Original Article

Utilizing stochastic differential equations for forecasting stock price behavior[1]

Behrouz Piri Iranshahi[*], **Davood Jafari Seresht**[**],
Ali Akbar Gholizadeh[+], **Seyed Ehsan Hosseinidoust**[×]

DOI

Received:
18/04/2024

Accepted:
29/07/2024

Keywords:
Stochastic Differential Equations,
Stock Price,
Prediction, Bourse,
Stock Exchange,
Mellat Bank

JEL Classification:
C15, C22, C58, G10, G17

Abstract

This research examines the efficiency of stochastic differential equation models in predicting stock prices, comparing them with conventional time series models. The study focuses on Geometric Brownian Motion and Heston models, using Mellat Bank's shares (ticker symbol 'VBMELLAT') on the Tehran Stock Exchange as a case study. Price data from 2015 to 2023 analyzed, revealing that the shares exhibit long-term memory, aiding in predictability. The Heston model outperformed others, showing only a 0.0464% absolute error, while the AR time series model also performed well, aligning with the observed long-term memory. The findings suggest that stochastic differential equation models are effective for stock price prediction.

[1] This article is derived from Behrouz Piri Iranshahi's doctoral dissertation with the supervisors of Dr. Davood Jafari Seresht and Dr. Ali Akbar Gholizadeh at Department of Economic, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.

[*] Ph.D. Candidate, Department of Economics, Faculty of Economics and Social Sciences, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran, behrouzpiriiranshahi@gmail.com

[**] Assistant Professor, Department of Economics, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran. (Corresponding Author), d.jafariseresht@basu.ac.ir

[+] Associate Professor, Department of Economics, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran, a.gholizadeh@basu.ac.ir

[×] Assistant Professor, Department of Economics, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran, hosseinidousd@basu.ac.ir

How to Cite: Piri Iranshahi, B., Jafari Seresht, D., Gholizadeh, A., & Hosseinidoust, E., (2024). Utilizing stochastic differential equations for forecasting stock price behavior. *Economic Modeling*, 18(65): 73-103.

1. Introduction

In today's financial landscape, markets serve as crucial channels for directing financial resources from low-yield sectors to high-yield ones, thereby playing a vital role in driving economic growth, creating jobs, boosting investments, optimizing resource allocation, stabilizing monetary and financial variables, and ultimately enhancing societal welfare. Stock prices, as a key component of the capital market, significantly influence the behavior and decision-making of investors, managers, governments, and other stakeholders. A variety of methods and models, each based on different assumptions and methodologies employed to predict stock prices.

2. Research method and data

Random Differential Equations (SDEs) are mathematical tools that can model the behavior of stochastic processes. These processes may exhibit unpredictable fluctuations and sudden changes. SDEs find applications in modeling various phenomena that involve random elements. In finance, SDEs are used to describe the behavior of financial assets such as stock prices, interest rates, exchange rates, and more. An SDE is a differential equation where one or more terms involve stochastic processes. Solving these equations requires specialized mathematics known as stochastic calculus. This study uses two SDE models, Heston and geometric Brownian motion (GBM), for stock price prediction.

GBM: $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$

In it, (S(t)) is the asset price at time (t), (μ) is the drift, (σ) is the volatility or standard deviation, and (B_t) is a continuous stochastic process with a normal distribution with mean zero and variance (t). This process is called Brownian motion.

Heston: $dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1$, $dv_t = k[\theta - v_t] dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_t^2$

The index (t) represents time. (k) and (θ) are constants, both positive. (θ) Represents the long-term average of price fluctuations, and (k) indicates the speed at which these fluctuations revert to their long-term average. In the variance equation, ($k[\theta - v_t]$) is called the rate of drift. W_t^1 and W_t^2 are winer process with a normal distribution with mean zero and variance (t).

3. Analysis and discussion

Results indicate that the Heston model has had the best performance in predicting stock prices across most criteria. The stochastic differential Heston model has outperformed time series models in predicting the stock prices of Bank Melli at the Tehran Stock Exchange. With high precision and an absolute prediction error of only 0.0464%, it has managed to answer the research question that was in search of a high-accuracy model for stock price prediction and has proven its superiority. The Heston model is well capable of describing important features in financial markets, including price reactions to market fluctuations and volatility effects, which are not well described by simpler models. A comparison of the Heston model with other models shows that it is well capable of predicting market volatilities and has performed better in many cases.

4. Conclusion

The results indicate that stochastic differential models are powerful tools for predicting stock prices in financial markets, aiding investors and financial managers in making decisions that are more informed. These findings provide a foundation for future research and the development of more accurate prediction models in the Iranian capital market.

Fundin

This research did not receive any funding support.

Declaration of Competing Interest

The author has no conflicts of interest to declare relevant to this article's content.

Acknowledgments

We extend our gratitude to the anonymous reviewers for their valuable comments, which greatly contributed to improving our work.

مدلسازی اقتصادی
Economic Modeling
sanad.iau.ir/journal/eco
دوره ۱۸، شماره ٦٥، بهار ۱٤۰۳، صفحه‌های ۷۳ تا ۱۰۳

پژوهشی

کاربرد معادلات دیفرانسیل تصادفی در پیش‌بینی رفتار قیمت سهام[۱]

بهروز پیری ایرانشاهی[*]، داود جعفری سرشت[**]، علی‌اکبر قلی‌زاده[+]، سیداحسان حسینی دوست[×]

DOI

تاریخ دریافت:
۱٤۰۳/۰۱/۳۰
تاریخ پذیرش:
۱٤۰۳/۰۵/۰۸

واژگان کلیدی:
معادلات دیفرانسیل تصادفی، قیمت سهام، بورس، شبیه‌سازی، پیش‌بینی، سهام بانک ملت

طبقه‌بندی JEL:
C15, C22, C58, G10, G17

چکیده

هدف این مقاله بررسی کارایی مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی در پیش‌بینی قیمت سهام است. برای ارزیابی دقت این مدل‌ها، یک مطالعه مقایسه‌ای بین این مدل‌ها و مدل‌های سری زمانی متداول انجام شده است. در این حوزه، مدل‌های حرکت براونی هندسی و هستون بررسی شده‌اند. برای این مقاله از بین نمادهای حاضر در بورس تهران به‌صورت موردی به بررسی سهام بانک ملت در نماد وبملت پرداخته شده است؛ بدین منظور مقاله روی داده‌های تعدیل شده قیمت این سهام از ابتدای سال ۱۳۹٤ تا ابتدای سال ۱٤۰۲ صورت گرفته است. قبل از مدلسازی قیمت سهام و انجام پیش‌بینی، احتمال وجود الگوهای تکرارشونده و خودشبیه در روند حرکت قیمت سهام بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که سهام بانک ملت دارای حافظه بلندمدت است که باعث می‌شود پیش‌بینی رفتارش تا حدودی امکان پذیر باشد. در ادامه پیش‌بینی قیمت سهام برای نماد وبملت انجام شده است و یافته‌های تحقیق نشان می‌دهند که مدل دیفرانسیل تصادفی هستون براساس اکثر معیارهای ارزیابی پس‌آزمون، عملکرد بهتری در پیش‌بینی قیمت سهام دارد؛ به‌طوری که این مدل تنها ٤/٦٤ صدم درصد خطای مطلق را در پیش‌بینی‌ها نشان داد. مدل سری زمانی AR نیز با این فرض کلیدی که الگوهای گذشته در آینده نیز تکرار می‌شوند، عملکرد قابل قبولی داشته است. این فرضیه با وجود حافظه بلندمدت و پایداری در شاخص کل همخوانی دارد و باعث می‌شود که مدل AR بعد از مدل هستون، در جایگاه دوم معیارهای ارزیابی قرار گیرد. بنابر نتایج به‌دست آمده مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی مدل‌های کارآمدی برای مدلسازی و پیش‌بینی قیمت سهام هستند.

[۱] این مقاله مستخرج از رساله دکتری بهروز پیری ایرانشاهی به راهنمایی دکتر داود جعفری سرشت و دکتر علی اکبر قلی‌زاده و مشاوره دکتر احسان حسینی دوست در دانشکده اقتصاد و علوم اجتماعی دانشگاه بوعلی سینا همدان است.

[*] دانشجوی دکتری، گروه اقتصاد، دانشکده اقتصاد و علوم اجتماعی، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران، behrouzpiriiranshahi@gmail.com
[**] استادیار، گروه اقتصاد، دانشکده اقتصاد و علوم اجتماعی، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران (نویسنده مسئول)، d.jafariseresht@basu.ac.ir
[+] دانشیار، گروه اقتصاد، دانشکده اقتصاد و علوم اجتماعی، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران، a.gholizadeh@basu.ac.ir
[×] استادیار، گروه اقتصاد، دانشکده اقتصاد و علوم اجتماعی، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران، hosseinidousd@basu.ac.ir

۱. مقدمه

در عصر حاضر، بازارهای مالی به‌عنوان مسیرهای اصلی انتقال منابع مالی از بخش‌های کم‌بازده به بخش‌های پربازده شناخته شده‌اند، و نقش حیاتی را در تحریک رشد اقتصادی، ایجاد اشتغال، افزایش سرمایه‌گذاری، تخصیص بهینه منابع، تثبیت متغیرهای پولی و مالی و درنهایت، بهبود وضعیت رفاهی جامعه ایفا می‌کنند. قیمت سهام یکی از مؤلفه‌های اصلی بازار سرمایه است که تأثیر قابل‌توجهی بر رفتار و تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران، مدیران، دولت‌ها و سایر ذی‌نفعان دارد. قیمت سهام که ارزش یک شرکت و عملکرد آن در بازار را منعکس می‌کند، می‌تواند نشان‌دهنده وضعیت اقتصادی کلان و خرد باشد. بنابراین، پیش‌بینی رفتار سهام یکی از مسائل مهم و پیچیده در حوزه‌های مالی و اقتصاد است که مورد علاقه و تحقیق بسیاری از پژوهشگران و کارشناسان بوده و هست (کمپبل[۱]، ۲۰۱۸)

برای پیش‌بینی قیمت سهام، می‌توان از روش‌ها و مدل‌های مختلفی استفاده کرد که برمبنای فرضیات و روش‌های متنوعی ساخته شده‌اند. این روش‌ها و مدل‌ها می‌توانند در دسته‌های متعددی مانند تحلیل تکنیکال، تحلیل بنیادی، تحلیل آماری، تحلیل هوش مصنوعی و غیره دسته‌بندی شوند. در مطالعات مالی، دو رویکرد اصلی برای پیش‌بینی قیمت سهام وجود دارد: مدل‌های تعیین‌کننده[۲] که براساس متغیرهای مشخصی عمل می‌کنند و مدل‌های تصادفی[۳] که عناصر تصادفی و احتمال را در نظر می‌گیرند (مرازک و دیگران[٤]، ۲۰۱۷). در این مقاله، ما تمرکز خود را بر روی مدل‌های تصادفی قرار خواهیم داد و برای این منظور از مدل‌های مبتنی‌بر معادلات دیفرانسیل تصادفی[٥] استفاده می‌شود.

در حقیقت هدف مطالعه حاضر ارتقای دانش مالی و تقویت پایه‌های نظری مورد نیاز برای توسعه ابزارهای پیش‌بینی پیشرفته‌تر است. اهمیت این مقاله در ارائه رویکردی نوین و دقیق بر پایه مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی برای پیش‌بینی قیمت سهام در بورس تهران است، که درنهایت می‌تواند به بهبود استراتژی‌های سرمایه‌گذاری و مدیریت ریسک منجر می‌شود. این رویکرد نه تنها برای بازار سرمایه، بلکه برای سایر بازارهای مالی نیز می‌تواند مفید باشد، زیرا اصول و یافته‌های آن قابلیت تعمیم و کاربرد در سایر بازارها را نیز دارد. در دنیای امروز، بازارها به‌شدت رقابتی و پیچیده شده‌اند و از دیدگاه اقتصاددان مالی، استفاده از تحلیل‌های دقیق و پردازش کارای داده‌ها و داشتن ابزار قدرتمند برای پیش‌بینی قیمت دارایی‌ها، برای غلبه بر بازار امری ضروری است. با افزایش پیچیدگی سیستم‌های اطلاعاتی و حجم داده‌ها مدیران مالی، تحلیل‌گران و سرمایه‌گذاران نمی‌توانند از روش‌های سنتی برای تصمیم‌گیری و تحلیل استفاده کنند (کمپبل و دیگران[٦]، ۲۰۱۸) بنابراین، تحلیل‌گران مالی به‌دنبال شناسایی معیارهای مناسب برای تخمین بازده سهام هستند. این مقاله به دنبال ارائه مدلی قابل اتکا برای پیش‌بینی دقیق‌تر بازده دارایی‌های موجود در بازار سرمایه ایران است تا به انتخاب سبد سهام با عملکرد مطلوب‌تر کمک کند. از آنجایی که تصور بر این است که بورس اوراق بهادار تهران در سطح کارایی ضعیف قرار دارد، و براساس فرضیه بازار فراکتال[۷]، حافظه

[۱] Campbell
[۲] Deterministic Models
[۳] Stochastic Models
[٤] Mrázek, et al.
[٥] Stochastic Differential Equations
[٦] Campbell, et al.
[۷] Fractal Market Hypothesis

بلندمدت در این بازار وجود دارد و بازار در وضعیتی پایدار است. ما انتظار داریم که مدل‌های مبتنی‌بر دیفرانسیل تصادفی در پیش‌بینی قیمت سهام در این بازار نسبت به مدل‌های رگرسیونی سری زمانی و اقتصادسنجی عملکرد بهتری داشته باشند.

