



فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار

دوره چهارده، شماره پنجاه و چهار، بهار ۱۴۰۲

نوع مقاله: علمی پژوهشی

صفحات: ۲۸۵-۲۶۸

تحلیل و مقایسه الگوهای تحلیل نوسان آماری با روش عددی الگوریتم حرکت قطره برای شاخص کل قیمت سهام بورس اوراق بهادار تهران

محمدرضا ضیایی نجف‌آبادی^۱

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۰۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۱/۰۷

سیدرضا قاضی‌فینی^۲

چکیده

روش‌های مختلفی برای مقایسه قدرت توضیح‌دهندگی و آزمون اعتبار الگوهای روندزدایی به روش‌های حل عددی، با روش‌های هم‌تراز خود در ادبیات علوم مالی و فنی وجود دارد. همچنین مزایای مقایسه‌ی این الگوها، برای روش‌های تحلیل نوسانات شاخص و روندزدایی و پایا نمودن آن نسبت به روش‌های برآوردی و رگرسیون بیشتر است. از این‌رو هدف این پژوهش تحلیل و مقایسه قدرت توضیح‌دهندگی الگوی روش حل عددی با رویکرد برآوردی با روش استفاده از رگرسیون است. در این راستا روش جدید ژئومتریکی حرکت قطره با به‌کارگیری الگوریتم ابتکاری بلاک‌شالز^۱ را با روش برآوردی دیکی‌فولر^۲ تعمیم‌یافته با فرض روندپایایی مورد مقایسه قرار دادیم. جامعه آماری پژوهش شاخص کل قیمت سهام بورس اوراق بهادار تهران بر مبنای مقادیر روزانه از سال ۱۳۹۰ تا انتهای سال ۱۳۹۹ تعیین گردید. نتایج روندزدایی و گزارش قدرت توضیح‌دهندگی الگوها بیان داشت؛ قدرت توضیح‌دهندگی الگوی ژئومتریکی حل قطره از الگوهای دیگر بیشتر است که بیانگر اعتبار بیشتر تحلیل روند حرکت شاخص طبق این الگو نسبت به الگو آماری نامبرده یعنی دیکی-فولر تعمیم‌یافته است.

کلمات کلیدی

الگوی ژئومتریکی حرکت قطره، الگوریتم ژئومتریکی حرکت قطره، روندزدایی

۱- گروه اقتصاد و علوم مالی، دانشکده اقتصاد، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران. Ziyaee.mohamad@yahoo.com

۲- گروه حسابداری، واحد نطنز، دانشگاه آزاد اسلامی، نطنز، ایران. (نویسنده مسئول) Srghf2015@gmail.com

امروزه سیستم‌های دینامیکی پیچیده با صنعت و یا کسب‌وکارها در حوزه بازارهای مالی جدای از علوم دیگر مثل اقتصاد نرون‌شناسی؛ عجین شده است؛ اما پیچیدگی تحلیل سیستم‌های دینامیکی در طول زمان برای محققان کاری مشکل اما قابل انجام است؛ بنابراین هدف این پژوهش پرداختن به تکنیک‌های جدید روندزایی از سری‌های زمانی مثل شاخص کل قیمت سهام بورس و مقایسه‌ی قدرت توضیح‌دهندگی آن با الگوی آماری منتخب یعنی Augmented Dicky- Fuller^۳ است. معمولاً تحلیل سیستم‌های دینامیکی به روش آماری مشروط بر فرض نرمال بودن یا اکتفا به مسئله پایایی سری زمانی است؛ بنابراین ادعای پژوهش مبنی بر این است که به جای تفاضل‌گیری و اکتفا به پایایی سری زمانی متغیر تصادفی؛ شاید بهتر باشد فرض نرمال بودن توزیع متغیر را در نظر نگرفته و به جای برآوردهای آماری از روش‌های تحلیل فرکانس و طول موج به مقوله روندزایی و تحلیل شوک (نوسانات) پرداخت.

امروزه با استفاده از نرم‌افزارهای مخصوص حل معادلات مشتقه عددی، نحوه تحلیل سیگنال سری‌هایی مثل قیمت سهام را به راحتی می‌توان انجام داد درحالی‌که قبلاً اکثر پژوهش‌ها با رویکرد روش‌های آماری بی‌رقیب بود؛ اما اخیراً محققان دریافته‌اند که به دلیل ارزش اطلاعات سری‌های زمانی در سطح متغیر، شاید استفاده از این روش‌ها، ارزشمندتر از انتقال اطلاعات سری زمانی به فضای نرمال و قابل‌برآورد به روش‌های رگرسیونی؛ است [1].

همین فرضیه سبب شد تا این پژوهش به معرفی ادبیات مختصری در زمینه استفاده از الگوریتم‌های جدید ارزیابی عددی مثل الگو ژئومتریک حرکت قطره^۴ برای بورس اوراق بهادار تهران پرداخته و با روش‌های آماری روندپایایی مقایسه و به آزمون این فرضیه بپردازد. در این پژوهش به بررسی مختصری از ادبیات الگوهای حل عددی؛ مانند الگوی کسری از حرکت قطره^۵ که برای یافتن جهت حرکت روند و تحلیل فرکانس از سری‌های زمانی ناپایا مثل شاخص کل قیمت سهام بورس اوراق بهادار پرداخته شد و اساس مار روش ژئومتریک حرکت قطره است که نوع بدیلی از تحلیل حرکت سری‌های زمانی است. همچنین یافتن روندهای حرکت بعدی سری زمانی در این الگوها مستلزم حل عددی دو جمله حرکت است و جمله کوتاه‌تر به نام جمله قطره می‌باشد. همچنین راه‌حل انباشت اطلاعات بلندمدت سری زمانی توسط مؤلفه عددی Hurst جهت تحلیل فرکانس سری زمانی در الگوریتم، طی الگوی کسری از حرکت قطره مورد بررسی قرار گرفت.

در سال ۱۹۴۰ الگوی کسری از حرکت معرفی شد [2]. سپس توسط دیگران Block و Scholes برای حل معادلات کسری از حرکت قطره در زمینه بررسی بازدهی قیمت سهام بازار سهام (S&P(500) مورد استفاده قرار دادند [2].

روش حل Block و Scholes طبق تعریف فیشر بلاک^۱ و ماریو شالز^۲ به شکل رابطه (۱) به عنوان یک روش حل عددی برای الگو حرکت قطرات مطرح شد:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB(t) \quad (1)$$

به طوری که $B(t)$ جمله روند بلندمدت و μ جمله حرکت قطره و σ یک ضریب عرض از مبدأ ثابت عددی به عنوان نقطه‌ی اولیه معرفی شد. به دلیل این که استفاده از این الگو برای سری‌های زمانی بلندمدت دارای محدودیت است روش ژئومتریک حرکت قطره می‌تواند مفیدتر واقع شود [6, 10].

