

## طراحی معکوس تیرها و شبکه‌ها به لحاظ تامین شرایط مقاومت و تغییر شکل همزمان

### نوبخت بختیاری

مربی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مراغه

### حسن موسوی اصل میر

مربی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد سلماس

Nobakh@yahoo.com

### چکیده

هدف از این مقاله ارائه یک روش جدید برای تحلیل و طراحی تیرها و شبکه‌ها می‌باشد. نقطه تمایز این روش با روش‌های متعارف طراحی این قبیل سازه‌ها، در این خواهد بود که در روش‌های متعارف طراحی، معمولاً بسته به نوع سازه، ابتدا یکی از دو شرط مقاومت و یا سختی تامین شده و سپس شرط دوم بررسی می‌شود درحالی که در این روش، هر دو شرط مقاومت و سختی در مورد تیرها همچنین در مورد تیر ستون‌ها، شرط پایداری را نیز به طور همزمان تامین می‌نماید. در ادامه با حل یک مثال و مقایسه آن با تحلیل‌های موجود، کارایی روش نشان داده شده است. در نتیجه روش طرح معکوس را می‌توان به راحتی به عنوان یکی از روشهای اقتصادی و آسان برای تحلیل و طراحی تیرها، ستون‌ها و شبکه‌ها با شرایط مرزی و بارگذاری مختلف مورد استفاده قرار داد.

**کلمات کلیدی:** طرح معکوس، تیرها و شبکه‌ها، مقاومت، سختی، تغییر شکل

### ۱- مقدمه

۱-۲- معادله تغییر شکلی را برای تیر فرض می‌کنیم  $w(x)$  این معادله باید شرایط مرزی مربوط به تیر را ارضا نماید و مقدار بیشینه آن در نقطه‌ای که حداکثر مقدار این توابع رخ می‌دهد برابر مقادیر مجاز این تغییر مکانها باشد

۲-۲- انحنا هر مقطع از تیر و یا به عبارت بهتر مشتق دوم معادله

تغییر شکل انتخاب شده در گام ۱ را حساب نموده  $K = \frac{d^2w}{dx^2}$  بر این

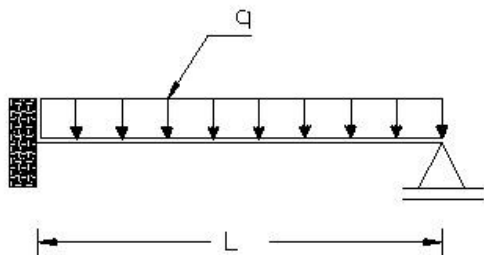
اساس می‌توان معادله ممان خمشی را به صورت معادله (۱) و از ضرب انحنا در صلبیت خمشی مجهول تیر بدست آورد:

تئوری طرح معکوس تیرها بر اساس تئوری خمش الاستیک تیرها و تئوری طرح معکوس شبکه‌ها بر اساس تئوری خمش صفحات تخت استوار است. در این روش با استفاده از تئوری‌های فوق و با انتخاب معادله تغییر شکل مناسب و دلخواه برای سازه و با محاسبه انحنا متناظر با این معادله ضخامت عضو سازه‌ای و صلبیت خمشی آن را به نحوی انتخاب و محاسبه می‌کنیم که تنش‌ها و تغییر مکان‌های ماکزیمم موجود در مقاطع از مقادیر مجاز آن‌ها تجاوز نکند.

### ۲- طرح معکوس تیرها

روش طرح معکوس تیرها را در حالت الاستیک می‌توان در طی گام‌های زیر خلاصه نمود.

$w_0$  خیز وسط دهانه تیر می باشد خیز ماکزیمم تیر تقریباً ۱۸ درصد از خیز وسط دهانه یعنی  $w$  بزرگتر خواهد شد [۵].