معادلات دیفرانسیل تصادفی یک ابزار ریاضی است که می‌تواند رفتار فرآیندهای تصادفی را مدل کند. این فرآیندها ممکن است دارای نوسانات غیرقابل پیش بینی و تغییرات ناگهانی باشند. این معادلات برای مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌هایی که دارای عناصر تصادفی هستند، کاربرد دارند. در علوم مالی، معادلات دیفرانسیل تصادفی برای توصیف رفتار دارایی‌های مالی مانند قیمت سهام، نرخ بهره، نرخ ارز و غیره استفاده می‌شود. با این معادلات می‌توان نوسانات قیمت سهام را مدل کرد. قیمت سهام تحت تاثیر عوامل مختلفی مانند تقاضا و عرضه، اخبار و اطلاعات، رویدادهای اقتصادی و سیاسی و روانشناسی سرمایه‌گذاران قرار دارد. این عوامل باعث می‌شوند که قیمت سهام دارای نوسانات بالا و پیچیده‌ای باشد که با مدل‌های سنتی خطی قابل توصیف و پیش‌بینی نیستند. معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌توانند با در نظر گرفتن نوسانات تصادفی، رفتار قیمت سهام را دقیق‌تر مدل کند. این مدل‌ها با استفاده از انتگرال ایتو، می‌توانند تغییرات قیمت سهام را به‌صورت یک تابعی از زمان و یک فرآیند وینر (یا حرکت براونی) بیان کنند. برخی از مدل‌های مشهور معادلات دیفرانسیل تصادفی مدل بلک–شولز، مدل هستون و مدل حرکت براونی هندسی و ... هستند این مدل‌ها می‌توانند با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی مانند مونت کارلو، قیمت سهام را در زمان‌های مختلف شبیه‌سازی و پیش‌بینی کنند. برای حل این معادلات، نیاز به ریاضیات خاصی است که به آن حساب دیفرانسیل تصادفی می‌گویند. این حساب دیفرانسیل دو رویکرد اصلی دارد: رویکرد ایتو و رویکرد استراتونویچ . هر کدام از این رویکردها مزایا و معایب خود را دارند و بسته به مسئله مورد نظر، می‌توان از یکی از آنها استفاده کرد.

ساختار مقاله حاضر در ادامه شرح داده می‌شود. در این مطالعه، کارایی مدل‌های دیفرانسیل تصادفی در مدل‌سازی رفتار قیمت سهام تحقیق خواهد شد. در پژوهش حاضر، ابتدا ویژگی‌های بورس اوراق بهادار تهران، ارزیابی می‌شود، سپس رفتار قیمت سهام بانک ملت به‌صورت موردی از نمادهای بورسی حاضر در این بازار بررسی خواهد شد. ازاین‌رو در بخش دوم مقاله به ارائه مبانی نظری و پیشینه پژوهش می‌پردازیم و پس از ارائه مباحثی در حوزه پایداری بازار، بیان تعاریف و روابط معادلات دیفرانسیل تصادفی و کالیبراسیون پارامترها، ادبیات موضوع تشریح خواهد شد. در قسمت سوم مقاله روش انجام مقاله ارائه شده که ابتدا به تشریح حسابان تصادفی و استفاده از لم ایتو برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی پرداخته شده و در انتها نحوه بکارگیری الگوریتم لونبرگ–مارکوات برای محاسبه پارامترهای این معادلات توضیح داده شده است. در بخش نتایج ابتدا نتایج تحلیل‌های آماری داده‌ها که توسط نرم‌افزار استتا[1]، انجام شده ارائه گردیده تا نوع توزیع، مانایی، واریانس ناهمسانی، و وجود جهش و همبستگی در رفتار قیمت سهام، مشخص شود؛ سپس، رفتار قیمت سهام توسط مدل‌های آماری و مدل‌های دیفرانسیل تصادفی مدل شده است. درنهایت، شبیه‌سازی رفتار سهام در بستر نرم‌افزار پایتون انجام شده و نتایج حاصل از مقایسه دقت پیش‌بینی مدل‌ها ذکر خواهد شد و در بخش پایانی مقاله بحث و نتیجه‌گیری انجام خواهد شد.

[1] Stata

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

پژوهش حاضر بر پایه چندین بخش نظری استوار است. در ابتدا، برای ارزیابی کارایی بازار، از فرضیه بازار فراکتال[۱] و پارامتر هرست[۲] استفاده می‌کنیم. سپس، نحوه مدل کردن رفتار متغیرهای مالی توسط مدل‌های ریاضی مبتنی‌بر دیفرانسیل تصادفی، مانند مدل حرکت براونی هندسی[۳] و مدل هستون[٤] را تشریح می‌کنیم و پس از آن، با استفاده از الگوریتم لونبرگ–مارکوارت، پارامترهای مدل را تخمین می‌زنیم. این فرآیند با استفاده از نرم‌افزار پایتون انجام خواهد شد.

۲-۱. بررسی پایداری بازار

موضوع پایداری و کارایی بازار به تحلیل تغییرات قیمت دارایی‌ها و چگونگی وقوع این تغییرات در بازارهای مالی می‌پردازد و یکی از مهمترین و بنیادی‌ترین مباحث در حوزه مالی است. فرضیه بازار فراکتال یک تئوری است که به بررسی این موضوع می‌پردازد، این تئوری مطرح می‌کند که الگوهای فراکتالی در قیمت‌های بازار مالی وجود دارند که از طریق تحلیل تکنیکال قابل پیش‌بینی هستند. الگوهای فراکتالی الگوهایی هندسی و خودشبیه هستند که در ساختار اجسام در مقیاس‌های مختلف تکرار می‌شوند. نمای هرست[٥] پارامتری برای بررسی حافظه بلندمدت، ساختار فراکتالی و رفتارهای غیرخطی بازارهای مالی است. آزمون دامنه مقیاس‌بندی شده، (R/S)[٦]، روشی ناپارامتریک برای محاسبه نمای هرست، به‌منظور تشخیص سیستم‌های تصادفی و غیرتصادفی و بررسی پایداری روندهاست. این روش در نمونه‌های بزرگ دقت بالایی دارد و تحت تغییر توزیع‌های داده‌ها نیز معتبر است. در تحقیقات بسیاری مانند میلِنیچ[٧] (۲۰۰۷) و براتیان و آکو و دیگران[٨] (۲۰۲۱) از روش تحلیل دامنه مقیاس‌بندی شده استفاده شده است. روش(R/S) ، توسط هرست ابداع و توسط مندلبروت[٩] اصلاح شد. نحوه محاسبه در پیوست ارائه شده است.

۲-۲. معادلات دیفرانسیل تصادفی[۱۰]

معادلات دیفرانسیل تصادفی (SDE) یک معادله دیفرانسیل است که یک یا چند جمله آن فرآیند تصادفی هستند. برای حل این معادلات، نیاز به ریاضیات خاصی است که به آن حساب دیفرانسیل تصادفی می‌گویند. این حساب دیفرانسیل دو رویکرد اصلی دارد: رویکرد ایتو[۱۱] و رویکرد استراتونویچ[۱۲]. هر کدام از این رویکردها مزایا و معایب خود را دارند و بسته به مسئله مورد نظر، می‌توان از یکی از آنها استفاده کرد. در این بخش، می‌خواهیم با استفاده از روش‌های ریاضی، رفتار یک متغیر مالی مثل قیمت سهام را بررسی و مدل کنیم. ابتدا با یک مدل ساده شروع می‌کنیم که فرض می‌کند تغییرات قیمت سهام در زمان یک تابع خطی از قیمت است. سپس برای رفع نقص‌های مدل با افزودن یک

---

[۱] Fractal Market Hypothesis
[۲] Hurst
[۳] Brownian
[۴] Heston model
[۵] Hurst Exponent
[۶] Rescaled Range (R/S) Analysis
[۷] Mielnich
[۸] Brătian, V., Acu, et al.
[۹] Benoit B. Mandelbrot
[۱۰] Stochastic Differential Equation
[۱۱] Ito calculus
[۱۲] Stratonovich

جزء تصادفی به مدل، به یک معادله دیفرانسیل تصادفی ساده می‌رسیم. در مدل اولیه که بدون جزء تصادفی است، فرض می‌کنیم که S_t قیمت سهام در زمان t باشد، تغییرات آن در زمان متناسب با قیمت و طول بازه زمانی باشد.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt \longrightarrow \frac{dS_t}{dt} = \mu S_t$$

که در این معادله μ یک ثابت غیرتصادفی است و بیانگر روند رشد بازار یا نرخ بازده بدون ریسک است و $\frac{dS_t}{S_t}$ نرخ بازده قیمت سهام است.این معادله یک معادله دیفرانسیل ساده است و با استفاده از حسابان جبری و روش انتگرال‌گیری ریمان به‌راحتی به‌صورت زیر حل می‌شود:

$$\int \frac{dS_t}{S_t} = \int \mu dt \longrightarrow ln\, S_t \Big\{\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} = \mu\, t \longrightarrow ln \frac{S_t}{S_0} = \mu\, t \longrightarrow \frac{S_t}{S_0} = e^{\mu t} \longrightarrow S_t = S_0 e^{\mu t}$$

که در آن e عدد نپر است و μ همان روند رشد بازار است. این مدل ساده می‌تواند نقطه شروعی مناسب باشد تا با اضافه کردن پیچیدگی‌های بیشتر، به یک توصیف واقعی‌تر از رفتار متغیرهای مالی برسیم. چون بسیاری از متغیرهای مالی، متغیرهای تصادفی هستند و مدل بدون جزء تصادفی نمی‌تواند رفتار آنها را به خوبی توصیف کند. یک راه ساده برای ایجاد جزء تصادفی در مدل، این است که یک جمله تصادفی یا نوفه به ثابت μ اضافه کنیم.

۲-۳. مدل حرکت براونی هندسی[۱]

حرکت براونی هندسی(GBM) یک مدل ساده اما کارآمد برای تحلیل نوسانات بازار و پیش‌بینی قیمت سهام است. این مدل ساده در ریاضیات، می‌تواند الگوهای رفتاری بازار را به‌خوبی نشان دهد و در مدیریت ریسک و تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاران کمک کند. با افزودن جزء تصادفی به مدل، یک معادله دیفرانسیل تصادفی به‌دست می‌آید که با روش‌های معمول قابل حل نیست و نیاز به روش‌های حسابان تصادفی دارد که در ادامه به توضیح آنها خواهیم پرداخت. حرکت براونی هندسی یکی از مدل‌های مهم در علوم مالی و اقتصاد است که برای توصیف و پیش‌بینی قیمت دارایی‌های مالی مانند سهام، اوراق بهادار، ارز و غیره استفاده می‌شود. این مدل فرض می‌کند که قیمت دارایی یک بخش تصادفی دارد که تحت تأثیر دو عامل است: یک عامل ثابت که به رانش[۲] معروف است و یک عامل تصادفی تصادفی که به تلاطم[۳] یا نویز[۴] معروف است. رانش نشان‌دهنده میزان رشد یا کاهش متوسط قیمت دارایی در طول زمان است و تلاطم نشان‌دهنده میزان نوسانات قیمت دارایی در اطراف میانگین قیمت است. این مدل با استفاده از مفاهیم حسابان تصادفی و حرکت براونی توسعه داده شده است. حرکت براونی هندسی یک تعمیم از حرکت براونی است که در آن قیمت دارایی به جای مقدار مطلق، به‌صورت نسبت به قیمت اولیه آن مدل می‌شود. این مدل با استفاده از یک معادله دیفرانسیل تصادفی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t \qquad (۱)$$

---

[۱] Geometric Brownian Motion
[۲] Drift
[۳] Volatility
[۴] Noise

در آن S_t قیمت دارایی در زمان t، μ رانش، σ تلاطم یا انحراف معیار و B_t یک فرآیند تصادفی پیوسته است که توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس t دارد.این فرآیند را حرکت براونی می‌گویند. این معادله را می‌توان به‌صورت معادله استوکاستیک زیر نوشت:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \qquad (۲)$$

نواقص مدل GBM

حرکت براونی هندسی یک مدل ساده و کاربردی برای توصیف رفتار قیمت دارایی‌های مالی است، اما این مدل نواقصی هم دارد. برخی از نواقص این مدل عبارتند از:

- فرض ثابت بودن پارامترهای μ و σ که در واقعیت ممکن است تابعی از زمان یا قیمت دارایی باشند.
- فرض نرمال بودن توزیع لگاریتم قیمت دارایی که در واقعیت ممکن است از توزیع نرمال منحرف باشد و دارای چولگی و کشیدگی باشد.
- نادیده گرفتن نوسانات خوشه‌ای که نشان‌دهنده وابستگی نوسانات به مقادیر قبلی خود و غیرثابت بودن آنها است.
- نادیده گرفتن گسستگی‌ها و جهش‌های احتمالی در فرآیند قیمت.

برای رفع این نواقص، می‌توانیم از مدل‌های پیشرفته‌تری استفاده کنیم که پارامترهای متغیر، توزیع‌های غیرنرمال، نوسانات تصادفی و جهش‌ها را در نظر بگیرند. مدل هستون بسیاری از این نواقص را مرتفع می‌کند.

۲-٤. تشریح مدل هســـتون

مدل هستون یکی از مدل‌های مهم و کاربردی در پیش‌بینی قیمت سهام شناخته می‌شود. این مدل بر پایه این فرضیه ساخته شده، که نوسانات قیمت سهام یک فرآیند تصادفی با خاصیت برگشت به میانگین هستند و با قیمت سهام همبستگی دارند. معادلات دیفرانسیل تصادفی مدل هستون به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

مدل اصلی هستون که در رابطه ۳ ذکر شده است فرض می‌کند که S_t ، قیمت دارایی است و از فرآیند انتشار زیر تبعیت می‌کند.

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sqrt{v_t}\, S_t\; dW_t^1 \qquad (۳)$$

که در آن واریانس لحظه‌ای، v_t، توسط یک فرآیند ریشه مربع یا CIR نمایش داده می‌شود.

$$dv_t = -k\,[v_t - \theta]\, dt + k\sqrt{v_t} dW_t^2$$

$$dv_t = k\,[\theta - v_t]\, dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_t^2 \qquad (٤)$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \qquad (٥)$$

اندیس t نشانگر زمان است. k و θ و σ همگی ثابت و مثبت هستند. θ میانگین بلند مدت نوسان قیمت است و k سرعت بازگشت این نوسانات به میانگین بلندمدتشان را نشان می‌دهد. در معادله واریانس به $k\,[\theta - v_t]$ را نرخ

رانش[1] می‌گویند. اگر $v_t<\theta$ باشد نرخ رانش مثبت و اگر $v_t > \theta$ باشد نرخ رانش منفی می‌شود یعنی واریانس تمایل بازگشت به مقدار θ را دارد و σ تعیین‌کننده محدوده دامنه نوسانات واریانس است(نوسان نوسانات). در مدل هستون، واریانس به‌عنوان یک فرآیند تصادفی مدل می‌شود، زیرا نوسانات بازار می‌توانند بر قیمت دارایی‌های مالی تأثیر گذارند. مدل‌سازی واریانس به ما اجازه می‌دهد تا رفتار نوسانات را در زمان درک کنیم و این اطلاعات را در پیش‌بینی قیمت سهام و سایر دارایی‌های مالی لحاظ کنیم. پارامترهای معادله واریانس نقش مهمی در تعیین نرخ تغییر واریانس و میزان بازگشت به میانگین آن دارند. این ضرایب به‌طور مستقیم بر دامنه نوسانات قیمت دارایی تأثیر می‌گذارند و درنتیجه در تعیین قیمت دارایی مالی موثر هستند. تغییر در این ضرایب می‌تواند به تغییرات قابل‌توجه در قیمت‌های پیش‌بینی شده منجر شود.