یکی از روش‌های حل عددی بهینه‌یابی حرکت شاخص کل قیمت سهام تحت الگوریتم Fokker و Planck معرفی شد [8]. این روش بیان می‌کند که می‌توان فروض محدودکننده الگوی کسری از حرکت^۳ را با استفاده از الگوی ژئومتریک حرکت قطرات^۴ بسط داد. روش ژئومتریک حرکت قطره بیان می‌دارد که تحلیل سیگنال‌های جمله قطره با فرض گرفتن مقادیر مثبت و منفی می‌تواند نوسانات شاخص را بهتر از الگوی کسری از حرکت توضیح دهد. البته محققان عنوان کردند که الگوی کسری از حرکت^۱ به جای برآورد رگرسیون با مشکل داده‌های اریب، از کارایی بهتری برخوردار است. همچنین برخی دیگر از محققان تأکید کردند که استفاده از روش Gaussian مرتبه q برای تحلیل به روش‌های الگوریتم عددی در گشتاورهای دارای دومرتبه به بالا، برای تحلیل سری‌های زمانی بهتر هستند [8].

همچنین محققان بیان نمودند که برآورد پارامتر Hurst که در الگوی کسری از حرکت مرسوم است را در فیلتر کردن اطلاعات داده‌ها و الگوسازی سیستم‌های دینامیک با جملات حرکت از قدرت توضیح‌دهندگی بیشتری نسبت به روش‌های برآوردی آماری برخوردارند. البته در این تحقیق، الگوریتم Hurst در الگوی کسری از حرکت برای یافتن پارامترهای پویا بر اساس عملکرد بازه‌های منظم زمانی اما طولانی مدت به کار گرفته شده اما عملکرد مؤثر این روش در مقایسه با الگوی ژئومتریک حرکت قطره قابل تأمل است که در این پژوهش هر دو روش مقایسه شده است [4]. در پژوهش‌های دیگران سعی شده الگوی عدم قطعیت با موضوع روند بررسی حرکت سری زمانی با استفاده از روش الگوریتم ابتکاری مورچگان حل شود و محققان به این نتیجه رسیدند که جملات حرکت الگوی مورچگان بیشتر از نرخ یابی مدل‌های آماری در بررسی روند سری زمانی دارای کارایی است [9] [7]. همچنین رویکردهای روندزایی از سری زمانی با تکنیک‌های عددی بیان کردند که در الگوهای کسری از حرکت قطره و الگوی

تحلیل و مقایسه الگوهای تحلیل نوسان آماری با روش ... ضیایی نجف آبادی و قاضی فیینی

ژئومتریکی حرکت قطره، به شکل $X_t = \mu \epsilon(X) + x$ امکان جداسازی جمله نوفه سفید از روند حرکت سری زمانی با به کارگیری روش Gaussian از مرتبه q وجود دارد [12].

این پژوهش به بررسی و تحلیل عددی معادلات مشتقات جزئی به روش Block-Scholes برای الگوی ژئومتریکی حرکت قطره پرداخته شد [11]. بر اساس منابع جدید روش حل Fokker-Planck می‌تواند به جای روش Block-Scholes ضمن امکان تحلیل برای سری‌های زمانی بلندمدت به جای الگوی کسری از حرکت که همیشه اعداد مثبت را اختیار می‌کند؛ برای مقادیری از سری زمانی که شامل اعداد منفی است مفیدتر واقع شود [1].

روش‌شناسی پژوهش

معرفی رویکرد معادله‌ی حرکت ژئومتریکی قطره بر شاخص قیمت سهام

در این پژوهش روش‌های ارزیابی عددی که برگرفته از حل معادلات مشتقات جزئی است؛ برای تجزیه و تحلیل حرکت شاخص کل قیمت سهام انتخاب شده است. در این الگو از تعمیم الگوریتم Fokker-Planck استفاده شد. پیش‌فرض‌های روش حل Fokker-Planck بیان می‌کند که فرکانس‌های قیمت از یک معادله حرکت که در مدل ژئومتریکی حرکت قرار دارد؛ پیروی می‌کند و امکان اختیار کردن مقادیر منفی فرکانس سری زمانی نیز دارد. در این پژوهش معادله حرکت شاخص کل قیمت سهام طبق مطالب فوق فرض اختیار نمودن مقادیر رشد منفی را برای شاخص سهام باز و امکان پذیر می‌گذارد که منظور از تعمیم روش حل Fokker-Planck همین موضوع است. البته الگوی ژئومتریکی حرکت قطره استفاده از گشتاورهای با مرتبه فرد را برخلاف روش الگوی کسری از حرکت امکان پذیر می‌نماید و در مقایسه با روش دیکی فولر نیز برای تحلیل فرکانس نوسان قدرتمندتر است؛ زیرا در صورت وجود ریشه واحد استفاده از روش آماری دیکی فولر برای تحلیل سری زمانی امکان پذیر نیست؛ در صورتی که روش الگوی ژئومتریکی حرکت قطره به راحتی تحلیل فرکانس سری زمانی را در بازه‌های غیر از ۱ و -۱ انجام می‌دهد.

برای تحلیل روش موردنظر بر طبق مطالعات جدید الگوی ژئومتریکی حرکت قطره‌ی پژوهش به شکل معادله (۱) است. [1]

$$X_{(t_0,t)} = I_{(t_0,t)} - I_{(t)} \quad (1)$$

به طوری که $I_{(t_0)}$ شاخص قیمت سهام در زمان t است. $(t > t_0)$. در رویکرد معادله حرکت فوق $X_{(t_0,t)}$ که دارای دو جمله کلی است. $I_{(t_0,t)}$ دارای روند یا همان بردار متغیرهای برون‌زا است و نوفه سفید فرضی

در جمله حرکت $I(t)$ قرار دارد. حال با فرض توزیع Gaussian^{۱۱} از درجه q رابطه حرکت الگوی پژوهش به شکل رابطه (۲) قابل استخراج است:

$$X(t) = \bar{X}_{(t0,t)} + x \quad (۲)$$

که در معادله (۲) $X(t)$ دارای دو جمله قابل تشخیص و قابل بررسی است که $\bar{X}_{(t0,t)}$ شامل برداری از متغیرهای قابل تشخیص است و x شامل جمله نوفه سفید از نوع روش حل Gaussian از درجه q است و برخلاف فرضیه اختصاص عدد منفی تنها مقادیر مثبت شاخص را اختیار می کند و از تابع توزیع نرمال تبعیت نمی کند. بناب؛ این تابع توزیع احتمال x به شرح معادله (۳) است:

$$P_{(x,t)} = \frac{1}{d_t^{1/a}} \frac{1}{C_q} \left[1 - (1 - q) \frac{x^2}{d_t^2} \right]^{1-1/q} \quad (۳)$$

