# آنالیز ارتعاش آزاد ورق‌های S-FGM-Coated و S-FGM-Undercoated با شرایط مرزی کلاسیک

رضا امینی نژاد[۱]، سید علیرضا مهاجرانی[۲] ، علیرضا صمصامی [۳] و شهاب امینی نژاد[۴]
Rezanojum@yahoo.com

**چکیده**

این تحقیق ارتعاش آزاد ورق های چند لایه ای همراه با شرایط مرزی مختلف را بررسی می نماید. ابتدا یک ورق S-FGM با شرایط مرزی مختلف بررسی می شود. سپس یک ورق دو لایه ای که در آن یک لایهٔ S-FGM بر روی یک زیر لایهٔ هموژن (همگن) پوشانده شده، تحت شرایط مرزی مختلف بررسی می گردد که برای سادگی S-FGM-coated نامیده می شود. دیگری یک ورق سه لایه ای که در آن S-FGM به عنوان لایهٔ وسط بکار گرفته شده و مواد هموژن متفاوتی در لایه های بالائی و پائینی هستند؛ که تحت شرایط مرزی مختلف می باشد، بررسی گردیده که این ورق FGM-undercoated نامیده شده است. مدول یانگ ورق تابعی در راستای ضخامت متغیر فرض شده است و ضریب پوآسون در سراسر ورق ثابت باقی می ماند. گرادیان ماده در قسمت FGM از ساختار لمینیت از توابع S مانند پیروی می کند، بدین منظور این ورقها S-FGM نامیده شده‌اند. برای ساختارهای چند لایه ای، محاسبات کمیت های $A_{11}, B_{11}, C_{11}, Q_{11}, S_{11}$ در این موارد پیچیده تعریف شده اند، بنابراین در این تحقیق یک روشی برای راحت تر شدن محاسبات آنها بکار برده شده است. ابتدا نتایج با نرم افزار المان محدود ABAQUS مقایسه شده و مطابقت خوبی را نشان دادند. سپس مقادیر فرکانسهای هر سه ورق برای شرایط مرزی مختلف و نسبتهای طول به عرض برای تعدادی از پارامتر ماده بدست آمده اند و به صورت نمودار ارائه گردیدند.

**کلیدواژه:**

ورق S-FGM-Coated - لمینیت- ارتعاش آزاد- CPT

۱- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک

۲- عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، sa_mohas@hotmail.com

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، alisamamy@yahoo.com

۴- دانشجوی کارشناسی، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، mec_eng_2010@yahoo.com

## ۱- مقدمه

به خاطر استفاده های وسیعی که از ورقهای نازک و ضخیم در صنایع مکانیکی، عمران و سازه ها می شود مطالعه رفتار ارتعاشی ورقها نقش مهمی در طراحی مهندسان سازه ایفا می کند. مطالعه در زمینه ارتعاشات این ورقها باعث بهینه کردن طراحی و کاهش هزینه های اقتصادی در پروژه ها می شود و دسترسی به بازدهی بیشتر را میسر می سازد. از کاربردهای گسترده ورقها می توان به استفاده از آنها در ساخت پلها، ساختمانها، سطوح هواپیما ها و همچنین مهندسی دریایی به ویژه ساخت کف عرشه کشتی اشاره کرد و به صورت گسترده ای در صنایع هوا و فضا کاربرد دارند. به طور مثال هنگام بررسی سازه موشک باید فرکانسهای طبیعی آن محاسبه شده و مشخص باشند تا در اثر بارهای تحریک ناشی از سیستم های دوار داخلی مانند، پمپ، توربین، ژنراتور و .... موشک دچار پدیده تشدید نشده و سیستم کنترل موشک مختل نگردد و یا به طور خاص می توان محفظه احتراق یک موشک سوخت مایع را نام برد که در معرض گازهای داغ ناشی از احتراق قرار دارد و ممکن است در اثر نوسانات سیستم تغذیه دچار پدیده ناپایداری احتراق شود که به انفجار موشک در لحظات ابتدایی پرواز منجر می شود.