معادله ۵ رابطه بین دو حرکت براونی را توصیف می‌کند که فرآیندهای قیمت دارایی و واریانس را پیش می‌برند توصیف می‌کند. این ضریب نشان‌دهنده میزان همبستگی بین تغییرات قیمت دارایی و تغییرات واریانس است. اگر این دو فرایند به‌طور کامل مثبت یا منفی با هم همبسته باشند، تغییرات قیمت دارایی و واریانس به طور همزمان رخ خواهد داد. در حالت عمومی، ضریب همبستگی بین ۱- و ۱ قرار دارد و تعیین می‌کند که چگونه این دو فرایند به یکدیگر وابسته‌اند. در حالت کلی W_t^2 و W_t^1 دارای ضریب همبستگی ρ هستند. که درواقع ρ درجه همبستگی بین لگاریتم بازده و نوسانات قیمت دارایی را نشان می‌دهد.

کوی و دیگران[2] (۲۰۲۱) یک روش جدید برای پیش بینی قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی ارائه می‌دهند. نتایج نشان می‌دهد که مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی دقت و قابلیت اطمینان بالایی در پیش‌بینی قیمت سهام دارند و می‌توانند تغییرات ناگهانی قیمت و تغییرپذیری را به خوبی مدل کنند. گولسیاشویلی و همکاران[3] (۲۰۲۰) هم یک روش جدید برای قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت مدل هستون با استفاده از یک فرمول تیلور با سری‌های نامتناهی از جملات تصادفی ارائه می‌دهند و با استفاده از روش تابع ویژگی، چندین تقریب برای قیمت اختیار را به‌دست می‌آورند که دارای برآورد خطای بهتری نسبت به تقریب‌های قبلی هستند. آنها نشان می‌دهند که تقریب‌های جدید به‌خصوص در حالتی که واریانس داده‌ها بزرگ است، عملکرد خوبی دارند. کار و همکاران[4] (۲۰۲۲)، یک روش برای قیمت‌گذاری اختیارهای اروپایی تحت مدل هستون وابسته به زمان (همراه با مانع وابسته به زمان) ارائه می‌دهند. نویسندگان با استفاده از روش تبدیل انتگرال عمومی (GIT)، قیمت اختیار را به‌صورت یک فرم نیمه تحلیلی به‌عنوان یک انتگرال دو بعدی نشان می‌دهند. این انتگرال وابسته به یک تابع ناشناخته است که شیب راه‌حل در مرز متحرک S = L(t) را نشان می‌دهد. نتایج عددی نشان می‌دهند که روش GIT سرعت و دقت بالایی در قیمت‌گذاری اختیارها دارد. گروژکا و اسوابینسکی[5] (۲۰۲۳) هم یک روش برای تخمین پارامترهای مدل هستون برای تغییرات ناپیوسته قیمت دارایی‌ها ارائه می‌دهند. آنها از ترکیب رگرسیون بیزی و روش فیلترینگ ذره‌ای برای تخمین پارامترهای مدل استفاده می‌کنند. آنها یک روش جدید برای مدیریت جهش‌ها در داده‌ها پیشنهاد می‌دهند که به بهبود دقت تخمین‌ها منجر می‌شود. نتایج شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی عملکرد خوبی دارد.

[1] Drift Rate
[2] Cui, P., et al.
[3] Gulisashvili, et al.
[4] Carr, et al.
[5] Gruszka, J., & Szwabiński, J

۲-۵. کالیبراسیون پارامترها

حالا نوبت به کالیبراسیون مدل می‌رسد. در این بخش برای کالیبراسیون مدل هستون از الگوریتم لونبرگ-مارکوات استفاده خواهد شد. این الگوریتم یک روش بهینه‌سازی غیرخطی است که ترکیبی از روش‌های گرادیان نزولی و نیوتن است. هدف این الگوریتم حل مسائل حداقل کردن مربعات خطا در زمینه برازش یک مدل ریاضی پارامتری نسبت به یک مجموعه از نقاط داده شده است. یک تابع هدف که به‌صورت مجموع مربعات خطاها بین تابع مدل و یک مجموعه از نقاط داده شده تعریف می‌شود، وسپس این تابع هدف حداقل می‌شود. این الگوریتم یک روش تکراری است که در هر گام، یک تخمین جدید برای پارامترها با استفاده از حل یک معادله ماتریسی و خطی‌سازی شده توابع محاسبه می‌کند. نحوه کالیبراسیون توسط الگوریتم لونبرگ-مارکوارت توسط گاوین(۲۰۱۹) شرح داده شده است. کالیبراسیون مدل هستون با الگوریتم لونبرگ-مارکوارت یک فرآیند پیچیده و دقیق است که نیاز به دانش ریاضی و برنامه‌نویسی پایتون دارد. این فرآیند شامل مراحل زیر است:

- انتخاب یک تابع هزینه که اختلاف بین قیمت‌های مدل و قیمت‌های بازار را نشان دهد.
- محاسبه ژاکوبین و گرادیان تابع هزینه با استفاده از روش‌های عددی.
- حل معادله خطی‌سازی شده با استفاده از روش میرایی لونبرگ-مارکوارت.
- تنظیم ضریب میرایی براساس کاهش تابع هزینه.
- تکرار مراحل بالا تا رسیدن به شرایط پایان. (میلان و همکاران ۲۰۱۷)

پس از پایان الگوریتم، نتایج را ارزیابی می‌کنیم تا ببینیم آیا مدل به خوبی پارامترها را تخمین زده است یا خیر. این فرآیند بسیار پیچیده است و نیاز به دانش عمیقی از ریاضیات و توانایی برنامه‌نویسی دارد.

تابع هدف به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f(p) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y(t_i) - \hat{y}(t_i;p))^2 \qquad (٦)$$

$y(t_i)$ مقدار مشاهده شده در زمان t_i است و $\hat{y}(t_i;p)$ مقدار تخمین زده شده توسط مدل پارامتری p برای زمان t_i و N تعداد داده‌هاست که ممکن است با تعداد گام‌ها برابر باشد. بهینه‌سازی مدل شامل چند مرحله است: اول از همه، یک حدس اولیه برای پارامترهای مدل و یک عدد بزرگ برای ضریب میرایی انتخاب می‌کنیم. بعد از آن، ماتریس ژاکوبین را محاسبه می‌کنیم که نشان‌دهنده مشتقات جزئی تابع هدف نسبت به پارامترهای مدل است. سپس، با استفاده از ماتریس ژاکوبین، ضریب میرایی و گرادیان تابع هدف، معادله ماتریسی خطی مختص به الگوریتم لونبرگ-مارکوارت را حل می‌کنیم و جهت بهینه‌سازی را پیدا می‌کنیم. در مرحله بعد، یک قدم در جهت بهینه‌سازی پیش می‌رویم و مقدار جدید تابع هدف را می‌سنجیم. اگر مقدار جدید تابع هدف کمتر از مقدار قبلی باشد، یعنی قدم ما موثر بوده و ضریب میرایی λ را کاهش می‌دهیم در این حالت نتایج به الگوریتم نیوتن نزدیک می‌شوند. اما اگر مقدار جدید تابع هدف بیشتر یا مساوی مقدار قبلی باشد، یعنی قدم ما ناموثر بوده و ضریب میرایی λ را افزایش می‌دهیم در این حالت نتایج به الگوریتم گرادیان نزدیک می‌شوند. این فرآیند را تا زمانی که به یکی از شرایط توقف برسیم، ادامه می‌دهیم. شرایط توقف می‌توانند شامل تعداد زیادی از تکرارها، کاهش کمی تابع هدف تا مقداری خاص یا گرادیان

کوچک تابع هدف باشند. ماتریس ژاکوبین و گرادیان تابع هدف را می‌توان به‌صورت زیر نوشت: (گاوین[۱]، ۲۰۱۹)؛(کوی[۲] و دیگران، ۲۰۱۷)

$$J = \frac{\partial f}{\partial P} \quad (۷)$$

$$g = \nabla f = J^T f$$

که در آن P بردار پارامترهای مدل است.معادله خطی که برای مشخص کردن جهت بهینه‌سازی حل می‌شود، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(J^T J + \lambda I)\Delta P = -g \quad (۸)$$

که در آن I ماتریس همانی و ΔP تغییر پارامترهای مدل است. می‌توان دید که ضریب میرایی λ یک عامل ضربی در ماتریس همانی است که به ماتریس ژاکوبین اضافه می‌شود. این عمل باعث می‌شود که معادله خطی میرا شده شود و جهت بهینه سازی تغییر کند.

که در آن $J^T J$ همان ماتریس هسین است. $$H = \nabla^T \nabla f \approx J^T J$$

۲-٦. مرور ادبیات

علیزاده و دیگران در یک مقاله(۱٤۰۳) ، از داده‌های روزانه تعدیل شده قیمت سهام ٦ شرکت پتروشیمی و ۳ شرکت پالایش استفاده کرده و با استفاده از آزمون ریشه واحد دیکی-فولر و آزمون ریشه واحد با شکست ساختاری درون‌زای زیووت و اندروز، به این نتیجه رسیدند که برخی از این شرکت‌ها از گام تصادفی خالص (کارایی ضعیف) پیروی می‌کنند و برخی دیگر از گام تصادفی با عرض از مبدأ (نبود کارایی ضعیف) را نشان می‌دهند. سپس با استفاده از مدل‌های گارچ و گارچ نمایی، رابطه بین ریسک و بازده در این شرکت‌ها بررسی شد. نتایج نشان می‌دهند که در برخی از شرکت‌ها، نوسان‌های ناشی از اخبار منفی (بد) بیشتر از نوسان‌های ناشی از اخبار مثبت (خوب) است. نتایج بیان می‌کنند که شرکت‌های نوری، پارس، تاپیکو و شپنا از کارایی ضعیف پیروی می‌کنند. شرکت‌های پارسان، شپدیس، شتران، فارس و شبندر نشان نمی‌دهند که کارایی ضعیفی دارند. به‌طور کلی، این مقاله نشان می‌دهد که با توجه به مدل‌سازی مناسب، می‌توان رفتار قیمت سهام را پیش‌بینی کرد و بینشی تاثیرگذار را درخصوص قیمت‌های آینده به‌دست آورد.

در مقاله‌ای که توسط دولو و دیگران در سال ۱۳۹۹ منتشر شده است، استفاده از مدل‌های مبتنی‌بر معادلات دیفرانسیل تصادفی در بازارهای مالی استفاده شده است. هدف این تحقیق، پیش‌بینی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران به‌عنوان یکی از شاخص‌های مهم اقتصادی با استفاده از مدل حرکت براونی هندسی (GBM) بوده است. برای این منظور، شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ابتدای ۱۳۸۰ تا پایان سال ۱۳۹۵ بررسی شده است. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که مدل حرکت براونی هندسی قادر است تا شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران را در افق زمانی یک روزه با دقت بالا پیش‌بینی کند. همچنین، با افزایش افق زمانی پیش‌بینی، دقت مقادیر پیش‌بینی شده

[۱] Gavin
[۲] Cui

توسط مدل کاهش می‌یابد و توانایی مدل در شبیه‌سازی شاخص نیز کاهش می‌یابد؛ با این‌حال، تا افق پیش‌بینی ۹۰ روزه، مقادیر پیش‌بینی شده همچنان از دقت بالایی برخوردار هستند.

بیلاح و دیگران در پژوهش خود در سال ۲۰۲٤ با استفاده از شبکه‌های حافظه کوتاه‌مدت و بلندمدت (LSTM) به پیش‌بینی سری‌های زمانی و قیمت سهام پرداخته‌اند. در طیف وسیعی از پیش‌بینی‌های سری زمانی، مدل‌های LSTM میانگین خطای مطلق (MAE) را به میزان چشمگیر ۲۳/٤ درصدی در مقایسه با روش‌های پیش‌بینی سری زمانی کاهش می‌دهند. میزان دقت پیش‌بینی در این مدل‌ها ۸۹/۷ درصد و میانگین خطای مطلق ۱۰/۳ درصد است.

ژائو و دیگران (۲۰۲۳) به پیش‌بینی قیمت سهام در بازار شانگهای و شنژن می‌پردازند. برای پرداختن به این موضوع، این مقاله یک مدل رابطه‌ای سری زمانی (TSRM) پیشنهاد می‌کند که اطلاعات زمان و رابطه را ادغام می‌کند. نتایج حاکی از بهبود خطای پیش‌بینی از ٦/٦ درصد به ٤/۹ درصد است. روش TSRM نسبت به روش‌های سنتی دیدگاه جامعی ندارد که برای پیش‌بینی قیمت سهم فقط به اطلاعات سری زمانی تکیه می‌کنند دقیق‌تر هستند، زیرا روش‌های سنتی عمدتا ناقص هستند.

المعافی و دیگران در مطالعه‌ای به ارزیابی و مقایسه عملکرد مدل‌های ARIMA و XGBoost در پیش‌بینی قیمت‌های بسته شدن هفتگی سهام شرکت مخابرات عربستان سعودی می‌پردازند. یافته‌های آنها نشان می‌دهد که XGBoost در تمام معیارهای ارزیابی از ARIMA بهتر عمل می‌کند و کارایی یادگیری ماشین در پیش‌بینی قیمت سهام برجسته‌تر است.