به طوری که d و q و a وابسته به زمان بوده و بقیه به شکل اسکالر به روش عدد محاسبه شده و در الگو حضور دارند. با روش ارزیابی عددی منحنی تحت نرم افزارهایی مثل متلب کمی نیاز به استفاده از عملگرها و توابع ریاضی است تا بتوان جمله حرکت قطره در معادله حرکت شاخص کل قیمت سهام را محاسبه و ترسیم نمود. به همین منظور در حالت کالیبره شده Cq ضریب ثابتی است که از مقادیر گشتاوری $n > q > 1$ برخوردار بوده و بسته به میزان شاخص کشیدگی داده ها عددی بهینه را اختیار کند. مثلاً برای داده های شاخص کل قیمت سهام بورس تهران در این پژوهش مقدار بهینه کشیدگی $n=8$ محاسبه شد که علاوه بر الگوی ژئومتریکی حرکت قطره در الگوی میانگین متحرک سری زمانی شاخص کل قیمت سهام جهت روندزایی نیز از این شاخص کشیدگی ($n=8$) استفاده شده است.

از نظر تئوری ژئومتریکی قطرات آب، توزیع یک متغیر غیرنرمال مثل شاخص کل قیمت سهام در یک روند مشخص می تواند توزیع نمایی را اختیار کند. در این راستا ابتدا جمله ثابت الگو (Cq) به شرح (۴) محاسبه شده است:

$$C_{(8)} = \sqrt{\frac{\pi}{7}} \frac{\Gamma(5)/2(7)}{\Gamma(\frac{1}{7})} \quad (۴)$$

بنابراین فرم تغییر یافته متغیرها؛ چنانچه $\xi = \frac{3-q}{a}$ و برابر t^ξ باشد و معادله حرکت کل جملات $P(x,t)$ شامل توزیع نمایی مشاهدات باشد؛ آنگاه فرم مشتقات جزئی الگو (۲) با توجه به رابطه (۳) به شکل رابطه (۵) است:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = d\xi \frac{\partial^2 p^{2-q}}{\partial^2 x} \quad (۵)$$

تحلیل و مقایسه الگوهای تحلیل نوسان آماری با روش ... ضیایی نجف آبادی و قاضی فیینی

که در این معادله X همان جز دوم معادله (۲) است. با به کارگیری معادله (۲) و برگردان تغییر متغیرها؛ الگوی (۶) حاصل می‌گردد:

$$P(X, T) = \left(\frac{1}{(d \times T)^{\frac{1}{a}}} \frac{1}{Cq} \right) \times \left[1 - (1 - q) \frac{X - \bar{X}(T)^2}{(d \times T)^{\frac{1}{a}}} \right]^q \quad (6)$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای که برای به دست آوردن معادله حرکت حاکم در این پژوهش قابل بیان است. نتایج معادلات فوق در معادله (۷) خلاصه شده است.

$$\begin{aligned} \text{جمله حرکت ۱: } \frac{\partial^2}{\partial^2 x} &= \frac{\partial^2}{\partial^2 X} \\ \text{جمله حرکت ۲: } \frac{\partial}{\partial T} &= \frac{1}{\xi} t^{1-\xi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \bar{X}}{\partial T} \times T \frac{\partial}{\partial X} \end{aligned} \quad (7)$$

با جایگزینی معادله (۷) در معادله (۵) فرم تعمیم‌یافته معادله مشتقات جزئی با در نظر گرفتن $\frac{\partial t}{\partial T} = \frac{t^{1-\xi}}{\xi}$ به شرح ذیل است:

$$\frac{\partial P}{\partial T} = d^\xi \frac{\partial^2 P^{2-q}}{\partial X^2} - \frac{\partial \bar{X} T}{\partial T} \frac{\partial P}{\partial X} \quad (8)$$

جمله d^ξ جمله انتشار دهنده‌ای است که مستقل از تابع توزیع X است و در نتیجه مقایسه بین معادله (۸) و معادله آریس و همکاران (۲۰۲۰) بیان می‌دارد که الگو (۹) را بر اساس روش حل Fokker-Planck می‌توان به صورت ذیل نوشت [1]:

$$\frac{\partial P(X, T)}{\partial t} = \frac{-\partial(d_1 P(X, T))}{\partial x} + \frac{\partial(d_2 P(X, T))}{\partial x^2} \quad (9)$$

بنابراین ضریب جمله انتشار دهنده برای روش Fokker-Planck در الگو $d_2 = d^\xi P(X, T)^{1-q}$ که با معادله‌ی (۶) معادله (۹) را رقم زده است؛ معادله (۱۰) را تشکیل می‌دهد:

$$d_2 = d^{2/a} C_q^{q-1} \Gamma^{(q-1)/(3-q)} \left[1 - \frac{(1-q)[X - \bar{X}(T)]^2}{(d^\xi T)^{2/(3-q)}} \right] \quad (10)$$

همچنین جمله حرکت قابل حل عددی قطره ۱۲ به شکل (۱۱) می‌باشد:

$$d_1 = \frac{\partial \bar{X}(t)}{\partial T} \quad (11)$$

معادله قطره (۱۱) به‌طور کلی میل دارد تا در جهت روند شاخص کل قیمت سهام به پیماید و طبق نظریه Fokker-Planck نشان‌دهنده‌ی میزان مشخصی از حرکت در الگوی ژئومتریک حرکت قطره می‌باشد.

تحلیل فرکانس سری زمانی شاخص با الگوی میانگین متحرک

استفاده از الگوی میانگین متحرک برای حذف روند از سری زمانی توسط محققان بسیاری استفاده شده است. تأکید این روش دارای مزیتی است که به راحتی می توان روند را از میزان مشاهدات سری زمانی استخراج نمود؛ اما علیرغم الگوهای جدید؛ روش الگوهای مثل روش میانگین متحرک یکی از بهترین روش های تحلیل شاخص کل قیمت سهام است. اولین مزیت این روش توجه به انتخاب فاصله مناسب پنجره ها است. هر نقطه از داده ها در زمانی به طور مساوی با نقطه دیگر داده فاصله دارد. یک سری زمانی با پنجره های معین در طول زمان می تواند یک مشاهده مطلوب از استفاده الگو میانگین متحرک را ضمن محاسبه شاخص ها به ما بدهد [1].

