانس و هارمونیک‌های آن باشد، وجود تناوب لگاریتمی را اثبات می‌شود. در چنین شرایطی، اگر مقدار ω_{Lomb} با مقدار ω_{fit} بدست آمده از برآزش متناسب باشد، فرض اولیه (داده‌های واقعی مطابق با مدل LPPL رفتار می‌کنند) صحیح است و حباب وجود دارد، در غیر این صورت مدل توصیف‌کننده داده‌ها نیست. [۱۲] مقدار $P_N(\omega_{Lomb})$ بدست آمده با احتمال هشدار اشتباه^{۳۰} ارتباط مستقیم دارد. پرس و همکاران (۱۹۹۶) [۱۸] و ژو و سورنت (۲۰۰۲) [۲۴] به منظور محاسبه احتمال این هشدار اشتباه از دامنه‌ای از مدل‌ها (از نویز سفید ناهمبسته تا نویز با همبستگی وسیع) استفاده کرده و داده‌هایی مصنوعی ایجاد نموده‌اند. آنها احتمال هشدار اشتباه برای نویز سفید را $Pr \ll 10^{-5}$ دانستند و چنانچه داده‌ها دارای رفتارهای قانون توانی با توانی در حدود ۲-۴ و همبستگی وسیع باشند، احتمال هشدار اشتباه را $Pr \ll 10^{-2}$ برآورد نمودند [۱۲].

³⁰ - false alarm

۲ ۴ ۴ تحلیل ناپارامتری (H,q)

مشتق (H,q) قیمت‌های لگاریتمی جهت شناسایی مؤلفه های تناوب لگاریتمی با موفقیت برای سقوط‌های مالی و گسستگی‌های بحرانی استفاده شده است [۲۳ و ۲۵]. تحلیل (H,q) تعمیمی از تحلیل q است که ابزاری برای شرح تغییر ناپذیری مقیاس گسسته^{۳۱} می‌باشد. مشتق (H,q) به شکل ذیل تعریف می‌شود:

(۷)

در این پژوهش، H را در دامنه [-1,1] و q را در دامنه (0,1) تغییر می‌دهیم و مشتق (H,q) را با t_c معین بدست می‌آوریم، سپس تحلیل Lomb را روی سری‌های حاصل اجرا می‌کنیم و پراکندگی ω_{Lomb} حاصل را بررسی می‌نماییم. اگر فرکانس‌های Lomb علاوه بر نزدیکی فرکانس صفر در همسایگی یک فرکانس خاص و هارمونیک های آن متمرکز شوند، دلیلی بر وجود تناوب لگاریتمی است. [۱۲] مزیت تحلیل H,q عدم استفاده از پارامترهای مدل برازش شده در تحلیل طیفی Lomb می‌باشد.

۵- نتایج آزمون حباب سال‌های ۱۳۸۷-۱۳۸۴

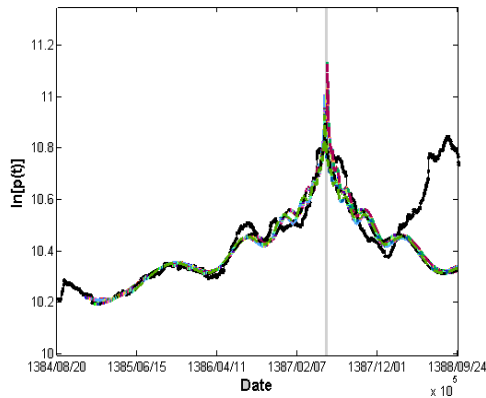
۵-۱- برازش LPPPL با تغییر اندازه پنجره‌ها:

۱. پنجره‌های انقباضی با تاریخ پایان ثابت $t_2=1387/5/12$ و تاریخ شروع t_1 که از $1384/11/9$ تا $1385/5/16$ با گامی ۲ روزه (۲ روز کاری) افزایش می‌یابد.

۲. پنجره‌های انبساطی با تاریخ شروع ثابت $t_1=1384/10/20$ و تاریخ پایان t_2 که از $1387/1/14$ تا $1387/5/8$ با گامی ۲ روزه (۲ روز کاری) افزایش می‌یابد.