۳. روش پژوهش

معادله حرکت هندسی براونی (رابطه ۱) را نمی‌توان با روش‌های معمول حل کرد و نیازمند تکنیک‌های حسابان تصادفی و استفاده از رویکردهای ایتو و استراتونوویچ است. در پژوهش‌های نگویان و اسلام[۱] (۲۰۲۱)، راسنایکا و دیگران (۲۰۱٤) فیتریا و همکاران (۲۰۲۱) به تشریح حسابان تصادفی و استفاده از لم ایتو برای محاسبه این انتگرال‌ها پرداخته شده است. برای حل این معادله، ابتدا یک متغیر کمکی به‌صورت $X_t = ln\, S_t$ تعریف کنیم، سپس با استفاده از فرمول ایتو[۲] معادله را به فرم زیر تبدیل می‌کنیم (محاسبات به‌طور کامل در پیوست ۲ آورده شده است)

$$dX_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dB_t$$

این معادله را می‌توان با انتگرال‌گیری از طرفین حل کرد و به صورت زیر نوشت:

$$X_t - X_0 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t$$

با جایگزین کردن $X_t = ln\, S_t$ و $X_0 = ln\, S_0$ داریم:

$$ln\frac{S_t}{S_0} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t$$

اگر از طرفین را به‌صورت تابع نمایی بنویسیم، معادله به فرم در می‌آید:

[۱] Nguyen, N., & Islam
[۲] Ito’s formula

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t} \quad (۹)$$

این رابطه نشان می‌دهد که تحت فروض حرکت براونی هندسی، قیمت دارایی از توزیع لگاریتم–نرمال[۱] پیروی می‌کند. یعنی توزیع لگاریتم قیمت دارایی نرمال است. همچنین بازده لگاریتمی دارایی، یعنی $ln\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$ ، از توزیع نرمال پیروی می‌کند.

این مدل به‌دلیل سادگی در مباحث ریاضی و توانایی در توصیف نوسانات بازار، در پیش‌بینی قیمت سهام کاربرد بسیاری دارد و علی‌رغم ساده بودن می‌تواند به‌عنوان یک ابزار قدرتمند، الگوهای رفتاری بازار را توصیف کند و در مدیریت ریسک و تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاران مؤثر باشد(نگویان و همکاران، ۲۰۲۱).

با توجه به توزیع نرمال B_t با میانگین صفر و واریانس T و البته با در نظر داشتن تابع تولید گشتاور توزیع نرمال استاندارد Z ، برای محاسبه گشتاورهای S_t ، می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$E[S_t^n] = S_0^n e^{n\mu t + \frac{n^2\sigma^2 t}{2}}$$

که در آن، $E[S_t^n]$ گشتاور مرتبه n از S_t است. و n یک عدد طبیعی است. با جایگذاری $n=1$ و $n=2$ ، می‌توانیم گشتاورهای مرتبه اول (میانگین) و دوم (واریانس) را به‌دست آوریم:

$$E[S_t] = S_0 e^{\mu t} \qquad Var[S_t] = S_0^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$$

برای شبیه‌سازی حرکت براونی هندسی، می‌توانیم از روش میلشتاین استفاده کنیم. این روش یک روش گسسته‌سازی برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی است. در این روش، می‌توانیم از رابطه زیر برای محاسبه قیمت دارایی در زمان‌های گسسته استفاده کنیم(ایوَنس[۲] ۲۰۱۲):

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} e^{(\mu - 0.5\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_{i+1}} \quad (۱۰)$$

در ادامه روش تحقیق به آماده‌سازی مدل هستون برای شبیه‌سازی پرداخته شده است. برای انجام شبیه‌سازی مدل هستون نیز مانند بالا ابتدا باید معادلات پیوسته (روابط ۳،٤و٥) را به معادلات گسسته نوشت؛ برای گسسته کردن این معادله، می‌توانیم از تقریب تفاضل محدود مرتبه اول برای مشتق‌ها استفاده کنیم (میلان[۳] و همکاران ۲۰۱۷) و (فابریک داگلاس[٤] ۲۰۱۱).

$$\frac{dS_t}{dt} \approx \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{\Delta t} \qquad dW_t^1 \approx \Delta W_t^1$$

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \frac{V_{t+\Delta t} - V_t}{\Delta t} \qquad dW_t^2 \approx \Delta W_t^2$$

که در آن، Δt فاصله زمانی است که برابر با $\frac{T}{n}$ است. که T زمان (بر حسب سال معمولا) و n تعداد گام‌های زمانی است. ΔW_t^1 و ΔW_t^2 متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد است. شِهزاد و دیگران[٥] (۲۰۲۳) یک روش نوین برای پیش‌بینی قیمت سهام با استفاده از تحلیل فنی ارائه می‌دهند. نویسندگان با استفاده از لم ایتو و روش اولر–مارویاما، مدل‌های هستون و حرکت براونی هندسی را توسعه می‌دهند. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که این مدل‌ها

[۱] log-normal distribution
[۲] Evans
[۳] Milan
[٤] Fabrice Douglas Rouah
[٥] Shehzad, et al.

در پیش‌بینی دقیق قیمت سهام موثر هستند و عملکرد بهتری نسبت به روش‌های آماری معمول دارند. با جایگذاری این تقریب‌ها در معادله دیفرانسیل تصادفی، می‌توانیم معادله تفاضلی گسسته را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{S_{t+\Delta t}-S_t}{\Delta t}=rS_t+\sqrt{V_t}S_t\Delta W_t^1$$
$$\frac{V_{t+\Delta t}-V_t}{\Delta t}=\kappa(\theta-V_t)+\sigma\sqrt{V_t}\Delta W_t^2$$

درنهایت به معادلات گسسته زیر می‌رسیم:

$$S_{t+\Delta t}=S_t+rS_t\Delta t+\sqrt{V_t}S_t\Delta W_t^1 \quad (۱۱)$$

$$V_{t+\Delta t}=V_t+\kappa(\theta-V_t)\Delta t+\sigma\sqrt{V_t}\Delta W_t^2 \quad (۱۲)$$

$$\Delta W_t^1\Delta W_t^2=\rho\Delta t \quad (۱۳)$$

کوی و همکاران[۱] (۲۰۱۷) یک روش نوین برای پیش‌بینی قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی هستون ارائه می‌دهند و پس از گسسته‌سازی مدل هستون، کالیبراسیون مدل را انجام می‌دهند. همان‌طور که در بخش‌های پیشین گفته شد، برای کالیبراسیون مدل هستون از الگوریتم لونبرگ–مارکوات که در بخش بعدی توضیح داده خواهد شد استفاده خواهد شد.

در الگوریتم لونبرگ–مارکوات تابع هدف برای مدل هستون به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f(v_0,\kappa,\theta,\sigma,\rho)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(S_i^M-S_i^H)^2 \quad (۱۴)$$

که در آن N تعداد داده‌های قیمت سهام که در اینجا قیمت سهام بانک ملت است، S_i^M قیمت سهام جمع‌آوری شده از داده‌های واقعی بازار است و S_i^D قیمت شبیه‌سازی شده توسط مدل هستون است. هدف این الگوریتم حداقل کردن مربعات خطای قیمت‌های اتفاق افتاده در بازار و قیمت‌هایی است که توسط مدل برآورد شده‌اند. این الگوریتم یک روش تکراری است که در هر گام، یک تخمین جدید برای پارامترها با استفاده از حل یک معادله ماتریسی و خطی‌سازی شده توابع محاسبه می‌کند. کالیبراسیون مدل هستون با الگوریتم لونبرگ–مارکوات یک فرآیند پیچیده و دقیق است که نیاز به دانش ریاضی و برنامه‌نویسی پایتون دارد.

ماتریس ژاکوبین مدل هستون (مشتق جزئی تابع هدف را نسبت به پارامترها) را محاسبه و یک بردار گرادیان g از آنها تشکیل می‌دهیم. همچنین ماتریس هسین[۲] H را از مشتقات جزئی دوم تابع هدف نسبت به هر جفت پارامتر می‌سازیم. این ماتریس یک ماتریس مربعی و متقارن است که درایه‌های قطری آن مشتق دوم تابع هدف نسبت به هر پارامتر و درایه‌های غیر قطری آن مشتق مخلوط تابع هدف نسبت به دو پارامتر مختلف هستند. توضیحات تکمیلی در مطالعه گاوین (۲۰۱۹) و کوی و همکاران (۲۰۱۷) داده شده است.

$$J=\frac{\partial f}{\partial P}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial v_0} & \frac{\partial f}{\partial \kappa} & \frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial \sigma} & \frac{\partial f}{\partial \rho}\end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

که در آن J ماتریس ژاکوبین و P بردار پارامترهای مدل هستون است.

---
[۱] Cui, P, et al.
[۲] Hessian Matrix

براساس پارامترهای اولیه‌ای که خود ما به مدل می‌دهیم مقدار تابع گرادیان و ماتریس هسین را محاسبه و در معادله خطی الگوریتم لونبرگ–مارکوارت جایگذاری می‌کنیم یک ضریب میرایی برای آن تعیین می‌کنیم و آن را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(H + \lambda I)\Delta P = -g \qquad (١٦)$$

این معادله را می‌توان با روش‌های مختلفی حل کرد که یکی از آنها روش گاوس–جوردن[1] است. ماتریس تغییرات پارامتر ΔP را محاسبه و مقادیر جدید پارامترها را به‌دست می‌آوریم.

$$P_{new} = P + \Delta P$$

مقدار تابع هدف را در نقطه جدید پارامترها محاسبه و با مقدار تابع هدف در نقطه فعلی مقایسه می‌کنیم. اگر مقدار تابع هدف در نقطه جدید کمتر شده باشد، یعنی به سمت بهینه پیش رفته‌ایم و باید نقطه جدید را به‌عنوان نقطه فعلی در نظر بگیریم و مقدار λ را کاهش دهیم تا روش به سمت روش نیوتن پیش برویم. اگر مقدار تابع هدف در نقطه جدید بیشتر شده باشد، یعنی از بهینه دور شده‌ایم و باید نقطه فعلی را حفظ کنیم و مقدار λ را افزایش دهیم تا روش به سمت گرادیان نزولی شبیه شود. این چرخه را تا رسیدن به نقاط بهینه پارامترها تکرار می‌کنیم.

۳-۱. داده‌های مورد بررسی

داده‌های مورد بررسی پژوهش، داده‌های روزانه شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران از تاریخ ۱۳۹٤/۰۱/۰۵ تا تاریخ ۱٤۰۲/۱۰/۱٦ به تعداد ۲۱۲۲ داده و قیمت‌های پایانی سهام بانک ملت در نماد وبملت به‌صورت روزانه می‌باشد که بیش از ۲۰۰۰ داده است و از سایت شرکت مدیریت فناوری بورس تهران جمع‌آوری شده و پس از تعدیل قیمت نسبت به افزایش سرمایه‌ها و سودهای پرداختی و... استفاده شده است.

٤. برآورد مدل و تجزیه و تحلیل یافته‌ها

در ادامه به بررسی و تحلیل نتایج حاصل از پژوهش می‌پردازیم. این بخش شامل تفسیر داده‌ها، ارزیابی فرضیات تحقیق، و مقایسه یافته‌ها با مطالعات پیشین است. در انتهای این بخش با استفاده از روش‌های آماری معتبر، به ارزیابی دقیق داده‌ها پرداخته و نتایج حاصل را با اهداف تحقیق مطابقت می‌دهیم.

٤-۱. نتایج تحلیل آماری داده‌ها

معیارهای آمار توصیفی قیمت سهام بانک ملت و و بازدهی روزانه آن در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. شاخص‌های آماری قیمت سهام بانک ملت (منبع: یافته‌های تحقیق)

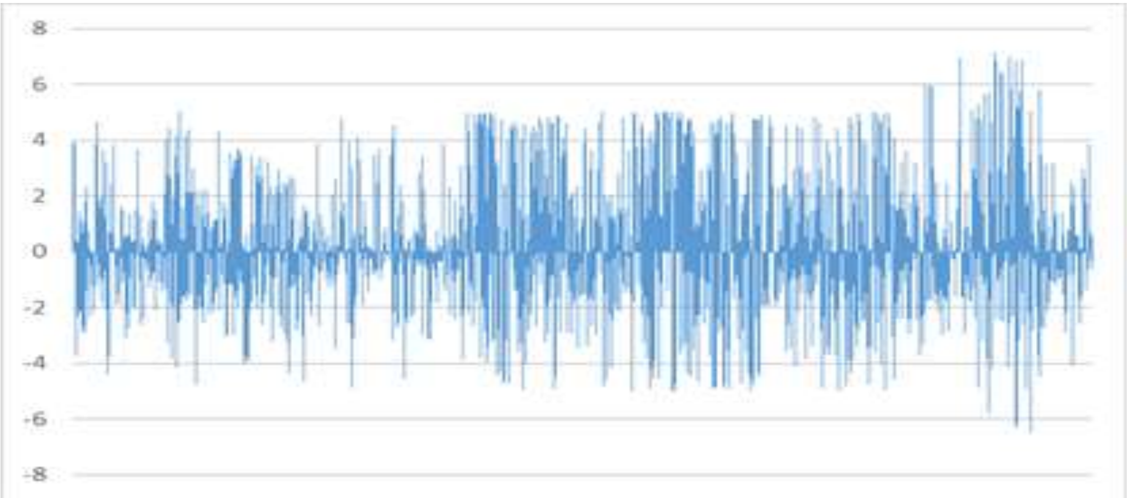
بانک ملت	میانگین	میانه	MAX	MIN	انحراف معیار	چولگی	کشیدگی
قیمت سهم	۳۷۲٤	۳۷۳۱	٥٤٥۰	۲٥۰۲	۷۲۸	۰/۱۲٦۲	۱/۹۲۸۸
نرخ بازدهی	۰/۳۳	۰/۰٥۳۷	٦/۹۹	-٦/٤٦	۲/۳٤	۰/٤۸٥٤	٤/٥۹۲۹

منبع:یافته‌های پژوهش

[1] Gauss-Jordan Method

توزیع قیمت‌ها و بازده نسبتاً متقارن است با کمی چولگی به سمت راست است.کشیدگی در قیمت سهام کمی کمتر از کشیدگی توزیع نرمال است، ولی توزیع بازده‌ها بسیار کشیده‌تر از توزیع نرمال است که باز هم احتمال دارد به‌دلیل وجود دامنه نوسان محدود در بورس تهران باشد.این اطلاعات در تحلیل‌ها استفاده می‌شوند تا تصویری از وضعیت بازار و رفتار قیمت سهم به‌دست آوریم. انحراف معیار بالا و کشیدگی نشان‌دهنده نوسانات قیمتی و ریسک بالاتر در سرمایه‌گذاری است. درحالی که چولگی کم نشان‌دهنده توزیع نسبتاً متقارن داده‌هاست که می‌تواند برای سرمایه‌گذاران محافظه‌کار جذاب باشد.