معمولاً پنجره ها در بازه زمانی $[t, t+tw]$ هستند که پنجره های تکرار شونده را با داده های غیر مرکزی شاخص در یک نقطه مثل tw یافت می کنند. مثلاً پنجره فوق در حالت یک واحدی، مشاهده بعدی یعنی $[t+1, t+tw+1]$ را تجربه می کند.

tw نشان دهنده اندازه پنجره سری زمانی است که در استفاده از روش اصلی میانگین متحرک ابتدا $K=0$ قرار داده می شود که بیانگر میانگین غیر وزنی است. در حالت $K=1$ مطالعه نشان می دهد که یک روند جزئی از کل میانگین سری زمانی در حال تولید شدن است. در این تحلیل دیگر مقادیر مختلف بین $K=0$ و $K=1$ وجود ندارد؛ بنابراین در این پژوهش از پنجره های کوچک با $K=1$ برای مقایسه الگوی میانگین متحرک با الگوی ژئومتریک حرکت قطره استفاده شده است؛ اما مسیر تا یافتن اندازه ی بهینه پنجره همان بهینه یابی درجه میانگین متحرک است که در این روش ابتدا میزان بهینه ی کشیدگی داده ها محاسبه شده که در فرمول (۱۲) تابع هدف بهینه یاب میانگین متحرک گزارش شده است:

$$K = \frac{\langle u^4 \rangle}{\langle u^2 \rangle^2} \quad (12)$$

که در فرمول فوق براکت: $\langle \rangle$ ؛ بیانگر میانگین زمانی بین دو مشاهده و یک پنجره مشخص است. لازم به یادآوری است که میزان بازه پنجره مناسب عدد ۸ روز بدست آمد که در بخش بعد و به صورت نمودار و جدول نتایج، تحلیل آن گزارش شده است.

بررسی تغییرات و تحلیل حرکت به روش تابع Hurst

تابع Hurst برای برآورد پارامتری حرکت زمانی (t) از یک سری زمانی با فرکانس توزیع نمایی استفاده می کند. نقاط فرکانس در حافظه هایی با عرض (بازه) مساوی در مقیاس لگاریتمی و مقادیر طیف که به طور میانگین در هر جعبه حافظه است؛ انباشت می شود که کسری از واحد زمان است و برای اطلاعات

تحلیل و مقایسه الگوهای تحلیل نوسان آماری با روش .../ ضیایی نجف آبادی و قاضی فینی

انباشته شده توسط تابع Hurst قابل محاسبه است. در حالت استاندارد محاسبه مؤلفه Hurst از برآورد به روش تصادفی مشتقات جزئی^{۱۴} برای سری‌های زمانی که نقش ورودی دارد؛ استفاده می‌شود. این تابع با حل عددی برای جملات مشتقه جزئی تابع (X) در چارچوب تحلیل فرکانس، ضریب Hurst سری زمانی را تخمین می‌زند. محدوده فرکانس‌هایی که باید در روش الگوی کسری از حرکت^{۱۵} لحاظ شود؛ توسط آرگومان‌های ورودی یعنی مقادیر میانگین و انحراف معیار تابع فراوانی^{۱۶} به روش عددی مشخص می‌شود. با توجه به تحلیل الگوی کسری از حرکت برای سری‌های زمانی ورودی، این تابع با انجام محاسبات عددی، ضریب Hurst سری زمانی را محاسبه می‌کند. فرکانس‌ها به بلوک‌هایی با عرض مساوی در مقیاس لگاریتمی تقسیم می‌شوند و میانگین دستگاه الگوی کسری از حرکت را در هر بلوک محاسبه می‌شود.

$$H = \text{HURST}(X) \quad (۱۳)$$

در رابطه فوق ضریب Hurst نماینده حافظه بلندمدت سری‌های زمانی X می‌باشد. در این پژوهش تحت این رویکرد، محاسبه حرکت سری زمانی شاخص کل قیمت سهام یک بار با آزمون مانایی دیکی فولر تعمیم یافته و بار دیگر با روش Hurst انجام شده و در نهایت قدرت توضیح‌دهندگی دو روش طبق فرضیه‌سازی با یکدیگر مقایسه شده است.

معرفی فرضیه‌ها

در این پژوهش یک الگوی ژئومتریک حرکت قطره برای سری زمانی شاخص قیمت سهام ارائه شده و نمونه آماری شامل سری زمانی شاخص کل قیمت سهام بورس اوراق بهادار تهران از ابتدای سال ۱۳۹۰ تا پایان سال ۱۳۹۹ به صورت روزانه است.

چنین معادله‌ای که از الگوی ژئومتریک حرکت قطره تابعیت می‌کند و بر مبنای ساده‌سازی در انجام الگوریتم عددی جمله قطره انجام شده و قدرت توضیح‌دهندگی آن با روش آماری روند پایایی دیکی فولر تعمیم یافته که شامل روندزایی و تحلیل ریشه واحد ساختار نوسانات است؛ مقایسه شد. همانند الگوی کسری از حرکت که شامل یک سری زمانی با توزیع احتمال خاص خود و دارای دو قسمت (۱) روند و (۲) بخش تصادفی است؛ روش حل ژئومتریک حرکت قطره تنها فروض الگوی کسری از حرکت در مورد اختیار کردن ارقام منفی از مشاهدات سری زمانی را کنار می‌گذارد. در الگوهای کسری از حرکت قطرات^{۱۷} با استفاده از معادلات مشتقات جزئی و بهینه‌یابی به سبک ارزیابی عددی تابع توزیع^{۱۸} روند حرکت گزارش گزارش می‌شود؛ در گام اول شامل حل معادله و یافتن جمله اول حرکت قطره است که در کنار آن شاخصه‌های ارزیابی ضریب توضیح‌دهندگی الگو^{۱۹} گزارش می‌شود و در نهایت الگوی آماری دیکی فولر با

الگوهای ژئومتریکی حرکت قطره، الگوی کسری از حرکت و الگوی میانگین متحرک از نظر قدرت توضیح‌دهندگی ارزیابی می‌شود. با توجه به مطالب بیان‌شده فرضیه‌های پژوهش به شرح ذیل است:

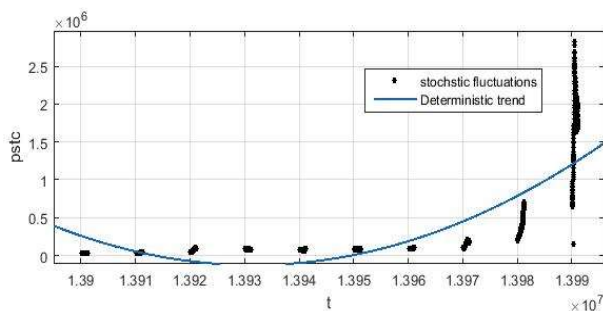
فرضیه ۱: قدرت توضیح‌دهندگی الگوی ژئومتریکی حرکت قطرات از الگو روند-پایا DFA^{20} بیشتر است.

فرضیه ۲: قدرت توضیح‌دهندگی الگوی میانگین متحرک از روند-پایا DFA بیشتر است.

فرضیه ۳: قدرت توضیح‌دهندگی الگوی کسری از حرکت از الگوی روند-پایا DFA بیشتر است.