FGM[1] یا مادهٔ تابعی یک ماده مصنوعی با ریز ساختار غیر همگن می باشد که خواص مکانیکی آن به طور ملایم و پیوسته از یک سطح تا سطح دیگر جسم تغییر می کند. این خاصیت ویژه به وسیله تغییر پله ای و یکنواخت و نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده به دست می‌آید. اکثر خصوصیات مشخص یک FGM ساختار میکروسکوپی غیر یکنواخت سازه همراه با خواص ماکروسکوپی تابعی پیوسته هستند که ذکر شده است[۱]. در یک مادهٔ FGM، وجه مشترک بین دو ماده پیدا نمی باشد چرا که مشخصات دو یا چند مادهٔ کامپوزیت حفظ شده اند.

امتیاز اصلی مواد FGM مقاومت بسیار بالای آنها در برابر محیط های با درجه حرارت فوق العاده و تغییرات شدید درجه حرارت می باشد. مؤلفه سرامیکی جسم به دلیل هدایت حرارتی پایین باعث مقاومت در برابر دماهای بالا می گردد. از سوی دیگر مؤلفه فلزی باعث جلوگیری از رشد ترک و شکست ماده در اثر تنش‌های حرارتی بسیار بالای ایجاد شده می گردد. همچنین پیوستگی تغییرات ریز ساختاری (تغییرات مدول یانگ از سرامیک به فلز به صورت یکنواخت می باشد.) باعث امتیاز ماده FGM نسبت به انواع مواد مرکب لایه ای(لمینیت ها) گردیده است. از جمله کاربردهای اصلی این ماده می توان استفاده در راکتورهای هسته ای( مواد تشکیل دهنده دیواره داخلی راکتور ) استفاده در صنایع شیمیایی( غشا ها و کاتالیستها )، استفاده در مهندسی پزشکی(کاشت دندان مصنوعی، استخوان های مصنوعی ) و سایر فن آوری‌های نوین مانند موتورهای سرامیکی و پوشش در برابر خوردگی و حرارت را نام برد. به علت درخواستهای زیاد بر قابلیت ها و عمر مؤثر مواد، تکنولوژی پوشش (coating) یا مادهٔ کامپوزیت جهت افزودن طول عمر مواد بکار رفته است. تنش های تکین (ناپیوستگی تنش) بین لایه های مختلف تخریب ایجاد کرده و ممکن است باعث ایجاد ترک شوند و بدین گونه لمینیت خیلی مستعد ورقه ورقه شدن می شود. ایده و مفهوم به اصطلاح مادهٔ تابعی (FGM) برای حذف تنشهای تکین، کم کردن تنشهای پسماند و افزودن استقامت پیوستگی معرفی شده است. [۴،۳،۲]. بنابراین دانستن تغییرات فرکانس های طبیعی ورق پس از پوشش دهی کردن در این ورق ها مهم است. به لحاظ آنکه پس از coat کردن ورقها به دلیل آنکه مقدار مادهٔ FGM مورد استفاده در سازه ها کمتر می شود می توانند از لحاظ اقتصادی مقرون به صرفه واقع گردند (مانند استفاده در بدنهٔ فضاپیماها).

در ۱۰ سال گذشته، محققان بسیاری مطالعه ای در مادهٔ تشکیل دهنده اختصاص داده‌اند. [۵] و [۶] مکانیک شکست، [۷] و [۸] و [۹] و [۱۰] و [۱۱] و [۱۲] و پردازش FGMها [۱۳]و [۱۴]. اخیراً، FGMها در ساختارهای ورق به جهت بررسی های مختلف بکار گرفته شده اند. مطالعات ترموالاستیکِ تغییر شکل صفحات FGM را می توان در بسیاری از مقالات مشاهده کرد [۱۵] و [۱۶] و [۱۷] و [۱۸]. به هر حال، فهمیدن رفتار مکانیکی ورق FGM در تشخیص و تعیین ایمنی ساختارهای ورق خیلی مهم شده است. یک حل دقیق برای تغییر شکل سه بعدی از یک ورق FGM مستطیلی ضخیم با تکیه گاه مفصلی که در معرض بارهای حرارتی و مکانیکی در صفحات بالائی و پائینی قرار گرفته، بدست آمده است[۱۷]. حل های دقیق برای بارهای حرارتی و مکانیکی جهت ارزیابی دقت و صحت تئوری کلاسیک ورق، تئوری مرتبهٔ اول تغییر شکل برشی و تئوری مرتبهٔ سوم تغییر شکل برشی استفاده شده است[۱۹]. تئوری کارمن را برای تغییر شکل بزرگ جهت بدست آوردن حل تحلیلی برای ورقها و پوسته تحت بارهای مکانیکی عرضی و میدان حرارتی بکار برده اند[۲۰]. کنترل ارتعاش صفحات FGM با اختلاط سنسورهای پیزوالکتریک و محرکها را بوسیلهٔ فرمول نویسی المان محدود بر مبنای تئوری کلاسیک ورق‌های لمینیت مطالعه کرده است[۲۱،۲۲]. رفتار مکانیکی ورق FGM مستطیلی با یک تکیه گاه مفصلی در حالیکه کسر حجمی مواد متشکله از توابع S مانند پیروی می کند تحلیل کردند. با هم گذاری چندین صورت مجذوری شعاعی، اساس استفادهٔ [۲۳] جهت آنالیز استاتیکی تغییر شکل FGM ها مدل شده با تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ سوم و روش