نمودار ۱ نمودار نوسانات نرخ بازدهی سهام بانک ملت را از اولین روز کاری سال ۱۳۹٤ را برای بیش از ۲۰۰۰ روز کاری نشان می‌دهد؛ که بیانگر نوسانات قابل‌توجه در بازدهی سهام در زمان‌های مختلف است. این مسئله می‌تواند نشان‌دهنده وجود نوسانات خوشه‌ای باشد، الگوی نوسانات خوشه‌ای می‌تواند برای تحلیل و بررسی رفتار قیمت اهمیت داشته باشد، زیرا می‌تواند نشان‌دهنده دوره‌هایی از ناپایداری زیاد در بازار باشد. هرچند این نمودار به تنهایی کافی نیست و برای تایید دقیق وجود نوسانات خوشه‌ای، باید تجزیه و تحلیل‌های آماری بیشتری بر روی داده‌های مربوطه انجام شود. با توجه به مقدار پارامتر هرست، می‌توان نتیجه گرفت که سهام دارای روندی است که از گذشته تأثیر می‌پذیرد و این موضوع می‌تواند برای تحلیل‌های بلندمدت و استراتژی‌های سرمایه‌گذاری مورد توجه قرار گیرد.



نمودار ۱. بازده سهام بانک ملت

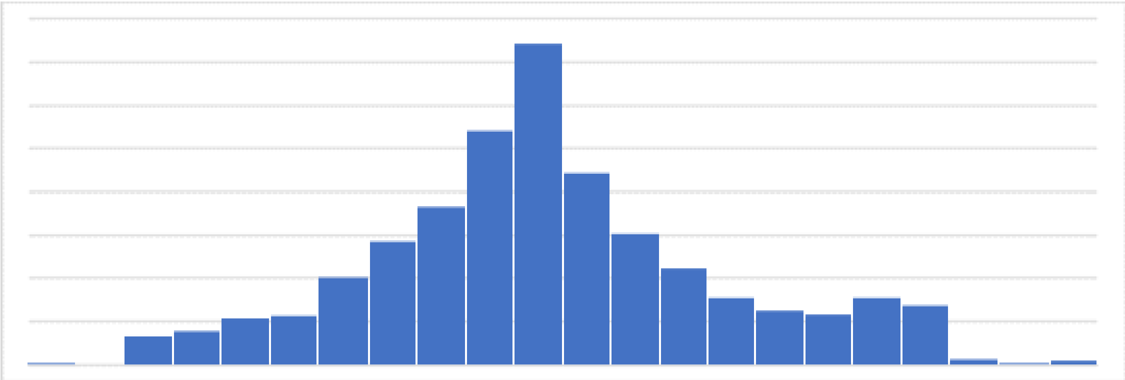
منبع: یافته‌های پژوهش

۱-٤-۱. بررسی نوع توزیع داده‌ها

در ادامه به بررسی توزیع بازده‌ها پرداخته شده است برای پی بردن به نوع توزیع از چند آزمون برای بررسی نرمال بودن توزیع بازده استفاده شده است که مشخص شود توزیع داده‌های گردآوری شده از توزیع طبیعی یا نرمال برخوردار است یا خیر. بررسی نوع توزیع به این دلیل اهمیت دارد که یکی از مسائل مهم در تحلیل آماری داده‌ها، انتخاب بین روش‌های پارامتریک یا برای محاسبات و استنباط آماری است. هر چند روش‌های ناپارامتری ساده‌تر هستند ولی استفاده از آن‌ها در اکثر مواقع باعث می‌شود که نتایج تحلیل‌ها توان کمتری نسبت به روش‌های مشابه

پارامتری داشته باشد و ممکن است یافته‌های طرح تحقیقاتی و تجزیه و تحلیل آماری داده‌ها، گمراه‌کننده یا اشتباه باشد. در نتیجه انجام آزمون نرمال بودن یا تایید فرض نرمال بودن داده‌ها یک نکته کلیدی در تصمیم‌گیری برای انتخاب روش برای استنباط آماری است.روش‌های زیادی برای سنجش و آزمودن نرمال بودن داده وجود دارد که می‌توان از آنها استفاده کرد در ادامه از تعدادی از این آزمون ها استفاده شده است.

نمودار ۲ نمودار فراوانی بازده قیمت سهام بانک ملت است. نمودار فراوانی[۱]، مانند جدول فراوانی[۲] روشی برای نمایش شکل توزیع تجربی داده‌هاست. ترسیم نمودار هیستوگرام در مقابل نمودار توزیع نرمال یکی از روش‌های آزمون نرمال بودن داده‌هاست. به این ترتیب با مقایسه نمودار فراوانی با توزیع نرمال می‌توان پی به نرمال بودن داده‌ها برد. هرچه شکل نمودار فراوانی به توزیع گاوسی[۳] یا زنگی شکل نزدیک‌تر باشد، داده‌ها برازش بیشتری با توزیع نرمال دارند. با توجه به نمودار هیستوگرام برای بازده سهام بانک ملت توزیع بازده‌ها تقریبا متقارن بوده و چولگی[٤] نزدیک به صفر است. و کشیدگی[٥] که نشان‌دهنده ارتفاع توزیع است و معیاری برای بیان بلندی منحنی در نقطه ماکزیمم است در این توزیع بزرگ‌تر از توزیع نرمال است. کشیدگی بزرگ‌تر از ۳ یعنی قله توزیع مورد نظر از توزیع نرمال بالاتر است.



نمودار ۲. نمودار فراوانی بازده سهام بانک ملت

منبع: یافته‌های پژوهش

جارکو ــ برا و شاپیرو ــ ویلک

در نتایج آزمون توزیع جارکو- برا[٦]، pvalue= 0.97 است که نشان‌دهنده نرمال بودن توزیع داده‌های بازده قیمت است. همچنین نتایج آزمون شاپیرو و ویلک[۷] و شاپیرو-فرانسیا[۸] هم نتایج آزمون جاکو- برا را تایید می‌کند و بیانگر توزیع نرمال داده‌هاست.

---

[۱] Histogram
[۲] Frequency Table
[۳] Gaussian distribution
[٤] Skewness
[٥] Kurtosis
[٦] Jarque-Bera Test
[۷] Shapiro-Wilk
[۸] Shapiro-Francia

۲-٤-۱. مانایی

در برآورد مدل‌های سری زمانی یکی از موارد لازم بررسی متغیرها از نظر مانایی و وجود خاصیت برگشت به میانگین است. برای این منظور در این پژوهش از آزمون دیکی فولر تعمیم یافته[۱] استفاده شده است. در این آزمون فرضیه صفر دال بر نامانایی است و حالت مطلوب زمانی اتفاق می‌افتد که فرضیه صفر رد شود. اگر آماره محاسبه شده برای هر متغیر یا تفاضلش کوچکتر از مقدار حدی آماره tau باشد، p-value کمتر از پنج درصد می‌شود و در سطح اطمینان ۹٥ ٪ فرضیه صفر را که مبنی بر نامانا بودن متغیر است رد می‌کنیم، ولی اگر آماره از مقدار بحرانیش کمتر باشد و p-value بزرگ‌تر از پنج درصد باشد نمی‌توان فرضیه صفر را که مبنی‌بر نامانا بودن متغیر است، رد کرد. نتایج این آزمون در جدول ۲ آمده است. نتایج آزمون نشان می‌دهد که متغیر مورد بررسی ساکن بوده و دارای خاصیت برگشت به میانگین است. قدر مطلق آماره tau محاسبه شده بیشتر از مقدار بحرانیش است، درنتیجه فرضیه صفر رد شده و متغیر مانا است. مشاهده می‌شود که متغیر بازده سهام مانا بوده و در این مورد نیاز به تفاضل‌گیری نیست.

جدول ۲. نتایج آزمون دیکی فولر تعمیم یافته

درجه همجمعی	نتیجه	روند	عرض از مبدا	مقدار بحرانی در ۹٥٪	P value	آماره ADF	نام متغیر
I (۰)	مانا	دارد	دارد	۳/٤۱	۰/۰۰٦	٤/۱۰۸	BMLT

منبع: یافته‌های پژوهش

۳-٤-۱. آزمون واریانس ناهمسانی

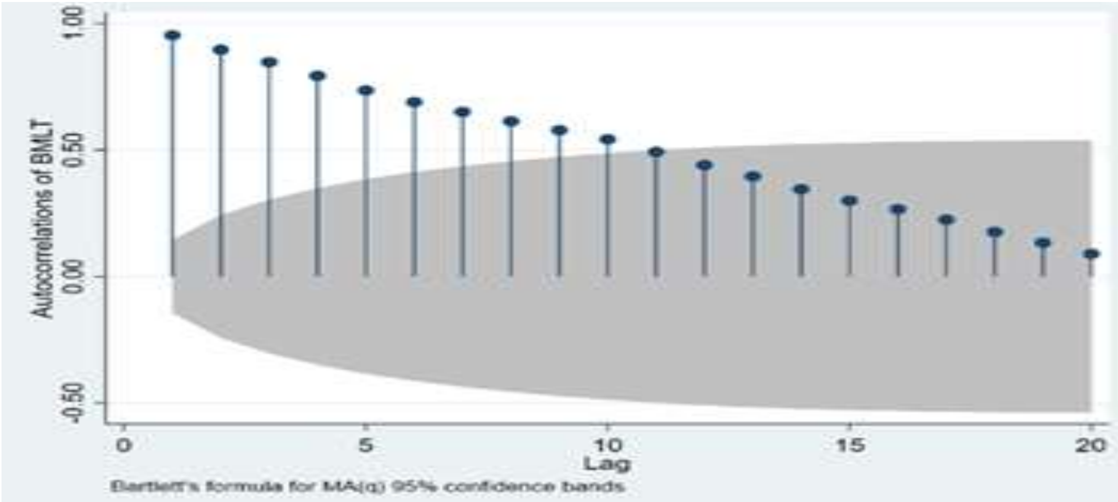
در آزمون گلدفلد-کوانت (GQ) میزان نسبت واریانس ها برابر ۲/٦٦ است که در سطح اطمینان ۹٥ درصد، بیشتر از آماره توزیع F (۱) است که موضوع نشان‌دهنده وجود ناهمسانی واریانس‌هاست. به‌عبارت دیگر، تفاوت قابل توجهی در پراکندگی داده‌ها وجود دارد که می‌تواند بر تحلیل‌های آماری تأثیر بگذارد. این شرایط می‌تواند نیاز به اقدامات تصحیحی برای اطمینان از دقت نتایج آماری داشته باشد. به‌عبارت دیگر، واریانس داده‌ها با تغییر زمان تغییر می‌کند و این موضوع می‌تواند بر تخمین اثر بگذارد. برای رفع این مشکل، ممکن است نیاز به اعمال روش‌هایی مانند وزن‌دهی به داده‌ها یا استفاده از مدل‌های با معادله غیرخطی باشد مدل هستون یکی از روش‌های پیشرفته برای مدل‌سازی نوسانات در بازارهای مالی است که می‌تواند برای رفع مشکل واریانس ناهمسانی مفید باشد. این مدل از یک فرایند دوبعدی استوکاستیک استفاده می‌کند که یکی از آنها قیمت دارایی و دیگری نوسانات آن را توصیف می‌کند.

٤-٤-۱. نتایج آزمون خودهمبستگی

نمودار ۳ خودهمبستگی یک ابزار بصری است که برای نمایش همبستگی سریالی در داده‌های سری زمانی استفاده می‌شود. این نمودار نشان می‌دهد که چگونه مقادیر یک متغیر در زمان‌های مختلف با یکدیگر همبستگی دارند. وقتی که همبستگی سریالی مثبت تا ده دوره وجود دارد، این به این معناست که افزایش قیمت در یک دوره زمانی، احتمال

[۱] Augmented Dickey-Fuller Test

افزایش قیمت در دوره‌های بعدی را افزایش می‌دهد. در این نمودار، خودهمبستگی‌ها در وقفه‌های اولیه بزرگ و قابل‌توجه هستند و به تدریج با افزایش تعداد وقفه‌ها کاهش می‌یابند، که نشان‌دهنده همبستگی مثبت اولیه است که با افزایش وقفه کمتر می‌شود. این الگو می‌تواند برای تحلیل داده‌های قیمت مفید باشد و الگوهای تکرارشونده در داده‌ها و ارتباط بین داده‌های متوالی را شناسایی کند؛ که خود نشان‌دهنده وجود حافظه در روند قیمت و وجود خودشبیهی روند حرکت قیمت را بار دیگر تایید کند.



نمودار ۳. خودهمبستگی بازده قیمت سهام بانک ملت

منبع: یافته‌های پژوهش

نتایج آزمون لیانگ و باکس در جدول ۳ آمده است. این جدول آماره‌های خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی در فضای زمان را نشان می‌دهد. خود همبستگی نشان‌دهنده رابطه بین مقادیر متوالی یک سری زمانی است. خود همبستگی جزئی نشان‌دهنده رابطه بین مقادیر متوالی یک سری زمانی با در نظر گرفتن تأثیر مقادیر میانی است. آماره Q یک ابزار آماری است که برای تست وجود همبستگی سریالی در داده‌های سری زمانی استفاده می‌شود. مقادیر بزرگ آماره Q نشان‌دهنده وجود همبستگی قوی بین داده‌ها در دوره‌های زمانی مختلف است. این مسئله می‌تواند نشان‌دهنده وجود الگوهای قابل پیش‌بینی در قیمت‌ها باشد که ممکن است به‌دلایل مختلفی مانند اطلاعات جدید وارد شده به بازار، واکنش‌های سرمایه‌گذاران به اخبار، یا رفتارهای هم‌گروهی سرمایه‌گذاران ایجاد شده باشد. درنتیجه احتمال وجود نوسانات خوشه‌ای تایید می‌شود ضرورت استفاده از مدل‌های با نوسانات تصادفی مانند مدل هستون قوت می‌گیرد. وقتی $P < Q$ باشد، نشان‌دهنده رد فرضیه صفر (عدم خودهمبستگی) است. اگر این احتمال کمتر از یک سطح معناداری (مثلاً ۰.۰۵) باشد، می‌توان فرضیه صفر را رد کرد و نتیجه گرفت که خودهمبستگی وجود دارد.