در کل تعداد پنجره‌های برازش شده ۱۰۳ می‌باشد (۶۳ برازش در پنجره‌های انقباضی و ۴۰ برازش در پنجره‌های انبساطی اجرا شده است). پس از اجرای برازش، پنجره‌ها با شروط LPPPL فیلتر می‌شوند، در نهایت تعداد پنجره‌های منطبق با شروط LPPPL، ۶۲ در پنجره‌های انقباضی و ۴۰ در پنجره‌های انبساطی می‌باشد. شکل‌های (۴-الف) و (۴-ب) نتایج برازش‌های پنجره‌های انبساطی و انقباضی را نشان می‌دهند. نسبت این برازش‌ها به کل برازش‌ها و پراکندگی پارامترهای بدست آمده (۹۹٪)، صحت و تطابق داده‌ها با مدل را ارائه می‌کند.

³¹- discrete scale invariance



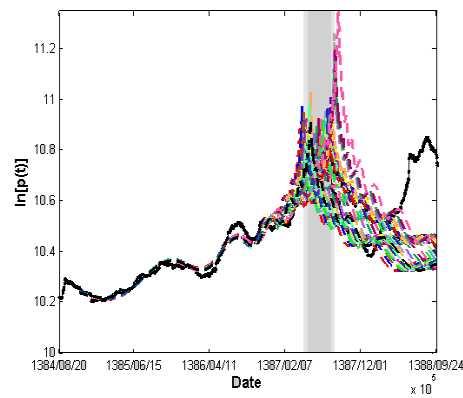
ب- پنجره های انقباضی

۱۳۸۷/۵/۱۳ - ۱۳۸۷/۵/۲۲

:کوانتیل ۵٪ / ۹۵٪

۱۳۸۷/۵/۱۳ - ۱۳۸۷/۵/۲۲

:کوانتیل ۲۰٪ / ۸۰٪



الف- پنجره های انبساطی

۱۳۸۷/۴/۱۴ - ۱۳۸۷/۸/۱۵

:کوانتیل ۵٪ / ۹۵٪

۱۳۸۷/۴/۲۹ - ۱۳۸۷/۸/۲۲

:کوانتیل ۲۰٪ / ۸۰٪

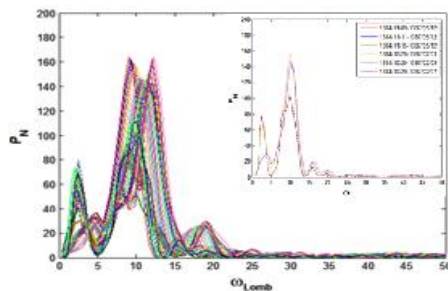
شکل (۴)

ناحیه روشن‌تر، محدوده ۵٪ / ۹۵٪ تاریخ سقوط به دست آمده (پیش‌بینی شده) و ناحیه تیره‌تر، محدوده ۲۰٪ / ۸۰٪ تاریخ مذکور را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود تاریخ سقوط ۱۳۸۷/۵/۱۴ در این بازه قرار می‌گیرد. در این تاریخ شاخص قیمت و بازده نقدی بورس اوراق بهادار تهران به نقطه اوج خود (۴۹۲۳۸.۸۰) رسید و پس از آن سقوط (۴۲٪) خود را آغاز نموده و تا پایان سال ۸۷ ادامه یافت.

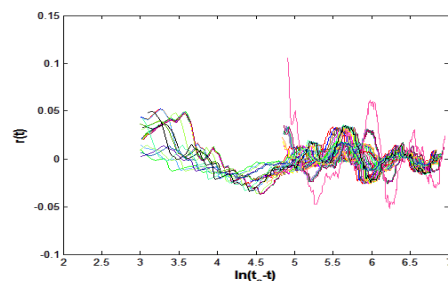
۲-۵- تحلیل Lomb و رویکرد پارامتریک

همان‌گونه که در شکل (۶) دیده می‌شود طیف داده‌های مذکور در نزدیکی یک فرکانس (و هارمونیک آن) متمرکز شده است که شاهدی بر وجود تناوب لگاریتمی می‌باشد. دوره‌نگار Lomb (زوج مرتبه‌های $(\omega_{Lomb}, P_N^{max})$) در شکل