شکل ۱- تیر یک سر گیردار و یک سر ساده

از معادله تغییرشکل (۴) دوبار مشتق گیری می شود تا به معادله انحنا (۵) برسیم:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{16w_0}{l^3}(l-3x) \quad (5)$$

فرض می کنیم که عمق تیر ( $h$ ) در طول دهانه ثابت باشد از معادله (۵) معلوم می شود ماکزیمم قدر مطلق انحنا در طول دهانه در  $x=L$  رخ داده و برابر  $\frac{32w_0}{L^2}$  می باشد بنابراین عمق تیر را می توان از روی رابطه (۲) به صورت ذیل تعیین نمود.

$$h = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{L^2}{16w_0} \quad (6)$$

برای این طراحی، تارهای فقط یک مقطع تیر به مقدار مجاز ماکزیمم یعنی  $\sigma_0$  خواهد رسید بر اساس رابطه (۱) معادله لنگر را به صورت ذیل نشان می دهیم:

$$M = -EI \cdot \frac{16w_0}{L^3}(L-3x) \quad (7)$$

بر اساس گام ۳ و با توجه به معادلات تعادل؛ معادله توزیع لنگر خمشی در طول تیر به صورت ذیل خواهد بود که باید با معادله (۷) مساوی قرار داده شود:

$$M = -\frac{q}{2}(x^2 + Ax + B) \quad (8)$$

از معادله انحنا (۵) به راحتی می توان مشاهده نمود که انحنا در  $x=L/3$  برابر صفر و چون تکیه گاه انتهایی تیر بصورت مفصلی

$$M = -EIK \quad (1)$$

$M$  لنگر،  $E$  مدول الاستیسیته،  $I$  ممان اینرسی و  $K$  انحنا تیر می باشد.

۳-۲- مجدداً معادلات لنگر خمشی را با استفاده از معادلات تعادل به نحوی بدست می آوریم که ضمن آنکه مقدار آن در تکیه گاه مفصلی برابر صفر باشد، هر دو معادله لنگر خمشی و انحنا در نقاط یکسانی در طول تیر برابر صفر شوند.  
۳-۲- با مساوی قرار دادن معادلات لنگر بدست آمده از گام های ۲ و ۳ به مقدار صلبیت خمشی تیر یعنی  $EI$  می توان رسید.  
۴-۲- عمق تیر را در هر نقطه با توجه به اینکه تنش موجود در آن نباید از مقدار مجاز خود تجاوز کند می توان بدست آورد:

$$\frac{\sigma_0}{0.5h} = -EK \quad (2)$$

$\sigma_0$  مقدار مجاز تنش

۵-۲- برای محدود نمودن تنش های بیشینه برشی به مقادیر مجاز خود می توان معادله بدست آمده از گام ۳ را برای یافتن معادله توزیع نیروی برشی و از روی آن مقدار ماکزیمم نیروی برشی به کار گرفته و سپس با استفاده از رابطه (۳) به معادله تغییرات عرض تیر رسید [۲].

$$\alpha * \tau_0 * A = V_{max} \quad (3)$$

که در آن ضریب  $\alpha$  برای لحاظ کردن توزیع غیر یکنواخت تنش های برشی در مقطع عضو در نظر گرفته شده است.

### ۳- طرح یک تیر یک سر گیردار و یک سر ساده

تیر فولادی که یک سر آن گیردار و یک سر آن بر تکیه گاه ساده ای استوار است را مطابق شکل (۱) در نظر می گیریم. فرض می کنیم که بار گسترده یکنواختی به شدت  $q$  بر تیر وارد می شود. معادله تغییر شکل  $w$  باید به نحوی انتخاب شود که مقدار تغییر مکان تیر در دو سر تیر یعنی در  $x=0$  و  $x=L$  و همچنین شیب منحنی در  $x=0$  برابر صفر گردد.  $dw/dx=0$  یک تابع ساده که حائز شرایط مرزی فوق باشد به فرم معادله (۴) می باشد.

$$w = \frac{8w_0}{L^3} x^3 (L-x) \quad (4)$$

مشکلات ساخت و اجرای آنها نیز بیشتر خواهد شد برای اجتناب از مشکلات فوق راهکارهای ویژه ای باید اتخاذ گردد تا معادلات تغییر شکل تیر به نحوی انتخاب گردد تا در نهایت معادلات تغییرات ممان اینرسی تیر در طول آن ثابت بدست آید.

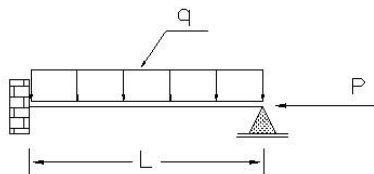
برای نیل به این امر می‌بایست درجه چند جمله ای مربوط به معادله تغییر شکل تیر به اندازه دو واحد بیشتر از درجه چند جمله ای مربوط به معادله ممان در نظر گرفته شود بر این اساس باید معادله تغییر شکل را با توجه به شرایط مرزی و با در نظر گرفتن ثابتهای مجهول لازم نوشته و سپس این ثابت‌ها را با مساوی کردن معادلات ممان و انحنا بدست آورد. تعداد ثابتهای مجهول باید برابر تعداد شرایط مرزی موجود برای نیروهای برشی و لنگر خمشی باشد.