1 - Functionaly Graded Material

mesh less یا بدون المان بوده است. شاخهٔ الاستیک کمانش صفحات FGM تحت بار فشاری صفحه ای توسط [۲۴] بر مبنای ترکیب میکرومکانیکال مطالعه شده است. [۲۵] خمش متقارن محوری و حل کمانش برای ورق دایره ای FGM بر مبنای تئوری مرتبهٔ سوم ورق و تئوری کلاسیک ورق مطالعه کردند. به علاوه، پایداری دینامیکی پوسته های FGM مخروطی که در معرض فشار ضربه ای متناوب قرار گرفته توسط [۲۶] با استفاده از روش گالرکین مطالعه شده است.

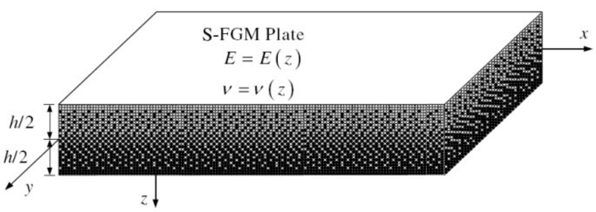
همان طور که ذکر شد، تنش تکین در سطوح مشترک ساختارهای لمینیت به سبب عدم مطابقت ماده رخ می دهد. بنابراین مسائل لایه های FGM به عنوان پوشش در ساختارهای غشاء زیر لایه ای بکار برده شده یا به عنوان زیر پوشش در کامپوزیت های چند لایه جهت حذف تنشهای تکین خیلی مهم شده است. برای مسألهٔ مرتبط با ساختارهای غشاء زیر لایه ای، بسیاری از محققان غشاء زیر لایه ای متوسط دارای ترک را تحقیق کرده اند. [۲۷] و [۲۸] و [۲۹] و [۳۰،۳۱] و [۳۲] یا فرض شده غشاء نازک به یک مادهٔ زیر لایهٔ نیمه نامحدود ناهمسان محدود شده است، [۳۴،۳۳، ۳۲،۳۰]. به هر حال، به نظر می رسد که مسائل لایهٔ FGM در ورقهای غشاء زیر لایه ای به عنوان یک پوشش یا در ساختارهای چند لایه ای به عنوان زیر پوشش استفاده شده است که مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. از اینرو، در این مطالعه، توجه بر سه مسأله جلب شده است: ورق FGM-coated و ورق FGM-undercoated همراه با شرایط مرزی کلاسیک و مقایسهٔ آنها با ورق FGM در شرایط مشابه.