تجزیه و تحلیل و نتایج

در قسمت‌های قبل پیرامون استخراج و حل عددی معادله حرکت GBM صحبت شد. در نمودار (۱) نوسانات شاخص قیمت بر اساس روند توزیع با فرض توزیع نمایی حل عددی شده است که شامل روند کلی سری زمانی و خط روند آن است:

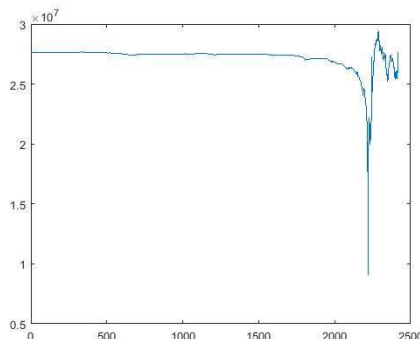


نمودار (۱) خط روند سری زمانی شاخص قیمت سهام

همان‌گونه که مشاهده می‌شود؛ نوسانات تصادفی^{۲۱} از حول خط روندی که حاصل الگوریتم حل عددی الگوی ژئومتریکی حرکت قطره است؛ به تصویر کشیده شده و نشان می‌دهد که از سال ۱۳۹۴ تا پایان سال ۱۳۹۹ خط روند صعودی است. همچنین مشاهدات تصادفی که به صورت نقطه‌ای نشان داده شده در بازه زمانی ۱۳۹۸ تا ۱۳۹۹ بسیار متمرکزتر و با مقادیر بیشتر هستند.

در قسمت قبل پیرامون نحوه به دست آوردن جمله قطره سری زمانی در الگوی ژئومتریکی حرکت قطره کاملاً توضیح داده شد. آنچه در نمودار (۲) مشاهده می‌شود مقادیر dl یا همان جمله حرکت قطره است که پس از محاسبه عددی الگوی حرکت قطره به تصویر کشیده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود از تابستان ۱۳۹۹ فرکانس‌های شاخص قیمت سهام با دامنه نوسان بیش از عدد ۱ اما در بازه‌ی منظم ۳ و ۲ قابل تبدیل به فضای نرمال است.

تحلیل و مقایسه الگوهای تحلیل نوسان آماری با روش ... ضیایی نجف آبادی و قاضی فیینی



نمودار (۲) مقادیر جمله حرکت قطره (dl)

آنچه از محاسبات عددی الگوی ژئومتریکی حرکت قطره مشخص است؛ در تابستان ۱۳۹۹ جمله حرکت افت شدیدی داشته که پس از آن جملات قطره را با نوسانات در دامنه فرکانس اعداد بین ۲ و ۳ طی نموده‌اند و نسبت به قبل از تابستان ۱۳۹۹ که در مسیر روند قبلی با دامنه نوسان [1,1] طی نموده‌اند را نشان می‌دهد. همچنین طبق محاسبات عددی فوق که در جدول (۱) گزارش شده؛ قدرت توضیح‌دهندگی الگوی حرکت قطره ۰/۹۸ است.

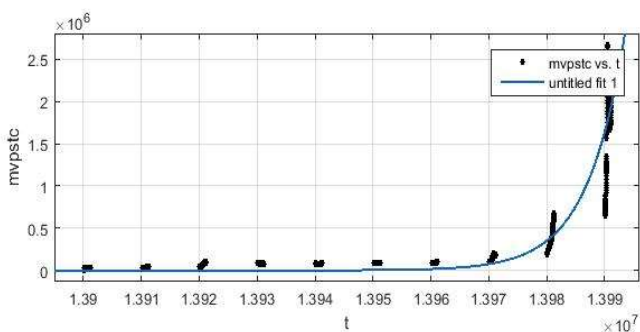
در نمودار (۳) به جای شاخص کل قیمت سهام؛ میانگین متحرک ۸ روزه شاخص قیمت مورد بررسی قرار گرفته است. یافتن روندهای زمانی به دست آمده از شاخص‌بندی قیمت به صورت بازه‌های منظم زمانی یکی از روش‌های کلاسیک تحلیل سری زمانی با نام میانگین متحرک است که منطق گشتاوردهای تعمیم‌یافته نیز بر اساس آن بنا نهاده شده است. برخلاف گشتاوردهای تعمیم‌یافته از درجه ۲ که راه‌حل پایه رگرسیون است، الگو میانگین متحرک به‌طور سیستماتیک برای استفاده از مقادیر با گشتاور از مراتب بالاتر برای توضیح دامنه فرکانس در تحلیل‌های مهندسی به کار می‌آید.

جدول (۱) پارامترهای محاسبه‌شده برای حل عددی حرکت شاخص کل قیمت سهام

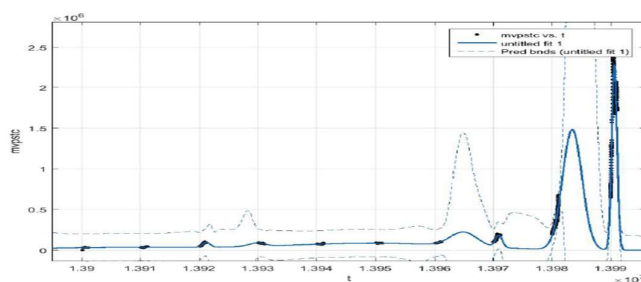
به روش الگوی ژئومتریکی حرکت قطره (GBM)

مقدار	پارامتر
۶۳۰.۶	C ضریب ثابت تابع حرکت با کشیدگی ۸
۲۲۲۵۰۰	A پارامتر اول تابع توزیع معادله حرکت
۱۳۹۹۰۰۰	B پارامتر دوم نمایی تابع توزیع معادله حرکت
RMSE	R^2 ضریب تعیین
۹.۰۳۴E+۰۴	۰.۹۸۰۳

طبق آنچه در بخش قبل عنوان شد؛ مقدار بهینه بازه زمانی طبق بهینه‌یابی کشیدگی داده‌ها برای استفاده در الگوی میانگین متحرک؛ عدد ۸ به‌دست‌آمده است. همچنین روند نمودار میانگین متحرک طبق نمودار (۳) پس از روندزدایی مسیر صعودی برای روند شاخص قیمت سهام را نشان می‌دهد. البته یافته‌های نمودار (۳) روند رشد نمودار (۱) را تأیید می‌کند. همچنین الگوی روندزدایی شده به روش میانگین؛ به‌صورت نمودار (۴) می‌باشد.



نمودار (۳) روند میانگین متحرک قیمت سهام



نمودار (۴) روند زدایی شده به روش میانگین متحرک

بنابر نمودارهای (۳) و (۴)، می‌توان نتیجه گرفت که افت بسیار شدید شاخص قیمت در بازه زمانی تابستان ۱۳۹۹ نوعی کنش بازار به اخبار سیاسی و اقتصادی بوده و عواملی خارج از چارچوب بررسی فواصل زمانی طبق این الگو بوده که بر روند بلندمدت تأثیر قابل ملاحظه‌ای از بابت تغییر دامنه فرکانس سری زمانی شاخص داشته است.