#### ۵- طرح معکوس تیر ستون‌ها

در مورد تیر ستونها پایداری تیر به همراه دو شرط مقاومت و سختی باید کنترل شود در این خصوص نیز مانند بخش‌های قبلی و بر اساس شرایط مرزی به معادله تغییر شکل مناسب خواهیم رسید با یافتن این معادله، ممان‌های ثانویه را می‌توان از حاصل ضرب نیروی محوری  $P$  در میزان تغییر مکان هر نقطه که از روی معادله تغییر شکل حاصل می‌شود بدست آورد ( $P\Delta$ ). این ممانها به ممانهای ناشی از بارگذاری جانبی باید اضافه گردند و ممان اینرسی لازم باید با توجه به این لنگرها محاسبه گردد.

اضافه کردن این لنگرها به لنگرهای خمشی ناشی از بارگذاری جانبی خاطر ما را از این بابت آسوده خواهد نمود که امکان ناپایداری برای تغییر شکل فوق هنگامی که بار محوری  $P$  بر تیر وارد می‌شود وجود نخواهد داشت.

برای تشریح بیشتر موضوع مجدداً مثال موضوع بند ۳ را که بار محوری  $P$  نیز وارد می‌شود را مطابق شکل (۲) در نظر می‌گیریم معادله تغییر شکل تیر و انحنا مربوطه مطابق همان روال و مساوی معادلات (۴) و (۵) محاسبه می‌شود.



شکل ۲- یک تیر یک سر گیردار و یک سر ساده تحت بار جانبی و بار محوری

برای اینکه تنش‌های موجود در هر مقطع تیر از مقدار مجاز  $\sigma_0$  تجاوز نکند به تنش‌های ناشی از لنگر خمشی (معادله (۲)) تنش‌های ناشی از بار محوری  $P$  را اضافه کرده و حاصل را مساوی تنش مجاز قرار می‌دهیم.

$$\sigma_0 = -E \times \frac{d^2 w}{dx^2} \times \frac{h}{2} + \frac{P}{A} \quad (14)$$

است بنابراین معادله لنگر خمشی در نقطه  $x=L/3$  و  $x=L$  باید برابر صفر باشد. بنابراین:

$$x^2 + Ax + B = 1/3(3x - L)(x - L) \quad (9)$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$M = \frac{q}{6}(3x - L)(L - x) \quad (10)$$

از برابری معادلات (۷) و (۱۰) خواهیم داشت:

$$EI = \frac{qL^4}{96w_0} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (11)$$

همانطوریکه از معادله (۱۱) مشاهده می‌کنیم مقدار صلبیت خمشی از انتهای سمت چپ به طور یکنواخت کاهش می‌یابد تا در انتهای سمت راست به صفر برسد.

اگر مقطع تیر به صورت مستطیلی فرض و ارتفاع آن  $h$ ؛ را در طول تیر ثابت و عرض آن  $b$ ؛ را به صورت متغیر در نظر بگیریم تغییرات  $b$  به صورت ذیل خواهد بود:

$$b = \frac{qL^4}{8Ew_0h^3} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (12)$$

معادله توزیع نیروی برشی با مشتق‌گیری از معادله (۱۰) بصورت

$$V = q \cdot \left(\frac{4L}{6} - x\right)$$

خواهد بود.

تغییرات عرض تیر برای محدود نمودن تنش برشی بیشینه به مقدار مجاز بفرم معادله (۱۳) خواهد بود:

$$b = \frac{16qEw_0}{\tau_0\sigma_0L} \quad (13)$$

و به همان ترتیب عرض طراحی تیر را می‌توان از پوش منحنی‌ها مربوط به عرض تیر که از روابط خمش و برش حاصل می‌شود بدست آورد.

در راستای بسط روش برای انواع شرایط هندسی، تکیه گاهی و بارگذاری تیر، روی حالت‌های تیر دو سر ساده دو سر گیردار و کنسول با بار گسترده یکنواخت، بار متمرکز و تیرهای سراسری با، بار گسترده و متمرکز کار شده و نتایج خوبی حاصل شده است.