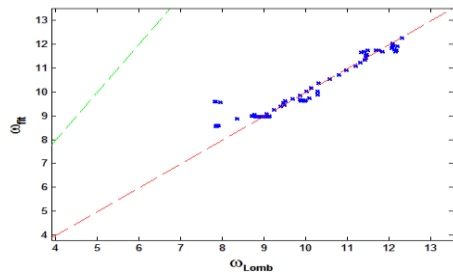
(۷) نشان داده شده است. کوچکترین P_N^{max} (≈ 50) است که ارتباط با هشدار اشتباه را مشخص می‌کند. همان‌گونه که در شکل (۸) مشهود است، اکثر جفت‌های $(\omega_{fit}, \omega_{Lomb})$ روی خط $y=x$ قرار گرفته‌اند که بیانگر تطابق میان $(\omega_{fit}, \omega_{Lomb})$ می‌باشد. لذا فرض اولیه (داده‌های واقعی مطابق با مدل LPPL رفتار می‌کنند) صحیح است.



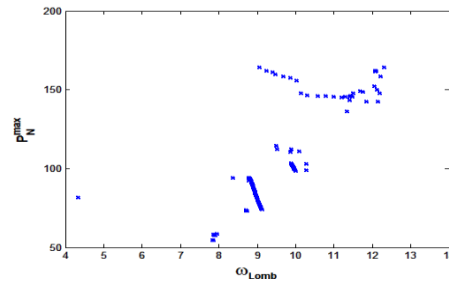
شکل (۶) - طیف Lomb روی پسماندهای دترند شده



شکل (۵) - پسماندهای دترند شده



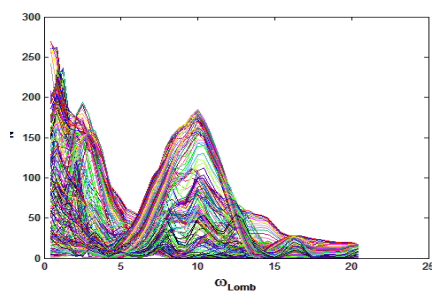
شکل (۸) - توزیع $(\omega_{fit}, \omega_{Lomb})$



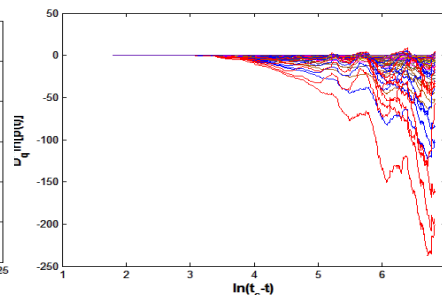
شکل (۷) - توزیع زوج مرتب‌های $(\omega_{Lomb}, P_N^{max})$

۳-۵- تحلیل Lomb، روش ناپارامتریک (H و q):

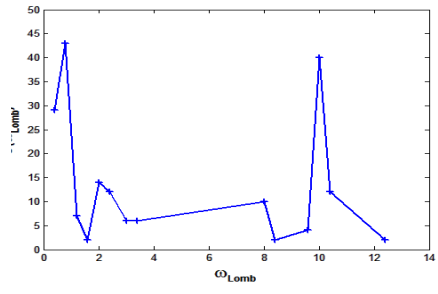
در رابطه (۷)، $f(x) = \ln p(t)$ و $x = t_c - t$ قرار داده و با فرض t_c برابر $1387/5/14$ (نقطه اوج مشاهده شده) برای هر زوج (H و q) مشتق H و q محاسبه می‌نمائیم (شکل ۹). سپس طیف آن با استفاده از تحلیل طیفی Lomb به دست می‌آوریم (شکل ۱۰). بالاترین نقطه اوج دوره‌نگار به دست آمده را به عنوان P_N^{max} و فرکانس آن را به عنوان ω_{Lomb} انتخاب می‌کنیم، بدیهی است که زوج $(\omega_{Lomb}, P_N^{max})$ تابع H و q می‌باشد. با تغییر $q \in [0.1, 0.9], H \in [-1, 1]$ با گام‌های ۰.۱ توزیع $(\omega_{Lomb}, P_N^{max})$ بدست می‌آید (شکل ۱۱). در شکل بدست آمده ۲ خوشه غالب قابل تشخیص است؛ فرکانس مرکزی خوشه اول $\omega_{Lomb}^0 \approx 1.5$ ، خوشه دوم $\omega_{Lomb}^1 = 9.8$ می‌باشد. مقدار کوچک ω_{Lomb}^0 متعلق به مؤلفه‌هایی است که کمتر از یک دوره کامل آنها در بازه زمانی $\ln(t_c - t)$ داده‌ها قرار می‌گیرد. بنابر آزمون‌های متعدد انجام شده روی داده‌های ساختگی (توسط Huang et al., 2000) این نقاط اوج با نوسانات جزئی محتمل‌تر سیگنال نویز یا (و) روند عمومی داده‌ها در مشتق H و q مرتبط می‌شوند. وجود خوشه دوم (و هارمونیک آن) دلیلی بر وجود تناوب لگاریتمی در داده‌ها می‌باشد [۲۳].