طبق محاسبات عددی در جدول (۲) گزارش‌شده است که قدرت توضیح‌دهندگی الگوی میانگین متحرک ۰/۹۰ است که بیان این نکته است که الگوی میانگین متحرک ۰/۹۰ درصد حرکت روند سری زمانی شاخص قیمت را توضیح داده‌اند و حرکت شاخص کل قیمت سهام را با فرض تابع نمایی کسر

تحلیل و مقایسه الگوهای تحلیل نوسان آماری با روش .../ ضیایی نجف آبادی و قاضی فیینی

نسبی ۱۷۴۵ از ۴۳۸۸ را در بازه‌های زمانی ۸ روزه تعدیل نموده است.

جدول (۲) پارامترهای محاسبه شده برای حل عددی میانگین متحرک

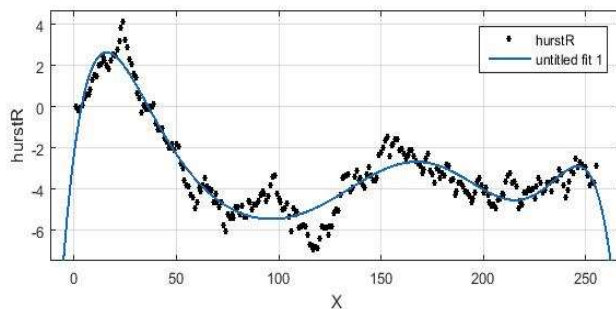
مقدار	پارامتر
$\lambda q =$	$C(q)$ ضریب کشیدگی اوج
۱۷۴۵	A پارامتر اول تابع حرکت میانگین متحرک
۴۳۸۸	B پارامتر دوم حرکت میانگین متحرک
RMSE	R^2 ضریب تعیین
$1.617E+05$	۰.۹۰۲۸

در قسمت قبل مبنای الگو Hurst بر مبنای روش الگوی کسری از حرکت بیان شد. محدوده فرکانس‌ها یا نوساناتی که باید در محاسبات این تابع لحاظ شود؛ توسط آرگومان‌های ورودی یعنی جمله حرکت قطره $d1$ و تابع توزیع فراوانی^{۲۲} که در این الگو توزیع دوجمله‌ای از مرتبه ۸ فرض شده است؛ مؤلفه Hurst را مشخص نموده و وظیفه روندزدایی برای سری زمانی شاخص کل قیمت سهام را انجام می‌دهد. در نمودار (۶) روند حرکت اطلاعات بلندمدت یا همان مؤلفه Hurst سری زمانی شاخص بازدهی کل قیمت سهام تحلیل شده است که به روش الگوی کسری از حرکت محاسبه شده است.

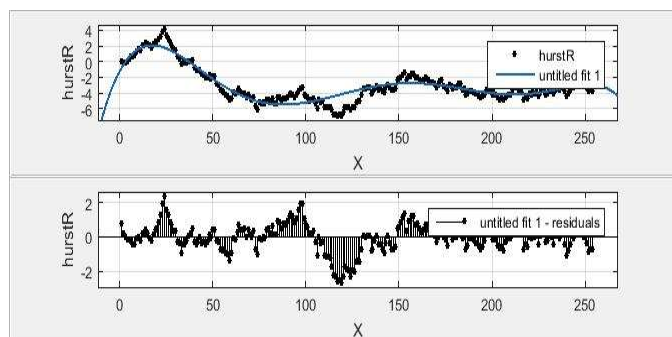
در جدول (۳) پارامترهای محاسبه شده برای حل عددی حرکت شاخص کل قیمت سهام به روش الگوی مقادیر بلندمدت مؤلفه Hurst گزارش داده شده است. آنچه از محاسبات عددی مؤلفه‌های Hurst در نمودارهای (۵) و (۶) مشخص است؛ روند حرکت اطلاعات بلندمدت یا همان مؤلفه Hurst سری زمانی شاخص بازدهی کل قیمت سهام تحلیل شده است. نمودار (۴) بر روندزدایی از شاخص قیمت سهام تأکید دارد و نمودار (۶) جملات نوسان یا همان جملات پسماند تصادفی الگوی چندجمله‌ای گزارش شده از فرم تفاضلی سری زمانی مؤلفه Hurst را نشان می‌دهد که یک مفهوم اعتباری مثل سری‌های پایا از مرتبه اول را در روش حل عددی تابع Hurst دارا می‌باشد.

جدول (۳) نتایج تحلیل الگوی کسری از حرکت

مقدار	پارامتر
$\lambda q =$	$C(q)$ ضریب کشیدگی اوج
$1.826E+06$	A پارامتر اول تابع حرکت میانگین متحرک
$1.399E+07$	B پارامتر دوم حرکت میانگین متحرک
RMSE	R^2 ضریب تعیین
$1.055E+05$	۰.۹۵۹۲



نمودار (۵) مقادیر عددی بلندمدت تابع Hurst



نمودار (۶) مقادیر مؤلفه Hurst به همراه مقادیر تصادفی مؤلفه Hurst

همان گونه که در نمودار (۶) مشخص است نوسانات یا همان تغییر فرکانسها در بازه عددی ۲ تا ۲- می باشد که می توان مفهوم این تغییرات تصادفی فرکانسها را با رویکرد جمله نوفه سفید که در بازه زمانی ۱ و ۱- حرکت می کند؛ تشبیه و مفهوم روندزدایی به روشهای الگوی ژئومتریک حرکت قطره و الگوی کسری از حرکت را درک نمود. طبق محاسبات عددی که در جدول (۳) گزارش شده، قدرت توضیح دهنده الگوی مذکور ۰/۹۵ است که بیان می کند الگوی کسری از حرکت توانسته است ۰/۹۵ درصد حرکت روند سری زمانی شاخص کل قیمت سهام را توضیح دهد.

مقایسه روشهای مختلف روندزدایی و تحلیل روند سریهای زمانی شاخص کل قیمت سهام
در این پژوهش سه فرضیه مطرح شد در راستای تکمیل تجزیه و تحلیلها، آزمون دیکی فولر تعمیم یافته در حالت روند پایایی سری زمانی انجام شده و ضریب تعیین دادهها در سطح متغیر ^{۲۳} و سپس با یک بار تفاضل گیری در حالت روند پایایی برآورد شده است. لازم به ذکر است حالت روند پایایی یکی از بهترین

تحلیل و مقایسه الگوهای تحلیل نوسان آماری با روش ... ضیایی نجف آبادی و قاضی فیینی

روش‌های تخمین آماری است که قدرت روندزدایی بیشتری از حالت‌های دیگر آزمون دیکي فولر تعمیم یافته^۴ دارد. نتایج تحلیل مذکور در جداول (۴) و (۵) گزارش شده است.