#### ۴- طرح معکوس تیرهای منشوری

همانطوریکه مشاهده کردیم بسته به نوع معادله تغییر شکل انتخاب شده برای تیر، هر چه معادله تغییرات ممان اینرسی پیچیده تر باشد

### ۶- طرح معکوس شبکه‌ها

این نوع سازه‌ها در مواردی که می‌خواهیم بار مرده وارد بر سازه را کمتر نماییم بکار می‌روند. در طی سالهای متمادی شبکه‌ها اکثراً در ساختن غلاف کشتی به کار گرفته می‌شدند اما امروزه این سازه‌ها در ساختن پلهای بزرگراه‌ها و صنایع هوایماسازی نیز به کار گرفته می‌شوند. ضمناً در خصوص اهمیت روش‌ها تحلیل و طراحی شبکه‌ها این نکته نیز شایان ذکر خواهد بود که تماماً و در بعضی موارد مجبور هستیم که یک سازه خاص را بوسیله یک شبکه معادل سازی و شبکه حاصله را تحلیل و طراحی کنیم به عنوان مثال طراحی سازه‌های چند سلولی با ضخامت نازک را در نظر می‌گیریم این سازه‌ها برای تحمل بارهای جانبی که در سطح وسیعی اعمال می‌شوند به کار گرفته می‌شوند. اجزای تشکیل‌دهنده سازه شامل صفحات بالایی و پایینی که به عنوان بال بکار گرفته می‌شوند و به وسیله یک سیستم از ورق‌ها جان که به صورت طولی و عرضی به بالها چسبیده اند می‌باشد.

روش معمولی آنالیز خمش شبکه‌ها با معادل ساختن خواص سختی تیرها بوسیله یک دال هموزن با ضخامت ثابت و بکار بردن تئوری صفحات صورت می‌گیرد که این امر نیز به حل معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم برای تعیین تغییر شکل‌ها ی صفحه نیاز خواهد داشت که آن را فقط در مورد صفحات با شرایط مرزی ساده می‌توان به طور صریح حل نمود.

### ۷- تئوری طرح معکوس شبکه‌ها:

طرح معکوس شبکه‌ها بر اساس تئوری تغییر مکانهای کوچک صفحات تخت استوار است. برای توضیح نحوه کاربرد طرح معکوس شبکه‌ها صفحه تختی را در نظر می‌گیریم محوره‌های مختصات  $x$  و  $y$  را بر سطح صفحه قرار می‌دهیم به نحوی که  $OXY$  بر صفحه منطبق شود معادله تغییر شکل صفحه را به وسیله  $w(x,y)$  نمایش می‌دهیم که در  $w$  خیز نقطه با مختصات  $x$  و  $y$  می‌باشد.

انحنایهای مربوط به سیستم محوره‌های متعامد جدید ( $A$  و  $B$ ) را که منطبق بر سطح صفحه بوده و با محوره‌های  $x$  و  $y$  زاویه  $\alpha$  می‌سازد را می‌توان بر حسب انحنایهای قدیم ( $x$  و  $y$ ) با استفاده از روش ترسیمی و به کمک دایره مور تعیین نمود. برای اینکه انحنای  $k_{AB}$  برابر صفر باشد و یا به عبارت ساده‌تر برای اینکه محوره‌های اصلی در نقطه‌ای به مختصات ( $x$  و  $y$ ) بر محوره‌های ( $A$  و  $B$ ) منطبق باشد زاویه  $\alpha$  باید در رابطه (۲۰) صدق کند [۱۲].

$$\cot 2\alpha = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}{2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}} = f(x, y) \quad (20)$$

که در آن  $A$  مساحت و  $h$  عمق تیر در هر مقطع عرضی می‌باشد. اگر فرض کنیم که عمق تیر در طول دهانه آن مقدار ثابت  $\frac{\sigma_0 L^2}{32E\omega_0}$  باشد با جایگذاری این مقدار به جای  $h$  و جایگزینی  $\frac{32w_0}{L^2}$  به جای ماکزیمم مقدار  $\frac{d^2 w}{dx^2}$  در رابطه (۱۴)؛ عرض تیر را با فرض مستطیلی بودن مقطع می‌توان به شکل معادله (۱۵) محاسبه نمود:

$$b = \frac{64E\omega_0 p}{\sigma_0^2 L^2} \quad (15)$$

معادله لنگر خمشی را به فرم معادله (۸) انتخاب و به آن لنگرهای خمشی ثانویه را اضافه و معادله کل لنگر خمشی را به شکل معادله (۱۶) نمایش می‌دهیم:

$$M = -\frac{q}{2}(x^2 + bx + c) + p \cdot w \quad (16)$$

لنگر خمشی در  $x=L$  و  $x=L/3$  باید برابر صفر گردد با توجه به این دو شرط مقادیر  $A$  و  $B$  محاسبه و در معادله (۱۶) جایگذاری می‌گردند.