جدول ۳. نتایج آزمون خودهمبستگی بازده قیمت سهام بانک ملت

وقفه	همبستگی خود	خود همبستگی جزئی	Q	Prob>Q
۱	۰/۹٥۳۷	۰/۹٥٦٤	۱۷۱۰۲	۰
۲	۰/۸۹٦٦	-۰/۱٥۰۹	۳۲۲۹۸	۰
۳	۰/۸٤۷۹	-۰/۱۷۹	٤٥۹٦٤	۰
٤	۰/۷۹۳٥	-۰/۲٤۱۹	٥۷۹۹۷	۰
٥	۰/۷۳٥٥	۰/۰۳۷۷	٦۸۳۹٥	۰
٦	۰/٦۸۹٦	۰/۱۲٤۱	۷۷٥۸٤	۰
۷	۰/٦٥۰۸	۰/۰۹۸۲	۸٥۸۱٦	۰
۸	۰/٦۱۳۷	۰/۰۱۹	۹۳۱۷۸	۰
۹	۰/٥۷۸٥	-۰/۰۸٤۸	۹۹۷٥۷	۰
۱۰	۰/٥٤۱۹	-۰/۰٤٥٦	۱۰٥٥٦	۰

منبع: یافته‌های پژوهش

٤-۲. نتایج بررسی فرضیه بازار فراکتال و کارایی بورس تهران

پارامتر هرست شاخص کل بورس تهران یک معیار آماری است که نشان می‌دهد که این شاخص چقدر خودشبیه است. این پارامتر می‌تواند بین صفر تا یک باشد و هر چه بیشتر باشد، نشان‌دهنده خودشبیهی بیشتر شاخص است. برای محاسبه این پارامتر می‌توان از روش‌های مختلفی استفاده کرد که هر کدام دقت و پیچیدگی خود را دارند. براساس نتایج برآوردی پژوهش حاضر، مقدار پارامتر هرست برای شاخص کل بورس تهران، برابر با ۰/۷۱ است. این مقدار نشان می‌دهد که شاخص کل بورس تهران دارای خاصیت خودتشابهی است؛ یعنی روند شاخص دارای حافظه است و رفتار آینده آن به رفتار گذشته‌اش وابسته است. که این مسئله بیانگر این موضوع است که احتمال پیش‌بینی دقیق‌تر قیمت سهام در این بازار بالاست.

٤-۳. برازش مدل‌ها

برای برازش مدل‌های حرکت براونی هندسی و هستون در ابتدا پارامترهای این مدل‌ها تخمین زده می‌شود و در ادامه برای پیش‌بینی قیمت سهام با استفاده از نرم افزار پایتون ۱۰۰۰ مسیر نمونه‌ای به روش مونت‌کارلو شبیه‌سازی می‌شود؛ از میانگین این ۱۰۰۰ مسیر به عنوان پیش‌بینی قیمت مدل استفاده می‌شود. قیمت سهام بانک ملت با نماد (وبملت[۱]) برای ۳۹ روز کاری اول سال ۱٤۰۲ توسط هر دو روش مدل‌های دیفرانسیل تصادفی و مدل‌های سری زمانی مورد پیش‌بینی قرار می‌گیرد.

[۱] BMLT

۱-٤-۳. برازش مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی

نتایج تخمین پارامترها

در جدول ٤ مقدار μ نشان می‌دهد که نرخ بازده مورد انتظار در مدل هستون بیشتر از مدل GBM است. مدل هستون نوسان را به‌عنوان یک فرآیند تصادفی مدل می‌کند و درنتیجه اثر نوسان بر قیمت دارایی را در نظر می‌گیرد. مقدار k نشان می‌دهد که سرعت بازگشت واریانس به میانگین بلندمدت θ در مدل هستون بالاست. این موضوع نشانگر این مسئله است که نوسان قیمت تحت تأثیر عوامل خارجی است که باعث انحراف از میانگین می‌شوند، اما در طولانی‌مدت به حالت تعادل بازمی‌گردند.

جدول ٤. نتایج تخمین پارامتر مدل‌های دیفرانسیل تصادفی

پارامتر		Heston		GBM
μ	نرخ بازده مورد انتظار	۰/٤۱	نرخ بازده مورد انتظار	۰/۳٥
k	سرعت بازگشت واریانس به میانگین بلندمدت	٤/۱۱	–	-
θ	میانگین بلندمدت واریانس	۰/٤٦	–	-
σ	واریانس واریانس	۰/٤۳	واریانس	۰/۲۸
ρ	ضریب همبستگی دو فرآیند تصادفی	−۰/٦	–	-
v_0	نوسان اولیه	۰/۲۲	–	-

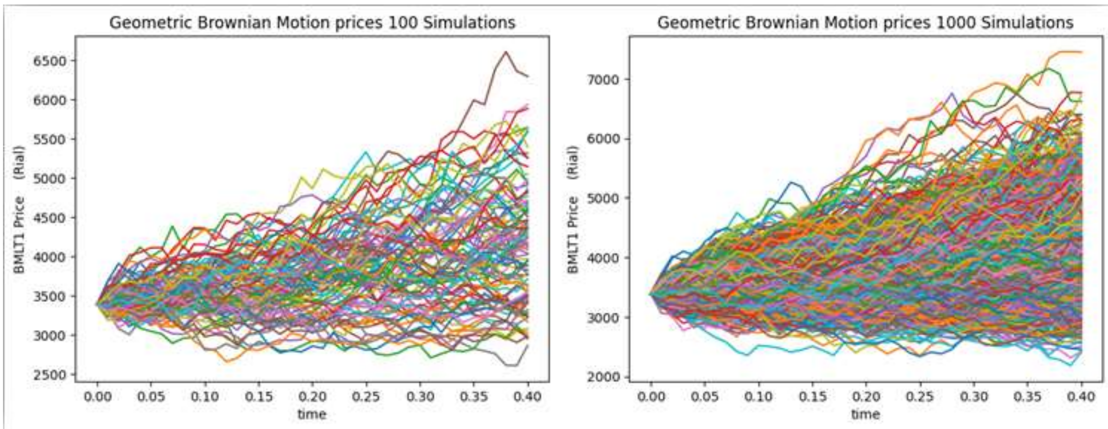
منبع: یافته‌های پژوهش

مقدار θ نشان می‌دهد که میانگین بلندمدت واریانس در مدل هستون بیشتر از واریانس مدل GBM است. مدل هستون تغییرات نوسان را در نظر می‌گیرد و این مسئله میانگین نوسان را افزایش می‌دهد. مقدار σ نشان‌دهنده دامنه نوسان واریانس در مدل هستون و انحراف معیار در مدل GBM است. مقدار ρ نشان می‌دهد که ضریب همبستگی بین دو فرآیند تصادفی نوسان و قیمت دارایی در مدل هستون منفی است. یعنی هنگامی که قیمت دارایی کاهش می‌یابد، نوسان افزایش می‌یابد و بالعکس. مقدار v_0 نشان می‌دهد که نوسان اولیه در مدل هستون کمتر از واریانس مدل GBM است. مدل هستون نوسان را به‌عنوان یک فرآیند تصادفی مدل می‌کند و نوسان اولیه کمتر از نوسان کل داده‌ها بوده است.

۲-٤-۳. نتایج شبیه‌سازی مسیرهای قیمت مدل‌های دیفرانسیل تصادفی(حرکت براونی و هستون)

نمودار ٤ دو نمودار مربوط به پیش‌بینی قیمت سهام بانک ملت با استفاده از مدل حرکت براونی هندسی (GBM) را نشان می‌دهد. مدل GBM فرض می‌کند که نوسان ثابت است و توزیع نرمال دارد. این مدل با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی در نرم‌افزار پایتون برازش شده‌است و پارامترهای آن‌ها تخمین زده شده‌اند. سپس با استفاده از این پارامترها، ۱۰۰۰ مسیر نمونه برای قیمت سهام بانک ملت در ۳۹ روز کاری اول سال ۱٤۰۲ شبیه‌سازی شده‌اند. نمودار سمت چپ، ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی شده توسط مدل GBM را نشان می‌دهد. نمودار سمت راست، ۱۰۰۰ مسیر شبیه‌سازی شده توسط مدل GBM را نشان می‌دهد. محور افقی هر دو نمودار تعداد روز را نشان می‌دهد که از ۰ تا ٤۰ متغیر است. محور عمودی هر دو نمودار قیمت سهام را بر حسب ریال نشان می‌دهد که از ۲٥۰۰ تا ۷۰۰۰ متغیر است.

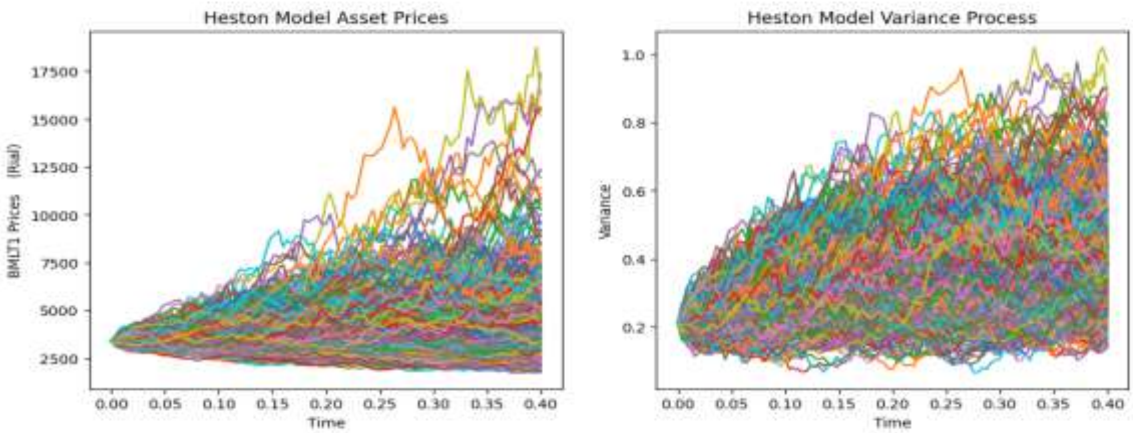
خطوط رنگی مختلف در هر دو نمودار نشان‌دهنده مسیرهای مختلف شبیه‌سازی شده هستند که نشان‌دهنده تنوع در پیش‌بینی‌ها هستند. میانگین ۱۰۰۰ مسیر شبیه‌سازی شده در نمودار سمت راست، به‌عنوان پیش‌بینی قیمت مدل GBM از قیمت سهام بانک ملت ارائه شده است.



نمودار ٤. شبیه‌سازی ۱۰۰۰ مسیر برای قیمت سهام با مدل حرکت براونی هندسی

منبع: یافته‌های پژوهش

نمودار ۵ دو نمودار مدل هستون برای شبیه‌سازی ۱۰۰۰ مسیر برای پیش‌بینی قیمت سهام بانک ملت را نشان می‌دهد. نمودار سمت چپ، مسیرهای شبیه‌سازی شده برای قیمت سهام بانک ملت را بر حسب ریال نشان می‌دهد. نمودار سمت راست، فرآیند واریانس مرتبط با شبیه‌سازی قیمت سهام را نشان می‌دهد. هر دو نمودار برای ٤٠ روز کاری اول سال ١٤٠٢ انجام شده‌اند. محور افقی هر دو نمودار تعداد روز را نشان می‌دهد که از ۰ تا ٤٠ متغیر است. محور عمودی نمودار سمت چپ قیمت سهام را بر حسب ریال نشان می‌دهد که از ۲۵۰۰ تا ۱۷۵۰۰ متغیر است. محور عمودی نمودار سمت راست مقدار واریانس را نشان می‌دهد خطوط رنگی مختلف در هر دو نمودار نشان‌دهنده مسیرهای مختلف شبیه‌سازی شده هستند که نشان‌دهنده تنوع در پیش‌بینی‌ها هستند.



نمودار ۵. شبیه‌سازی ۱۰۰۰ مسیر با مدل هستون برای قیمت سهام بانک ملت و واریانس قیمت

منبع: یافته‌های پژوهش

۳-٤-۳. برازش مدل‌های سری زمانی

تعیین تعداد وقفه

جدول ٥ مربوط به تعیین تعداد وقفه بهینه برای مدل ARMA است. مدل ARMA یک مدل سری زمانی است که برای پیش‌بینی قیمت سهام بانک ملت استفاده شده است. برای این کار، ابتدا با استفاده از آزمون دیکی فولر مشخص شد که داده‌های قیمت سهام مانا هستند. یعنی دارای ریشه واحد هستند و نیاز به تفاضل‌گیری ندارند. برای برازش مدل ، باید تعداد وقفه‌های بهینه برای قیمت و جزء خطا را تعیین کرد. وقفه‌ها نشان‌دهنده تأثیر مقادیر گذشته بر مقادیر آینده هستند. برای انتخاب تعداد وقفه بهینه، از معیارهای مختلفی استفاده شده است. این معیارها عبارتند از:

آکائیک: معیاری که تعادل بین دقت و سادگی مدل را اندازه‌گیری می‌کند. هر چه مقدار آن کمتر باشد، مدل بهتر است.

حنان-کوئین: معیاری که مانند آکائیک، تعادل بین دقت و سادگی مدل را اندازه‌گیری می‌کند. اما بیشتر به سادگی مدل توجه می‌کند. هر چه مقدار آن کمتر باشد، مدل بهتر است.

شوارتز-بیزین: معیاری که مانند آکائیک و حنان-کوئین، تعادل بین دقت و سادگی مدل را اندازه‌گیری می‌کند. اما بیشتر به دقت مدل توجه می‌کند. هر چه مقدار آن کمتر باشد، مدل بهتر است.

خطای پیش‌بینی نهایی: معیاری که میزان خطای مدل را در پیش‌بینی قیمت سهام نشان می‌دهد. هر چه مقدار آن کمتر باشد، مدل بهتر است.