جدول (۴) نتایج آزمون دیکي فولر در سطح متغیر

نتیجه		-۰.۴۸۲۱۷۸	آماره DFA
فرضیه وجود ریشه واحد قبول شده و سری زمانی پایا نیست		۰/۹۸۴۴	ارزش احتمال DFA
احتمال	انحراف معیار	ضریب	متغیر
۰.۶۲۹۷	۰.۰۰۱۷۰۸	-۰.۰۰۰۸۲۳	PSTC(1)
۰.۰۰۰	۰.۰۲۰۳۷۲	-۰.۵۳۴۱۴۴	D(PSTC())
۰.۰۰۰	۰.۰۲۲۹۸۱	-۰.۲۳۵۶۰۸	D(PSTC(2))
۰.۰۲۱۴	۰.۰۲۳۴۱۵	-۰.۰۵۳۹۱	D(PSTC(3))
۰.۱۱۹	۰.۰۲۳۴۵۳	۰.۰۳۶۵۷۴	D(PSTC(4))
۰.۰۰۰۱	۰.۰۲۳۴۵۲	۰.۰۸۹۳۹۳	D(PSTC(5))
۰.۰۰۰	۰.۰۲۳۰۱	۰.۱۲۳۲۲۹	D(PSTC(6))
۰.۰۰۰	۰.۰۲۰۳۵۶	۰.۱۰۳۴۰۴	D(PSTC(7))
۰.۳۱۳	۱۵۰۵.۵۸	-۱۵۱۹.۳۵	عرض از مبدأ C
۰.۰۶۸۳	۱.۲۷۱۴	۲.۳۱۸۸۶۲	Trend (مؤلفه روند)
۰.۲۳۱۷۵۹			R-squared (ضریب تعیین)
۲.۰۰۹۰۲۱	دوربین-واتسن	۸۰.۴۱۳۱۷	آماره آزمون F-statistic
		۰/۰۰۰۰	ارزش احتمال (F-statistic))

در جداول (۴) و (۵) نتایج آزمون DFA گزارش شد و مشخص گردید سری زمانی شاخص کل قیمت سهام بین سال‌های ۱۳۹۰ تا پایان ۱۳۹۹ به‌طور روزانه؛ از نوع روند پایا با یک بار تفاضل‌گیری است؛ بنابراین قدرت توضیح‌دهندگی الگو رگرسیون DFA بر مبنای برآورد جدول (۵) عدد ۰/۷۳ است. این عدد مثل الگوهای دیگر حل شده با روش‌های مختلف عددی بیانگر آن است که در مجموع ۷۳ درصد تغییرات روند شاخص قیمت سهام با روش DFA قابل توضیح است.

جدول (۵) نتایج آزمون دیکی فولر با یک بار تفاضل گیری

نتیجه		آماره DFA	ارزش احتمال DFA
فرضیه وجود ریشه واحد رد شده و سری زمانی پایا است		-۱۷.۱۰۸۵۱	۰/۰۰۰۰
احتمال	انحراف معیار	ضریب	متغیر
۰,۰۰۰	۰.۰۸۶۲۷	-۱.۴۷۵۹۶	D(PSTC(1))
۰.۴۶۴۶	۰.۰۸۰۶۱۸	-۰.۰۵۸۹۶	D(PSTC(1),2)
۰.۰۰۰۱	۰.۰۷۲۷۷۶	-۰.۲۹۵۳۵	D(PSTC(2),2)
۰,۰۰۰	۰.۰۶۳۲۲۴	-۰.۳۵۰۰۵	D(PSTC(3),2)
۰,۰۰۰	۰.۰۵۱۵۰۹	-۰.۳۱۴۲۵	D(PSTC(4),2)
۰,۰۰۰	۰.۰۳۷۱۳۸	-۰.۲۲۵۵۹	D(PSTC(5),2)
۰,۰۰۰	۰.۰۲۰۳۳۵	-۰.۱۰۲۹۹	D(PSTC(6),2)
۰.۳۶۴۸	۱۴۳۵.۹۹۴	-۱۳۰۱.۵۵	C (عرض از مبدأ)
۰.۰۵۷۶	۱.۰۳۲۲۶۹	۱.۹۶۱۰۹۴	trend (روند سری زمانی)
۰.۷۳۰۹۳۶		R-squared (ضریب تعیین)	
۲.۰۰۸۸۸۷		۸۱۴.۹۷۶۳	آماره آزمون F-statistic
دوربین-واتسن		۰/۰۰۰۰	ارزش احتمال

جدول (۶) نتایج آزمون فرضیات اول تا سوم

نوع الگو	قدرت توضیح دهنده گی الگو	نوع الگو
الگو GBM	قدرت توضیح دهنده گی الگو GBM	۰/۹۸
مقایسه با روش DFA	قدرت توضیح دهنده گی روش DFA	۰/۷۳
نتیجه آزمون فرضیه یک	از آنجایی که قدرت توضیح دهنده گی الگو GBM از الگو DFA بیشتر است؛ فرضیه اول قبول می شود.	
الگو میانگین متحرک	قدرت توضیح دهنده گی الگو میانگین متحرک	۰/۹۰
مقایسه با روش DFA	قدرت توضیح دهنده گی روش DFA	۰/۷۳
نتیجه آزمون فرضیه دو	از آنجایی که قدرت توضیح دهنده گی الگو میانگین متحرک از الگو DFA بیشتر است؛ فرضیه اول قبول می شود.	
الگو مؤلفه ای Hurst	قدرت توضیح دهنده گی الگوی FBM	۰/۹۵
مقایسه با روش DFA	قدرت توضیح دهنده گی روش DFA	۰/۷۳
نتیجه آزمون فرضیه سه	از آنجایی که قدرت توضیح دهنده گی الگو الگوی FBM از الگوی DFA بیشتر است؛ فرضیه اول قبول می شود.	

جدول (۶) نتایج مقایسه ای قدرت توضیح دهنده گی الگوهای حل شده ی عددی و برآوری را همراه رد یا قبول فرضیات پژوهش گزارش نموده است. آنچه می توان از تجزیه و تحلیل داده ها در بخش تجزیه و تحلیل دریافت این نکته است که اولاً تمام فرضیات پژوهش در سطح تعیین شده؛ توسط شاخص قدرت

تحلیل و مقایسه الگوهای تحلیل نوسان آماری با روش ... ضیایی نجف آبادی و قاضی فیینی

توضیح‌دهندگی الگو قابل‌قبول است. ضمن اینکه بین روش‌های حل عددی، الگوی ژئومتریک حرکت قطره دارای بیشترین قدرت توضیح‌دهندگی بوده و در مقایسه با روش دیکی‌فولر هم قدرت توضیح‌دهندگی بیشتری داشته است.