$$M = (L-x)(x-L/3)\left(\frac{q}{2} + \frac{8w_0 p}{L^3}(x+L/3)\right) \quad (17)$$

معادله (۱۷) مساوی حاصل ضرب انحناء در صلیبیت خمشی قرار داده شده و نسبت به  $A$  حل می‌گردد:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{L^3}{48Ew_0}(L-x)\left(\frac{q}{2} + \frac{8w_0 p}{L^3}(x+L/3)\right) \quad (18)$$

اگر در رابطه (۱۸) مقدار  $\frac{\sigma_0 l^2}{32E\omega_0}$  را به جای  $h$  جایگزین نموده و اگر معادله حاصله را نسبت به عرض تیر حل کنیم در این صورت معادله تغییرات عرض تیر را در طول دهانه به صورت سهموی و مطابق رابطه (۱۹) خواهیم داشت:

$$b = \frac{8192E^2 w_0^2}{\sigma_0^3 L^3} = (L-x)\left(\frac{q}{2} + \frac{8w_0 p}{L^3}(x+L/3)\right) \quad (19)$$

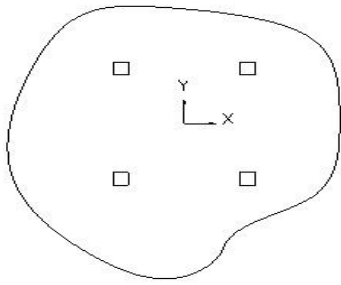
از روابط (۱۸) و (۱۹) دو معادله برای تغییرات  $b$  حاصل می‌گردد که اولی عرض لازم برای تیر جهت تامین شرط مقاومت و دومی عرض لازم را جهت تامین شرط پایداری و تغییر شکل تیر نتیجه می‌دهد برای یافتن عرضی از تیر که در آن هر سه شرط مقاومت، تغییر شکل و پایداری سازه تامین می‌گردد کافی است منحنی‌های حاصل از دو معادله (۱۸) و (۱۹) را با مقیاس مناسبی بر روی محور تیر رسم و پوش منحنی‌ها فوق را به عنوان عرض طراحی تیر برگزید.

اگر مقادیر مربوط به  $M_B$  و  $M_A$  را از روابط (۲۴) در معادله (۲۵) قرار دهیم به رابطه‌ای ما بین دو صلبیت خمشی  $E$  و  $EI_A$  خواهیم رسید برای حل معادله حاصله جوابهایی را برای  $I_B/I_A$  فرض و از روی آنها به عرض تیر لازم برای واحد عرض شبکه می‌توان رسید.

### ۲-۷- طراحی شبکه کف طبقه با آرایش مستطیلی ستون‌ها

کف یک طبقه را که تکیه‌گاه‌های آن ستونهایی با آرایش منظم می‌باشد را مطابق شکل (۳) در نظر می‌گیریم فاصله این ستونها در جهت  $x$  برابر  $2a$  و در جهت  $y$  برابر  $2b$  می‌باشد. مبدا مختصات را در وسط پانل در نظر می‌گیریم و معادله تغییر شکل را به صورت معادله (۲۶) انتخاب می‌کنیم:

$$w = w_0 \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^4}{2a^2} + \frac{y^4}{2b^4} \right] \quad (26)$$



شکل ۳- کف طبقه با آرایش منظم ستون‌ها

تغییر مکان ماکزیمم بر اساس معادله (۲۶) در  $x=y=0$  رخ داده و مقدار مجاز آن نیز برابر خیز مجاز  $w_0$  قرار داده شده است. شرایط مرزی ایجاب می‌کند که مقدار تغییر مکان در  $x = \pm a$  و  $y = \pm b$ ، شیب منحنی تغییر مکان در جهت  $x$  در  $x=0$  و  $x = \pm a$  و شیب منحنی تغییر مکان در جهت  $y$  در  $y=0$  و  $y = \pm b$  برابر صفر باشد. از معادله تغییر شکل (۲۶) انحناها را به شکل معادلات (۲۷) می‌توان محاسبه نمود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{-2w_0}{a^2} \left( 1 - \frac{3x^2}{a^2} \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{-2w_0}{b^2} \left( 1 - \frac{3y^2}{b^2} \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