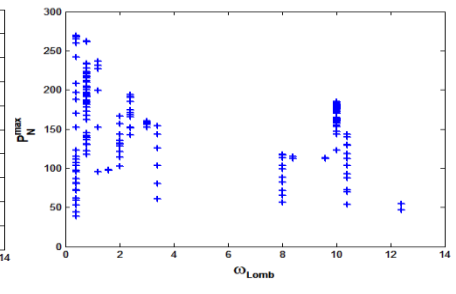
شکل (۱۰) - طیف Lomb



شکل (۹) - $D_q^H [Ln(p_t)]$



شكل (١٢) - $O(\omega_{Lomb})$



شكل (١١) - ω_{Lomb}

۴-۵- نتیجه گیری

در این پژوهش از مدل LPPL برای تشخیص و تخمین زمان شکست حباب قیمت سهام در دوره ۱۳۸۴-۱۳۸۷ در بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است. همچنین جهت اطمینان از وجود تناوب لگاریتمی در داده ها، تحلیل طیفی Lomb با روش های دترند و مشتق $D_q^H f(x)$ روی داده ها اجرا شده است. با توجه به نتایج این آزمون ها در بازه زمانی ۱۳۸۴-۱۳۸۷ پنجره ها با مدل به خوبی برازش شده اند و همچنین تحلیل طیفی Lomb و تحلیل $D_q^H f(x)$ به خوبی وجود تناوب لگاریتمی را تأیید کرده اند، این ناحیه از داده ها رفتاری مطابق با مدل LPPL دارند. لذا با توجه به مدل مذکور، وجود حباب با قطعیت تشخیص داده شده است و فرض پژوهش مبنی بر وجود حباب تأیید می شود.