جدول ٥. تعیین تعداد وقفه بهینه مدل سری زمانی (منبع: یافته‌های تحقیق)

شوارتز بیزین	حنان کوئین	آکائیک	خطای پیش‌بینی نهایی	وقفه	وقفه بهینه ❋
١٨/٨٢٧٦	١٨/٨٢٦٥	١٨/٨٢٥٨	٨٨٠٠٠٠٠	٠	وقفه بهینه قیمت ❋
١٤/٧٢٢٤ *	١٤/٧٢٠١ *	١٤/٧١٨٨ *	١٤٤٤٨٠ *	١	
١٤/٧٢٤٥	١٤/٧٢١١	١٤/٧١٩٧	١٤٤٥٣٤	٢	
١٤/٧٢٦٧	١٤/٧٢٢١	١٤/٧١٩٦	١٤٤٥٩٧	٣	
١٤/٧٢٨٣	١٤/٧٢٢٦	١٤/٧١٩٤	١٤٤٥٦٥	٤	
١٤/٧٢٠٣ *	١٤/٧١٩١ *	١٤/٧١٨٥ *	١٤٤٤٣٨ *	٠	وقفه بهینه جزء خطا ❋
١٤/٧٢٢٤	١٤/٧٢٠١	١٤/٧١٨٩	١٤٤٤٩٢	١	
١٤/٧٢٤٧	١٤/٧٢١٢	١٤/٧١٩٣	١٤٤٥٥٦	٢	
١٤/٧٢٦٣	١٤/٧٢١٧	١٤/٧١٩١	١٤٤٥٣٠	٣	
١٤/٧٢٨٦	١٤/٧٢٢٨	١٤/٧١٨٧	١٤٤٦٠٧	٤	

❋ وقفه بهینه

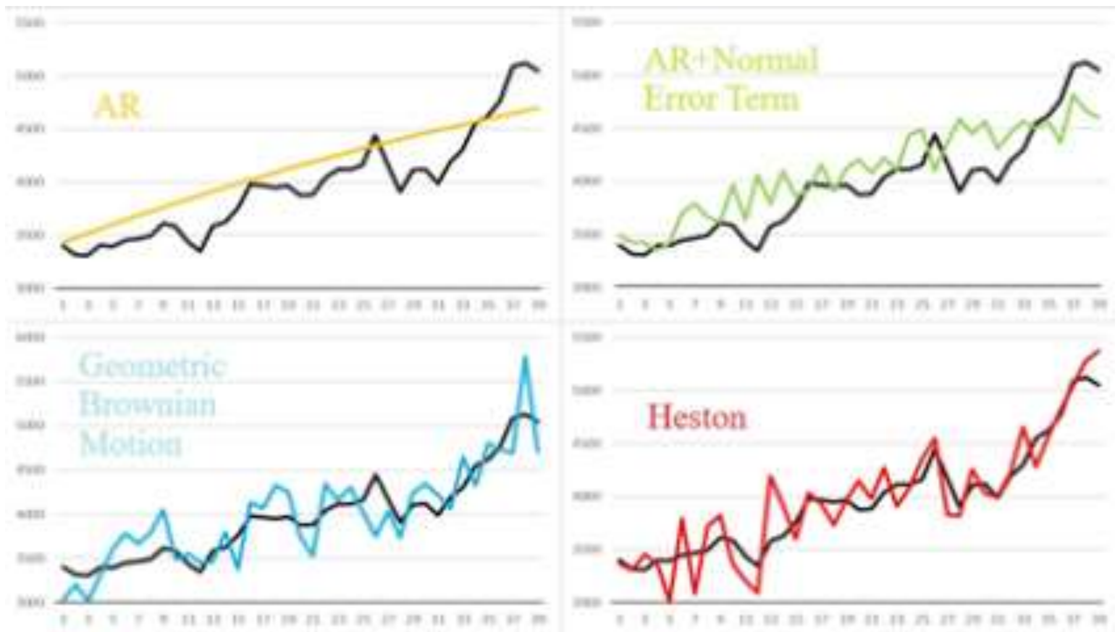
منبع: یافته‌های پژوهش

با توجه به این معیارها، می‌توانیم تعداد وقفه بهینه را برای قیمت و جزء خطا بیابیم. برای این کار، باید به‌دنبال مقادیر کمتر در هر سطر جدول باشیم. این مقادیر با علامت ستاره (❋) مشخص شده‌اند. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که برای قیمت، تنها یک وقفه بهینه است. یعنی مدل AR(1) است. این بدان معناست که قیمت سهام تنها تحت تأثیر

قیمت سهام روز قبل است. برای جزء خطا، هیچ وقفه‌ای بهینه نیست. یعنی مدل MA(0) است. این بدان معناست که خطای مدل تحت تأثیر خطای گذشته نیست. به‌طور خلاصه، می‌توان گفت که مدل ARMA بهینه برای پیش‌بینی قیمت سهام بانک ملت، مدل ARMA(1,0) است. این مدل فقط شامل یک وقفه خودهمبسته برای قیمت و بدون وقفه متوسط متحرک برای جزء خطا است. این مدل ساده و دقیق است و خطای پیش‌بینی کمی دارد. در نهایت با استفاده از نرم‌افزار استتا، پارامترهای مدل AR(1) تخمین زده شده‌اند و برای پیش‌بینی استفاده شده‌اند.

٤-٤. مقایسه دقت پیش‌بینی مدل‌ها

نمودار ٦ چهار نمودار مختلف را نشان می‌دهد که پیش‌بینی‌های قیمت سهام بانک ملت را با استفاده از مدل‌های مختلف با قیمت‌های واقعی مقایسه می‌کنند.



نمودار ٦. نمودار مقایسه نتایج پیش‌بینی قیمت با مقادیر واقعی

منبع: یافته‌های پژوهش

خط مشکی نشان‌دهنده قیمت‌های واقعی است که برای ۳۹ روز کاری اول سال ۱٤۰۲ اتفاق افتاده‌اند. خطوط دیگر نشان‌دهنده پیش‌بینی‌های مدل‌های مختلف هستند که عبارتند از:

- مدل AR : مدلی که فقط از وقفه خودهمبسته برای قیمت استفاده می‌کند. این مدل با خط زرد نشان داده شده است. این مدل روند صعودی قیمت را دنبال می‌کند اما در انتها از قیمت واقعی فاصله می‌گیرد.
- مدل AR + Normal Error Term: مدلی که علاوه بر وقفه خودهمبسته، از یک جزء تصادفی نرمال برای خطا استفاده می‌کند. این مدل با خط سبز نشان داده شده است. این مدل نوسان بیشتری نسبت به قیمت واقعی دارد و از آن دور می‌شود(جزء تصادفی دارای ویژگی‌های خطاهای اتفاق افتاده در دوره‌های قبل از پیش‌بینی می‌باشد).

- مدل حرکت براونی هندسی: این مدل با خط آبی نشان داده شده است. این مدل روند کلی قیمت را دنبال می‌کند، اما در برخی نقاط از آن انحراف زیادی دارد.
- مدل هستون: این مدل با خط قرمز نشان داده شده است. این مدل تطابق بالایی با قیمت واقعی دارد و دقت بالایی در پیش‌بینی نشان می‌دهد؛ اما در نقاط خاصی انحرافات قابل‌توجهی از مقادیر واقعی دارد.

با توجه به این نمودارها، می‌توان نتیجه گرفت که مدل هستون مدلی با دقت بالا در پیش‌بینی قیمت سهام است و می‌تواند گزینه‌ای مناسب برای سرمایه‌گذاران باشد. این مدل می‌تواند تغییرات ناگهانی نوسانات قیمت را پیش‌بینی کند که مدل‌های دیگر نمی‌توانند. این مدل همچنین می‌تواند پدیده‌هایی مانند نوسانات خوشه‌ای و ناهمسانی واریانس را به خوبی توصیف کند که مدل‌های سری زمانی و حرکت براونی هندسی نمی‌توانند.

٤-٥. نتایج مقایسه دقت پیش‌بینی مدل‌ها با معیارهای پس آزمون

در جدول ۷ مقایسه‌ای بین عملکرد چهار مدل پیش‌بینیAR ، AR+NET، GBMو Heston براساس چهار معیار عملکردی MAX AE ، MAPE ، R^2 ، RMSEو MSE است. در اینجا تفسیر هر معیار براساس اطلاعات جدول ۷ ارائه می‌شود:

- MAPE میانگین درصدی خطای مطلق: مدل هستـون با MAPE، ٤/٦٤ درصد بهترین عملکرد را دارد، که نشان‌دهنده دقت بالاتر در پیش‌بینی‌ها است.
- R^2 ضریب تعیین: مدل Heston با R^2، ۰/۷۹٦۳ بالاترین توانایی را در توضیح تغییرات قیمت‌ها دارد؛ و پس از آن مدل AR قرار دارد.
- RMSE ریشه میانگین مربعات خطا و MSE میانگین مربعات خطا: مدل Heston با RMSE،۲۲۳/۷۱ و MSE، ٥٠٠٤٦ کمترین میزان خطا را نشان می‌دهد، که بیانگر دقت بیشتر در پیش‌بینی‌هاست و AR باز هم دررده دوم قرار دارد.
- max AE بزرگ‌ترین خطای مطلق: در این معیار مدل AR کوچک‌ترین max AE و بهترین عملکرد را دارد.

جدول ٦. نتایج ارزیابی دقت پیش‌بینی مدل‌ها

معیارها	Heston	GBM	AR+NET	AR
max AE	٦١٤	٦٦٢	٦٨٤	٥٢٩
MAPE	٤/٦٤	٥/٩٥	٦/١٩	٦/٠٢
R^2	٠/٧٩٦٣	٠/٦٨١٢	٠/٦٣٤٢	٠/٧٠٢١
RMSE	٢٢٣/٧١	٢٧٩/٨٥	٢٩٩/٧٨	٢٧٠/٥٣
MSE	٥٠٠٤٦	٧٨٣١٤	٨٩٨٧٠	٧٣١٨٥

منبع: یافته‌های پژوهش

بر اساس این رتبه‌بندی، مدل هستون در اکثر معیارها بهترین عملکرد را داشته است. مدل دیفرانسیل تصادفی هستون در پیش‌بینی قیمت سهام بانک ملت در بورس اوراق بهادار تهران، عملکرد برتری نسبت به مدل‌های سری

زمانی داشته است. این مدل با دقت بالا و خطای مطلق پیش‌بینی تنها ٤/٦٤ صدم درصدی، توانسته است به سوال تحقیق که در جستجوی مدلی با دقت بالا برای پیش‌بینی قیمت سهام بود، پاسخ دهد و برتری خود را اثبات کرده است. مدل هستون به خوبی توانایی توصیف ویژگی‌های مهم در بازارهای مالی را دارد ازجمله واکنش قیمت به نوسانات بازار و آثار ولگری، که در مدل‌های ساده‌تر به‌خوبی توصیف نمی‌شوند. مقایسه مدل هستون با مدل‌های دیگر نشان می‌دهد که این مدل به‌خوبی توانایی پیش‌بینی نوسانات بازار را دارد و در بسیاری از موارد عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های ساده‌تر دارد. البته، همواره باید به دقت به اعتبارسنجی و تنظیم پارامترها توجه شود تا پیش‌بینی‌ها دقیق و قابل اعتماد باشند. نکته جالب در این قسمت قرار گرفتن مدل AR در رده دوم در سه مورد از معیارهای بالاست، که نشان می‌دهد تعداد وقفه مدل به‌درستی تخمین زده شده و به همین دلیل مدل برآوردی قدرت برازش بالایی دارد. مدل‌های AR، همانند دیگر مدل‌های پیش‌بینی، بر پایه فرضیات خاصی شکل گرفته‌اند که دقت پیش‌بینی‌ها به صحت این فرضیات وابسته است. فرض اساسی در مدل‌های AR این است که الگوهای گذشته در آینده نیز تکرار خواهند شد که شاید یکی از دلایل پیش‌بینی خوب این مدل خاصیت خودشبیه بودن روند شاخص و وجود حافظهٔ بلندمدت آن در سطح نسبتا بالاست که در فرضیه بازار فراکتال تایید شد. ولی این فرضیه، با وجود کاربردی بودن، ممکن است در مواجهه با رویدادهای غیرمترقبه مانند شوک‌های اقتصادی، پیشرفت‌های تکنولوژیک، تصمیمات سیاسی خاص، یا تغییر شرایط اقتصادی، به چالش کشیده شود که می‌تواند به تغییر در الگوهای تقاضا و کاهش دقت پیش‌بینی‌ها در این مدل منجر شود. با این حال، مدل‌های دیفرانسیل تصادفی تا حدودی توانسته‌اند این محدودیت‌ها را جبران کنند.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

با توجه به یافته‌های ارائه شده در این پژوهش، می‌توان نتیجه گرفت که مدل‌های دیفرانسیل تصادفی، به‌ویژه مدل هستون، دارای توانایی بالایی در پیش‌بینی قیمت سهام هستند. این مدل‌ها با استفاده از تکنیک‌های پیشرفته ریاضی و آماری، قادر به شناسایی و پیش‌بینی الگوهای پیچیده در داده‌های مالی هستند که مدل‌های سری زمانی ساده‌تر نمی‌توانند آنها را به‌خوبی تشخیص دهند.

این مقاله به بررسی کارایی مدل‌های دیفرانسیل تصادفی در پیش‌بینی قیمت سهام در بورس اوراق بهادار تهران پرداخته است. مطالعه انجام شده بر روی داده‌های سهام بانک ملت نشان داد که مدل هستون با دقت بسیار بالا و خطای پایین، قادر به پیش‌بینی قیمت سهام است. این نتایج بر اعتبار بالای مدل هستون را در پیش‌بینی قیمت سهام تأکید می‌کند.

این پژوهش با استفاده از داده‌های قیمت سهام بانک ملت و معیارهای آماری، مدلی را پیشنهاد می‌دهد که بتواند با دقت بالا، روندهای قیمت سهام را پیش‌بینی کند. پژوهش حاضر از این جهت اهمیت دارد که به افزایش دانش مالی و تصمیم‌گیری‌های موثرتر در بازارهای مالی کمک می‌کند. در این پژوهش با استفاده از تکنیک‌های حسابان تصادفی به حل معادلات دیفرانسیل تصادفی پرداخته شده است سپس با روش اویلر–مارویاما و الگوریتم لونبرگ–مارکوارت به گسسته‌سازی و کالیبراسیون مدل هستون پرداخته شده است. نتایج نشان می‌دهند که مدل دیفرانسیل تصادفی هستون نسبت به مدل‌های سری زمانی دقت بالاتری در پیش‌بینی قیمت سهام دارد. این نتیجه در پژوهش‌های دیگری ازجمله

کوی و همکاران(۲۰۱۷) ،گولیساشویلی وهمکاران(۲۰۲۰)، انگلمان و دیگران(۲۰۲۱)و گروژکا و دیگران(۲۰۲۳) نیز به اثبات رسیده است.