کمیت  $\cot 2\alpha$  به صورت تابعی از  $x$  و  $y$  خواهد بود بنابراین برای اختصار آنرا با  $f(x,y)$  نشان داده‌ایم و چون محورهای  $(A,B)$  با محورهای  $(x,y)$  زاویه  $\alpha$  را می‌سازد بنابراین  $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$  همواره برقرار خواهد بود با توجه به رابطه مثلثاتی:

$$tg\alpha = -\cot g 2\alpha \pm \sqrt{1 + \cot g^2 2\alpha} \quad (21)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx} = -f \pm \sqrt{1 + f^2} \quad (22)$$

دو معادله (۲۱) و (۲۲) مجموعه‌ای از منحنی‌های متعامد را نتیجه خواهند داد. در امتداد هر یک از این منحنی‌ها یعنی در راستای شیب مماس بر هر نقطه واقع بر منحنی انحنای پیچشی  $k_{AB}$  برابر صفر خواهد بود و این منحنی‌ها در حقیقت منحنی‌های مربوط به انحنای اصلی خواهد بود.

به کمک دایره مور مقادیر انحناهای اصلی را محاسبه و با استفاده از روابط مثلثاتی آنها را بشکل ذیل نمایش می‌دهیم:

$$\frac{d^2 w}{dA^2}, \frac{d^2 w}{dB^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \pm \frac{d^2 w}{dx dy} \sqrt{1 + f^2} \quad (23)$$

### ۷-۱- گام به گام روش طرح معکوس شبکه‌ها

الف - معادله تغییر شکلی به صورت  $w(x,y)$  برای شبکه فرض می‌کنیم این معادله باید حائز کلیه شرایط مرزی مربوط به شبکه باشد.

ب- تابع  $f$  را محاسبه نموده و مقدار حاصله را در رابطه  $\frac{dy}{dx} = -f \pm \sqrt{1 + f^2}$  قرار می‌دهیم که نتیجه آن یک معادله

دیفرانسیل از مرتبه اول خواهد بود. با حل معادله دیفرانسیل مزبور می‌توان به خطوط انحنای اصلی رسید. اگر محور تیرهای شبکه در امتداد این خطوط قرار داشته باشند در این صورت تیرها تحت پیچش قرار نخواهند گرفت.

ج - مقدار انحناهای اصلی را از رابطه مربوطه حساب می‌کنیم با معلوم شدن مقدار انحناهای اصلی لنگر خمشی در واحد عرض تیرها یعنی  $M_B$  و  $M_A$  را می‌توان از رابطه (۲۴) حساب نمود:

$$M_A = -EI_A \frac{d^2 w}{dA^2}, M_B = -EI_B \frac{d^2 w}{dB^2} \quad (24)$$

و عمق تیرها را به نحوی میتوان تعیین نمود که تنش‌های ماکزیمم بوجود آمده در تیرها از مقدار مجاز تجاوز نکنند.

هـ) و در نهایت معادله تعادل مربوط به تئوری صفحات باید برقرار شود اگر بار وارد بر شبکه به صورت گسترده با شدت  $q$  باشد معادله تعادل یاد شده را بدلیل آنکه برای جهات  $(A,B)$  مقدار  $M_{AB}$  برابر صفر است به صورت معادله (۲۵) می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2 M_A}{dA^2} + \frac{d^2 M_B}{dB^2} + q = 0 \quad (25)$$

$$h_y = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{b^2}{2w_0} = 27cm$$

$$h_x = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{a^2}{2w_0} = 12cm$$

در معادله (۳۰) با جایگذاری مقادیر متناظر خواهیم داشت:

$$5.0625I_x + I_y = 81$$

مقادیری از  $I_x$  و  $I_y$  که در این معادله صدق کنند جوابی برای مسئله خواهند بود از دیدگاه اقتصادی هر مقداری که در این رابطه برای  $I_x$  و  $I_y$  انتخاب کنیم مقدار مصالح مصرفی در کل شبکه برابر مقداری ثابت خواهد بود. به عنوان مثال می‌توانیم  $I_y$  را برابر صفر انتخاب کرده و تمام تیرهای شبکه را در جهت X اجرا نماییم و یا اگر به عنوان مثالی دیگر مقدار  $I_x$  را برابر  $3.85cm^3$  و مقدار  $I_y$  را برابر  $61.5cm^3$  در نظر بگیریم و مقاطع تیرها را مستطیلی انتخاب کنیم.