منابع فارسی

۱. صمدی سعید، واعظ برزانی محمد، قاسمی محمد رضا، تحلیل رفتاری شکل گیری حباب قیمت در بازار سرمایه (مطالعه موردی بورس اوراق بهادار تهران ۱۳۷۶-۱۳۸۷). مجله پژوهشنامه اقتصادی، ۱۳۸۹، شماره ۳۹، ص ۲۷۳ تا ۲۹۷.
۲. عباسیان عزت اله، محمودی وحید، فرزندگان الهام، شناسایی حباب قیمتی سهام عادی بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از مدل ارزش حال. فصلنامه بررسی های حسابداری و حسابرسی، ۱۳۸۹، شماره ۶۰، دوره ۱۷، ص ۷۵ تا ۹۲.
۳. فدایی نژاد محمد اسماعیل، عشقی مجید، بررسی وجود حباب در بورس اوراق بهادار ایران. مجله بورس اوراق بهادار، ۱۳۸۵، شماره ۵۳، ص ۴۴ تا ۴۹.
۴. واعظ محمد، ترکی لیلا، حباب قیمتها و بازار سرمایه ایران، ۱۳۸۷، جلد ۳۱، شماره ۳، ص ۱۹۵-۲۰۷.
5. Bastiaensen, K., Cauwels, P., Sornette, D., Woodard, R., Zhou, W.-X., 2009. The Chinese Equity Bubble: Ready to Burst, <http://arxiv.org/abs/0907.1827>.
6. Boucher, Ch., (2003); Testing for Rational Bubbles with Time Varying Risk Premium and Non-Linear Cointegration: Evidence from the US and French Stock Markets; Université Paris-Nord, CEPN, France, Version: 26 November 2003 (2).
7. Bree, D., Joseph, N. L., 2010, Fitting the Log Periodic Power Law to financial crashes: a critical analysis, [arXiv:1002.1010v1](https://arxiv.org/abs/1002.1010v1) [q-fin.ST]
8. Brooks, C., Katsaris, A., 2006, Speculative Bubble in the S&P500: Was the Tech Bubble Confined to the Tech Sector? ICMA Centre Discussion Papers in Finance DP2006-07, pp: 1-32.
9. Cajueiro, D. O., Tabak, B. M., 2006, Testing for rational bubbles in banking indices, Physica A 366, pp: 365 – 376.
10. Chan, L. H., Woo, K.-Y., 2008, Testing for stochastic explosive root bubbles in Asian emerging stock markets, Economics Letters 99, pp: 185 – 188.
11. Daye, Zh. J., Ismen, K., Malabet, M. P., Misailidou, M., Murra, A., Yook, s.-J., 2005, Introduction to Financial Bubble In Financial Bubbles, S. Jutur, ICFAI University Press, pp: 1-17
12. Jiang, Z.-Q., Zhou, W.-X., Sornette, D., Woodard, R., Bastiaensen, K., Cauwels, P., 2010, Bubble diagnosis and prediction of the 2005–2007 and 2008–2009 Chinese stock market bubbles, Journal of Economic Behavior and Organization 74, 149–162.

13. Koustas, Z., Serletis, A., 2005, Rational bubbles or persistent deviations from market fundamentals?, *Journal of Banking & Finance* 29, pp: 2523–2539.
14. Liberatore, V., 2011, Computational LPPL Fit to Financial Bubbles, [arXiv:1003.2920v2\[q-fin.CP\]](https://arxiv.org/abs/1003.2920v2)
15. Lin, L., Ren, R.-E., Sornette, D., 2009. A consistent model of ‘explosive’ financial bubbles with mean-reversing residuals, Swiss Finance Institute, arXiv:0905.0128, <http://papers.ssrn.com/abstract=1407574>
16. Nunes, M., Silva, S. D., 2008, Explosive and periodically collapsing bubbles in emerging stock markets, *Economics Bulletin*, Vol. 3, No. 46 pp. 1-18
17. Pele, D. T., Mazurencu-Marinescu, M., 2012, Modelling stock market crashes: the case of Bucharest Stock Exchange, *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 58, 533 – 542.
18. Press, W.H., Teukolsky S. A., Vetterling W.T., Flannery B.P., 1988, 1992, *Numerical Recipes in C :The Art of Scientific Computing*(Second Edition), Cambridge University Press, Cambridge, pp: 575-584
19. Siegel, J. J., 2003, What Is an Asset Price Bubble? An Operational Definition, *European Financial Management*, Vol. 9, No. 1, pp: 11-24.
20. Shiller, R. J., 1981. Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends? *The American Economic Review* 71(3), pp: 421–436.
21. Sornette, D., 2003a, Critical market crashes, *Physics Reports* 378, pp: 1–98.
22. Sornette, D., 2003b, Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems, Princeton University Press, Princeton U.K., PP: 1-421.
23. Zhou, W.-X., Sornette, D., 2002b. Generalized q -analysis of log-periodicity: applications to critical ruptures. *Physical Review E* 66, 046111.
24. Zhou, W.-X., Sornette, D., 2002c. Statistical significance of periodicity and log-periodicity with heavy-tailed correlated noise. *International Journal of Modern Physics C* 13, 137–170.
25. Zhou, W.-X., Sornette, D., 2003b. Nonparametric analyses of log-periodic precursors to financial crashes. *International Journal of Modern Physics C* 14, 1107–1125
26. Zhou, W.-X., Sornette, D., 2009, A case study of speculative financial bubbles in the South African stock market 2003-2006, *Physica A* 388, pp: 869-880
27. <http://www.merriam-webster.com>