با این حال، لازم است که تحقیقات بیشتری برای بهبود دقت و کارایی این مدل‌ها انجام شود. پژوهشگران در آینده ممکن است بخواهند روش‌های جدید کالیبراسیون و گسسته‌سازی را امتحان کنند یا مدل‌های جدید داده‌بردار را با استفاده از تکنولوژی‌های نوظهور مانند یادگیری عمیق و داده کاوی توسعه دهند.

مقاله حاضر همچنین نشان می‌دهد که استفاده مناسب از مدل هستون مستلزم درک عمقی از خصوصیات بازار و شرایط خاص دارایی مورد نظر است. بنابراین، تأکید بر آموزش و ترویج دانش فنی در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی و کاربردهای آن در بازار سرمایهٔ ایران، می‌تواند به بهبود تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاری کمک شایانی کند.

پژوهشگران آتی همچنین ممکن است بخواهند علاوه‌بر سهام بانک ملت، رفتار قیمت سایر نمادهای حاضر در بورس تهران و یا سایر دارایی‌ها را نیز با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی تحلیل و بررسی کنند.

همچنین انجام مقایسه شبکه‌های عصبی و معادلات تصادفی در مطالعات آتی می‌تواند به درک بهتر از نقاط قوت و ضعف هر دو روش در مدل‌سازی و پیش‌بینی کمک کند. شبکه‌های عصبی برای توانایی‌شان در یادگیری الگوهای پیچیده و تطبیق با داده‌های غیرخطی شناخته شده‌اند، درحالی که معادلات تصادفی اغلب برای مدل‌سازی دینامیک‌های تصادفی و فرآیندهای زمانی استفاده می‌شوند. این دو روش می‌توانند در کنار هم برای ارائه دیدگاه‌های جامع‌تر و دقت بالاتر در پژوهش‌ها به‌کار روند.

حامی مالی

این مقاله حامی مالی ندارد.

تعارض منافع

تعارض منافع وجود ندارد.

سپاسگزاری

نویسندگان از دست اندرکاران فصلنامه و داوران ناشناس که در بهبود کیفیت مقاله کمک کردند، تشکر می‌کنند.

ORCID

Behrouz Piri Iranshahi https://orcid.org/0009-0005-9123-0892
Davood Jafari Seresht https://orcid.org/0000-0002-3333-5160
Ali Akbar Gholizadeh https://orcid.org/0000-0002-2319-1925
Seyed Ehsan Hosseinidoust https://orcid.org/0000-0001-7199-8734

منابع

- شفیعی، امیر، راعی، رضا، عبده تبریزی، حسین، و فلاح پور، سعید (۱۳۹۸). برآورد ارزش در معرض خطر با رویکرد ارزش فرین و با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار (مدیریت پرتفوی)*، ۱۰(٤۰)، ۳۲۵–۳٤۸. https://sid.ir/paper/197635/fa

- دولو، مریم، و ورزیده، علیرضا (۱۳۹۹). پیش بینی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از مدل حرکت براونی هندسی. *دانش مالی تحلیل اوراق بهادار (مطالعات مالی)*، ۱۳(٤٦)، ۲۰۸–۱۹۳. https://sid.ir/paper/950997/fa

- راعی، زواره و شواخی، علیرضا (۱۳۸٦). بررسی عملکرد استراتژی های سرمایه گذاری در بورس اوراق بهادار تهران. *تحقیقات مالی*, ۸(۲۱). Doi: 20.1001.1.10248153.1385.8.21.4.8

- فرزاد ایوانی، داود جعفری سرشت، عباس افلاطونی. (۱۳۹۷). ارائه الگوی بهینه پیش‌بینی بازده سهام و انتخاب پرتفوی بر مبنای مدل ترکیبی. رساله دکتری. دانشگاه بوعلی سینا همدان.

- علیزاده چمازکتی، مسعود، فتح‌آبادی، مهدی، محمود زاده، محمود و قویدل، صالح.(۱٤۰۳). امکان یا امتناع پیش‌بینی قیمت سهام: شواهدی از صنعت پتروپالایش. *تحقیقات مالی*، ۲٦(۱)، ۸٤–۱۰۲ .

- قلی زاده, کمیاب (۱۳۹٤). تخصیص بهینهٔ دارایی‌ها با فرض نااطمینانی‌های اقتصاد کلان و تحریم‌های بین‌المللی علیه ایران. *مجله تحقیقات اقتصادی*، ۵۰(٤)، ۹۸۸–۹۵۹. doi:10.22059/JTE.2015.56154

- نیسی، عبدالساده، و پیمانی، مسلم (۱۳۹۳). مدل سازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون. *پژوهشنامه اقتصادی*، ۱٤(۵۳)، ۱٦٦–۱٤۳. https://sid.ir/paper/67216/fa

- مکیان، سید نظام‌الدین و موسوی، فاطمه‌السادات (۱۳۹۱). پیش‌بینی قیمت سهام شرکت فرآوردههای نفتی پارس با استفاده از شبکه عصبی و روش رگرسیونی، مطالعه موردی: قیمت سهام شرکت فرآورده‌های نفتی پارس. مدلسازی اقتصادی، ۲ (۱۸)، ۱۲۱–۱۰۵.

- اصغری، مجتبی، حقیقت، علی، نونژاد، مسعود و زارع، هاشم (۱۳۹۸). پویایی‌های نرخ ارز در ایران با استفاده از مدل‌های تعادل عمومی پویای تصادفی (DSGE). مدلسازی اقتصادی، ۲ (٤٦)، ۱۷۱–۱۹۲ .

- Alizadeh Chamazkati, M., Fathabadi, M., Mahmoudzadeh, M., & Ghavidel, S. (2024). The possibility or impossibility of stock prices predicting: Evidence from the petrochemical industry. *Financial Research Journal*, 26(1), 84-102. (in Persian)

- Almaafi, A., Bajaba, S., & Alnori, F. (2023). Stock price prediction using ARIMA versus XGBoost models: the case of the largest telecommunication company in the Middle East. *International Journal of Information Technology*, *15*(4), 1813-1818.

- Asghari, M., Haghighat, A., Noonzhad, M., & Zare, H. (2019). Dynamics of exchange rates in Iran using dynamic stochastic general equilibrium (DSGE) models. *Economic Modeling*, 2(46), 171-192. (in Persian)

- Billah, M. M., Sultana, A., Bhuiyan, F., & Kaosar, M. G. (2024). Stock price prediction: comparison of different moving average techniques using deep learning model. *Neural Computing and Applications*, 1-11.

- Brătian, V., Acu, A. M., Oprean-Stan, C., Dinga, E., & Ionescu, G. M. (2021). Efficient or fractal market hypothesis? A stock indexes modelling using geometric brownian motion and geometric fractional brownian motion. *Mathematics*, *9*(22), 2983. https://doi.org/10.3390/math9222983

- Campbell, J. Y., Giglio, S., Polk, C., & Turley, R. (2018). An intertemporal CAPM with stochastic volatility. *Journal of Financial Economics*, *128*(2), 207-233. https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2018.02.011
- Carr, P., Itkin, A., & Muravey, D. (2022). Semi-analytical pricing of barrier options in the time-dependent Heston model. *The Journal of Derivatives*, *30*(2), 141-171. DOI 10.3905/jod.2022.30.2.141
- Cui, Y., del Baño Rollin, S., & Germano, G. (2017). Full and fast calibration of the Heston stochastic volatility model. *European Journal of Operational Research*, *263*(2), 625-638. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.05.01
- Cui, P., Deng, Z., Hu, W., & Zhu, J. (2021). Accurate and reliable forecasting using stochastic differential equations. arXiv preprint arXiv:2103.15041. https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.15041
- Doulou, M., & Varzideh, A. (2020). Predicting the Tehran Stock Exchange index using the geometric Brownian motion model. *Financial Knowledge of Securities Analysis (Financial Studies)*, 13(46), 193-208. https://sid.ir/paper/950997/fa (in Persian)
- Durrett, R. (2018). Stochastic calculus: a practical introduction. CRC press. https://doi.org/10.1201/9780203738283
- Engelmann, B., Koster, F., & Oeltz, D. (2021). Calibration of the Heston stochastic local volatility model: A finite volume scheme. *International Journal of Financial Engineering*, *8*(01), 2050048. https://doi.org/10.1142/S2424786320500486
- Eyvani, F., Jafari Sarisht, D., & Aflatouni, A. (2018). Presenting an optimal model for stock return prediction and portfolio selection based on a composite model. Phd Thesis. University of Bu-Ali Sina (in Persian)
- Gavin, H. P. (2019). The Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear least squares curve-fitting problems. Department of civil and environmental engineering, *Duke University*, 19
- Gholizadeh, & Kamiab. (2015). Optimal asset allocation with macroeconomic uncertainties and international sanctions against Iran. *Economic Research Journal*, *50*(4), 959-988. doi: 10.22059/JTE.2015.56154 (in Persian)
- Gruszka, J., & Szwabiński, J. (2023). Parameter estimation of the Heston volatility model with jumps in the asset prices. *Econometrics*, *11*(2), 15. https://doi.org/10.3390/econometrics11020015
- Gulisashvili, A., Lagunas, M., Merino, R., & Vives, J. (2020). High-order approximations to call option prices in the Heston model. *Journal of Computational Finance*, *24*(1). SSRN: https://ssrn.com/abstract=3768521
- He, X. J., & Lin, S. (2022). three-factor stochastic volatility model with regime switching. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 1-12. https://doi.org/10.1007/s13160-022-00538-7
- Hill, R. C., Griffiths, W. E., & Lim, G. C. (2018). Principles of econometrics. John Wiley & Sons. ISBN: 978-1-118-45227-1
- Huang, J. Z., & Wu, L. (2004). Specification analysis of option pricing models based on time-changed Lévy processes. *The Journal of Finance*, *59*(3), 1405-1439. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2004.00667.x
- Makian, S. N., & Mousavi, F. (2012). Predicting the stock prices of Pars Oil Products Company using neural network and regression methods: A case study of Pars Oil Products Company stock prices. *Economic Modeling*, 2(18), 105-121. (in Persian)
- Matthias Büchner. (2022 Volume 143, Issue 3). A factor model for option returns. *Journal of Financial Economics*, Pages 1140-1161. https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2021.12.007
- Mikosch, T. (1998). Elementary stochastic calculus with finance in view. World scientific . https://doi.org/10.1142/3856

- Mrázek, M., & Pospíšil, J. (2017). Calibration and simulation of Heston model. Open Mathematics, *15*(1), 679-704. https://doi.org/10.1515/math-2017-0058
- Neisi, A., & Peymani, M. (2014). Modeling the overall index of Tehran Stock Exchange using Heston's stochastic differential equation. *Economic Research Letter*, 14(53), 143-166. Retrieved from. https://sid.ir/paper/67216/fa (in Persian)
- Nguyen, N., & Islam, M. (2021). Comparison of Financial Models for Stock Price Prediction. In 2021 Joint Mathematics Meetings (JMM). AMS
- Prol, J. L. (2022). Risk-return performance of optimized ESG equity portfolios in the NYSE. Finance Research Letters, 50, 103312. https://doi.org/10.1016/j.frl.2022.103312
- Qu, P. (2020). Bank of America Stock Price Research. Journal of Financial Risk Management, *9*(2), 126-140. doi: 10.4236/jfrm.2020.92007. 1.
- Raei, R., Zavareh, A. S., & Shoakhi, A. (2006). Performance evaluation of investment strategies in Tehran Stock Exchange. *Financial Research*, *8*(21). Retrieved from 20.1001.1.10248153.1385.8.21.4.8 (in Persian)
- Rathnayaka, R. K. T., Jianguo, W., & Seneviratna, D. N. (2014, October). Geometric Brownian motion with Ito's lemma approach to evaluate market fluctuations: A case study on Colombo Stock Exchange. In 2014 International Conference on Behavioral, Economic, and Socio-Cultural Computing (BESC2014) (pp. 1-6). IEEE. DOI: 10.1109/BESC.2014.7059517
- Särkkä, S. &. (2019). Applied stochastic differential equations. (Vol. 10). Cambridge University Press . https://doi.org/10.1017/9781108186735
- Sauer, T .(n.d.). Numerical Solution of Stochastic Differential Equations in Finance . https://doi.org/10.1007/978-3-642-17254-0_1
- Shafiei, A., Raei, R., Abdoh Tabrizi, H., & Fallahpour, S. (2019). Estimation of value at risk using extreme value approach and stochastic differential equations. *Financial Engineering and Portfolio Management (Portfolio Management)*, 10(40), 325-348. Retrieved from https://sid.ir/paper/197635/fa (in Persian)
- Shehzad, H. T., Anwar, M. A., & Razzaq, M. (2023). A Comparative Predicting Stock Prices using Heston and Geometric Brownian Motion Models. arXiv preprint arXiv:2302.07796. https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.07796
- Sleire, A. D. (2022). Portfolio allocation under asymmetric dependence in asset returns using local Gaussian correlations. Finance Research Letters, 46, 102475. https://doi.org/10.1016/j.frl.2021.102475
- S. L. Heston, "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options," *Review of Financial Studies*, vol. 6, no. 2, pp. 327-343, 1993. https://doi.org/10.1093/rfs/6.2.327
- Smith, A., Jones, B., & Lee, C. (2022). Pricing European options under a new two-factor HESTON model with regime switching. Journal of Computational and Applied Mathematics, *4*(5), 123-1451. DOI: https://doi.org/10.1007/s10614-021-10117-6
- Zhao, C., Hu, P., Liu, X., Lan, X., & Zhang, H. (2023). Stock market analysis using time series relational models for stock price prediction. *Mathematics*, *11*(5), 1130.
- www.tsetmc.com
- www.fipiran.com