$$b_y = 0.0374cm/cm \quad \frac{1}{12}b_y h_y^3 = 61.50$$

$$b_x = 0.0267cm/cm \quad \frac{1}{12}b_x h_x^3 = 3.85$$

برای یافتن عرض کل تیرهای شبکه در دو جهت Y و X کفایت تا مقادیر فوق را در طول و عرض هر پانل ضرب کنیم:

$$B_y = 240 \times 0.0374 = 9cm$$

$$B_x = 360 \times 0.0267 = 9.6cm$$

بدین ترتیب تیرریزی می‌تواند بدین صورت باشد که یک تیر با عرض 9 cm در جهت Y و سه تیر با عرض 3.2cm در جهت X در نظر بگیریم این ترتیب تیرریزی در شکل (۴) نشان داده شده است. طراحی شبکه دایره‌ای بالبه گیردار و تکیه گاه ساده، شبکه مستطیل شکل با چهار تکیه‌گاه ساده با بار گسترده یکنواخت و بار متمرکز، شبکه مربع شکل با تکیه‌گاه ساده و گیردار در محیط شبکه انجام شده و جهت تشریح هر چه بیشتر جزئیات روش، قابل ارائه است.

آخرین رابطه از معادلات (۲۷) نشان می‌دهد که خطوط مربوط به انحناهای اصلی به صورت خط راست بوده و موازی محورهای X و Y می‌باشند، بنابراین یک شبکه مستطیلی از تیرها را می‌توان مورد استفاده قرار داد با توجه به معادلات انحنا (۲۷) لنگرهای خمش برابرند با:

$$M_x = EI_x \cdot \frac{2w_0}{a^2} \left(1 - \frac{3x^2}{a^2}\right) \quad (28)$$

$$M_y = EI_y \cdot \frac{2w_0}{b^2} \left(1 - \frac{3y^2}{b^2}\right)$$

روابط (۲۸) باید در معادله تعادل صدق کنند. معادله تعادل تئوری صفحات را با جایگذاری  $M_x$  و  $M_y$  به جای  $M_A$  و  $M_B$  به صورت معادله (۲۹) می‌توان نوشت که در آن فرض شده است که بارگذاری کف از نوع گسترده یکنواخت و بشدت q باشد.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (29)$$

بی‌نهایت جواب برای معادله (۲۹) می‌توان یافت که در آن صدق کنند ساده‌ترین طراحی آنست که  $I_x$  و  $I_y$  را در طول تیرها ثابت بگیریم بدین ترتیب با جایگذاری روابط مربوط به لنگرهای خمشی (معادلات (۲۸)) در معادله تعادل (۲۹) می‌توان به رابطه ذیل ما بین  $I_x$  و  $I_y$  رسید:

$$12w_0 E \left( \frac{I_x}{a^4} + \frac{I_y}{b^4} \right) = q \quad (30)$$

هر مقدار برای  $I_x$  و  $I_y$  که در معادله (۳۰) صدق کند جوابی برای مسئله طراحی خواهد بود. برای طراحی یک مثال عددی فرض می‌کنیم که

$$\sigma_0 = 1000 \frac{kg}{cm^2}$$

$$E = 2 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$$

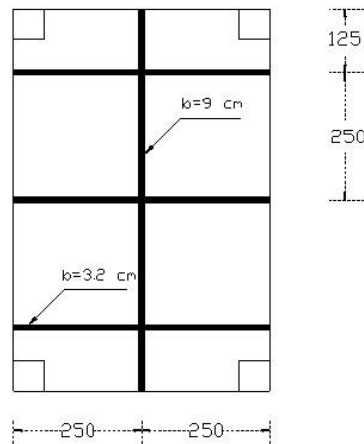
$$q = 0.56 \frac{kg}{cm^2}$$

$$w_0 = 0.3cm$$

و همچنین فرض می‌کنیم که فاصله ستونها در جهت X برابر ۲۴۰ و در جهت Y برابر ۳۶۰ سانتی‌متر باشد یعنی  $a=120cm$  و  $b=180cm$  باشد. قدر مطلق انحناء ماکزیمم مقدار خود را در جهت X در

$$x = \pm a \quad \text{برابر} \quad \frac{4w_0}{a^2} \quad \text{و در جهت y در} \quad y = \pm b \quad \text{برابر} \quad \frac{4w_0}{b^2}$$