نتیجه‌گیری

در مجموع الگوی ژئومتریک حرکت قطره با تحلیل در زمینه بررسی و پیش‌بینی نوسانات فرکانس سری زمانی شاخص قیمت روزانه سهام بورس اوراق بهادار تهران مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که قدرت توضیح‌دهندگی این الگو از الگوی برآورد رگرسیونی دیکی‌فولر تعمیم‌یافته بیشتر بوده و از کارایی بهتری برخوردار است. قبل از این مطالعه، آریس و همکاران (۲۰۲۰) همین الگوی ژئومتریک را برای شاخص S&P(500) بررسی نموده و نتیجه گرفتند این شاخص در بازه خاصی به‌غیر از [1,1] که مورد تأکید روش دیکی‌فولر تحت عنوان نوفه‌سفید است؛ در حال نوسان و قابل پیش‌بینی است؛ اما دلیل این‌که هر سه روش الگوی ژئومتریک حرکت قطره، الگوی میانگین متحرک و الگوی کسری از حرکت به‌طور مستقل با روش برآوردی دیکی‌فولر مورد مقایسه قرار گرفت؛ نقطه اشتراک آن سه الگو بر مبنای تکنیک‌های حل عددی بود؛ و این مطالعه نشان داد نباید تنها به روش‌های برآورد رگرسیون در تحلیل نوسان و پیش‌بینی‌ها و اجبار به بررسی تغییرات سری زمانی در فضای توزیع نرمال با انجام تکنیک نرمالیزه کردن سری زمانی اکتفا شود. همچنین قبول فرضیه یک نشان داد که الگو روندزدایی شده ژئومتریک حرکت قطره؛ به‌جای روندزدایی به روش آماری دیکی‌فولر تعمیم‌یافته برتری و دقت بیشتری داشته و اطلاعات داده‌ها در سطح متغیر به خوبی حفظ‌شده و تفاضل‌گیری برای روندپایایی از مرتبه یکدیگر نیاز نیست. فرضیه دوم تأکید داشت قدرت توضیح‌دهندگی الگوی میانگین متحرک از روش روندزدایی دیکی‌فولر بهتر است. البته تأیید فرضیات فوق قصد ندارد که روندزدایی یا پایانمودن داده‌ها با یک بار تفاضل‌گیری به روش دیکی‌فولر تعمیم‌یافته را به‌کلی از زیر سؤال ببرد.

نهایتاً فرضیه سه بر مبنای ادعای مطرح روش الگوی کسری از حرکت با تجمیع اطلاعات بلندمدت سری زمانی شاخص کل قیمت سهام توانست تأیید کند که قدرت توضیح‌دهندگی روندزدایی از سری زمانی مذکور از روش دیکی‌فولر تعمیم‌یافته بهتر است.

البته نتیجه بدیلی که این پژوهش بر مبنای پژوهش آریس و همکاران (۲۰۲۰) به آن دست‌یافت؛ این نکته بود که طبق نمودار (۲) و جدول محاسبات (۱) با استفاده از الگوی ژئومتریک حرکت قطره مشخص شد که دامنه نوسان فرکانس سری زمانی شاخص قیمت سهام بورس اوراق بهادار تهران بین بازه ۲ و ۲- (علی‌رغم ناپایا بودن) از تابستان ۱۳۹۹ تا پایان سال ۱۳۹۹ در حال تغییر بوده است.

منابع

- (۱) شریف زادگان محمد، سهرابی طهمورث، احمد جعفرنژاد چاقوشی، ۲۰۲۰، ارائه مدل بهینه برنامه‌ریزی تولید، تعمیرات و نگهداری و زمان‌بندی کار در شرایط، عدم قطعیت و حل با استفاده از الگوریتم مورچه، مجله مدیریت دانشگاه آزاد اسلامی. سنندج.
- 2) Arias C. K. Michel, H. and Fernando Alonso-Marroquin. (2020). Stationary of detrended price return in stock markets, preprint submitted to Elsevier, Doi: arXiv.1910.01034v2.
- 3) Chen, W. Yan, B. Lian, G. and Zhang, Y. (2016). Numerically pricing American options under the generalized mixed fractional Brownian motion model, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*.451, 180-189.
- 4) Clegg G. (2006), A Practical guide to measuring the Hurst parameter. *International journal of simulation: System Science and technology*, 7(2):3-14.
- 5) Clara-Rahola, J. Puertas, A.M, Sanchez-Granero, M.A, Trinidad-Scgovia, J. (2017). Diffusive and arrestedlike dynamics in currency exchange markets. *Physical review letters* 118, 068301.
- 6) Kolmogorov A. N. (1940) Wiener's spirals and some other interesting curves in Hilbert's space, *USSR Academy of Sciences*, 26.
- 7) Maganini, N, D. Da Silva and Lima F. (2018). Investigation of Multi-fractality in the Brazilian stock market, *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*, 497,258-271.
- 8) Marathe, R. and Ryan S. (2005). On the validity of the geometric Brownian motion assumption, *The Engineering Economist*.50, 159-192.
- 9) Rao, B. (2016) Pricing geometric Asian power options under mixed fractional Brownian motion environment. *Physica: Statistical Mechanics and its Applications*.446, 92-99.
- 10) Wilmott P. Deynne J. Howisen S. (1993). *Option Pricing: mathematical models and computation*, Oxford Financial Press, Oxford, UK.
- 11) Yan Bowen and Wenting Chen, (2014). Option pricing under the generalized mixed fractional Brownian motion model, master thesis, Wollongong University.
- 12) Zhu S. and Chen W. (2010). A Spectral-collection method for pricing perpetual American puts with stochastic volatility, *Applied Mathematics and computation*.

تحلیل و مقایسه الگوهای تحلیل نوسان آماری با روش ... / ضیایی نجف آبادی و قاضی فیینی

یادداشت‌ها :

1 Fokker-Planck

2 Augmented Dicky- Fuller

۳ الگوی مانایی دیکی- فولر تعمیم یافته (DFA)

4 Geometric Brownian Motion(GBM)

5 Fractional Brownian Motion(FBM)

6 Fisher block و

7 Mario Scholes

8 Fractional Brownian Motion

9 GBM

10 Mixed Fractional Brownian Motion

11 Gaussian(q)

12 Drift term

۱۳ بازه اولیه پنجره میانگین متحرک

14 SDF (Stochastic Differential Function)

15 FBM

16 freq.max

17 GBM

18 Curve Fitting

19 R-Square

۲۰ آزمون دیکی- فولر تعمیم یافته برای سری زمانی روند-پای

21 Stochastic fluctuation

22 freq.max

۲۳ سری زمانی شاخص قیمت سهام

24 DFA