خواهد داشت. اگر تنش‌های موجود در این مقاطع را به مقدار مجاز  $\sigma_0$  محدود کنیم در این صورت عمق تیرهای شبکه در دو جهت X و Y برابرند با



شکل ۴- تیربیزی شبکه

#### ۸- نتیجه گیری و پیشنهادها

با توجه به مباحث عنوان شده مشاهده می‌شود که روش طرح معکوس می‌تواند به راحتی به عنوان یکی از روشهای اقتصادی و آسان برای تحلیل و طراحی تیرها، ستون‌ها و شبکه‌ها با شرایط مرزی و بارگذاری مختلف مورد استفاده قرار گیرد. چرا که در این روش تأمین شرایط مقاومت و تغییر شکل به صورت مجزا و در فازهای مختلف صورت نمی‌گیرد بلکه روش فوق این شرایط را با حداقل حجم محاسبات لازم و به صورت هم‌زمان تأمین می‌نماید. این روش برای

بررسی نحوه تحلیل و طراحی سازه‌های دیگر از جمله قاب‌های خمشی، تیرهای سرتاسری و سازه‌های فضایی و ... نیست؛ ولی با توجه به این نکته که این سازه‌ها ترکیبی از عناصر بررسی شده در این مقاله می‌باشد بررسی تحلیل و طراحی سازه‌ها فوق با استفاده از این روش می‌تواند مبنای کار قرارگیرد و به عنوان پیشنهاد، می‌توان روش طرح معکوس را به صورت یک پارچه برای سازه‌های مذکور بکار گرفت.

#### ۹- مراجع

- ۱- بهروش، ع.، حل معادلات دیفرانسیل جزئی به روش المانهای محدود، انتشارات هادی، ۱۳۷۰.
- ۲- پورپاک، ع.، جزوه محاسبات عددی، دانشکده فنی دانشگاه تهران، ۱۳۷۱.
- ۳- توکلی‌هشتجین، ت.، مهر کار اصل، م.، مقاومت مصالح، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۰.
- ۴- عادل، ح.، مقاومت مصالح، انتشارات دهخدا، ۱۳۷۱.
- ۵- میرقادی، ر.، جزوه تئوری صفحات، دانشکده فنی، دانشگاه تهران، ۱۳۷۲.

- 8- Heyman, J., Inverse Design of Beams And Grillages", Proceeding Institution of Civil Engineers, Vol. 13, 1979, pp 339-352.
- 9-Kanagasundaram, S., And Karihaloo, B.L., "optimal Strength And Stiffness Deign of beams" Journal of Structural Engineering, Vol. 109, 1983, pp 221-237.
- 10-Tasng, N., Research in Structures Engineering at Imperial College London, The Structural Engineering, 2007.
- 11-Zhao, X.L., Han, L.H., Steel-filled tubular members and connections, Taylor and francis Group, London, UK, 2010.
- 12-Stevens, L.K., 2009. Direct Design By Limiting Deformations, Proceeding Institution of Civil Engineers, Vol. 16, 1987, pp 235-258.
- 13- Timoshenko, S., Theory of Plates And shells, Mc Graw Hill International Book Company, 1982.
- 14-Tin.Loi, F., And Pulmano, V.A., Limit Analysis of Curved Grids. Journal of Structural Engineering, Vol. 116, 1999, pp 1535-1546.

- 6- Parker, J.A., & Zhao, X.L., Test and design of steel filled elliptical hollow section stub columns, Thin-walled Structures, vol. 47, No. 6-7, 2009, pp 617-628.
- 7- Gent, A.R., The Design Of Frame Structures Considering Strength, Stability, And Deflections. Proceeding Institution of Civil Engineers, Vol. 23, 1992, pp 337-360.

## The Reverse Design of Beams and Networks to Provide Strength and Simultaneous Deformation

**N.Bakhtyari**

Department of Civil Engineering, Maragheh Branch, Islamic Azad University,  
Maragheh, *Iran*

**M.H.Mosavi Asl**

Department of Civil Engineering, Salmas Branch, Islamic Azad University,  
Salmas, *Iran*

### **Abstract**

This paper presents a new method for the analysis and design of beams and networks. In this method, both the strength and stiffness of the beams as well as the condition of the beam column simultaneously provides the stability condition. Through an example and comparison with available analyses, the efficiency of the method is shown. It can be seen that as a quick, economical and easy method, this method can be used for the analysis and design of beams and columns with different boundary conditions, and other structures including frames and continuous beams.

**Keywords:** reverse plan, beams, networks, strength, stiffness, deformation