تابع قانون توانی [۱۱] یا تابع نمائی ([۹،۸،۴،۱]) در بسیاری از موارد جهت توصیف نسبت حجمی مواد متشکلهٔ FGM ها استفاده شده است. به هر حال، هنگامیکه قانون توانی یا تابع نمائی به عنوان تابع گرادیان ماده در یک کامپوزیت لمینیت FGM بکار برده شده، مخصوصاً برای یک لایهٔ FGM اضافه شده به کامپوزیت بی متریال به عنوان یک زیر پوشش، تمرکز تنش در یکی از سطوح مشترک پدیدار می شود، جائیکه ماده پیوسته بوده اما سریعاً تغییر می کند. [۴] یک تابع S مانند را برای نسبت حجمی خواص مادهٔ FGM پیشنهاد کرد که مرکب از دو تابع قانون توانی از نسبت حجمی جهت توصیف FGM هست و بدین گونه اشکالات تابع قانون توانی و تابع نمائی را برطرف می سازد. این FGM ها برای سادگی S-FGM ها نامیده شده اند. [۳۰،۴] نشان دادند هنگامی که S-FGM بر کامپوزیت به عنوان پوشش زیر لایه بکار می رود، تنش در هر یک از سطوح مشترک کامپوزیت FGM هموار است و تنش تکین بر سطوح مشترک حذف می شود. با توجه به اینکه در هر مسأله ارتعاشی قبل از هر چیز بدست آوردن فرکانسهای طبیعی سازه و شکل حالتهای ارتعاشی در این فرکانسها در اولویت قرار دارد، هدف اصلی در این مقاله نیز بدست آوردن فرکانسهای طبیعی ورقهای FGM ، یک ورق FGM که بر روی یک ورق هموژن قرار گرفته و یک ورق FGM که بین دو ورق هموژن قرار گرفته برای حالتهای مختلف پارامتر ماده (p) و همچنین شکل حالتهای ارتعاشی متناظر با هر فرکانس و ارائه جداول این فرکانسها برای مستطیل با نسبت های مختلف طول به عرض متفاوت $\left(\frac{a}{b}\right)$ و رسم شکل مدهای ارتعاشی متناظر با هر فرکانس می باشد که یکی از کاربردهای این ورق ها در صنایع فضایی می باشد.

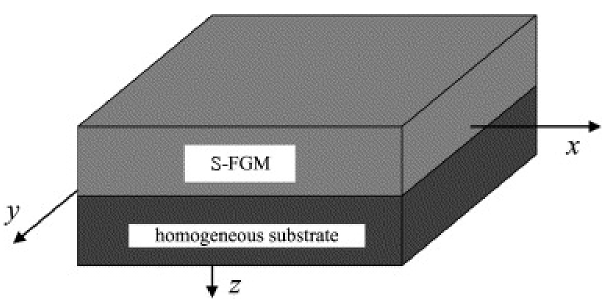
## ۲- شرح مسأله و معادلات حاکم

### ۲-۱- شرح مسأله

در این مسأله ارتعاشات آزاد سه ورق بررسی شده است: ۱)یک ورق FGM ، شکل (۱). ۲)یک ورق هموژن که با FGM پوشانده شده که S-FGM-coated نامیده شده، (شکل۲ ).




شکل(۱): هندسهٔ ورق S-FGM

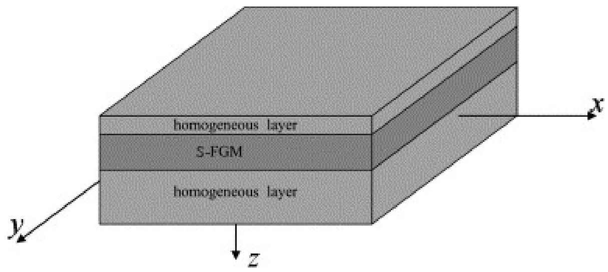



شکل (۲): هندسهٔ ورق S-FGM-coated

و ۳) بررسی یک ورق FGM که بین دو ورق هموژن قرار گرفته که FGM-undercoated نامیده شده، شکل (۳)، می باشد. ضریب پوآسون ورقها ثابت ولی مدول یانگ در راستای ضخامت متغیر فرض شده اند. تغییرات مدول یانگ ورق تابعی به صورت تابع $S^2$ مانند بیان می شود، شکل (۱)، که ترکیب دو تابع قانون توانی[۳] می باشد.

2 -Sigmoid function
3- Power-law function

بنابراین این ورقها برای سادگی S-FGM و S-FGM-coated و S-FGM-undercoated نامیده شده است.




شکل(۳): هندسهٔ ورق S-FGM-undercoated

مدول یانگ بدین صورت تعریف شده است:

$$E(z)=E_2 \quad -\frac{h_1+h_2+h_3}{2}\le z\le\frac{h_1+h_2+h_3}{2} \quad \text{For}$$

$$E(z)=E_2+(E_1-E_2)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{z-(h_3-h_1-h_2)/2}{h_2/2}\right)^p\right) \qquad (۱)$$

$$\text{for} \quad \frac{h_3-h_1-h_2}{2}\le z\le\frac{h_3-h_1}{2}$$

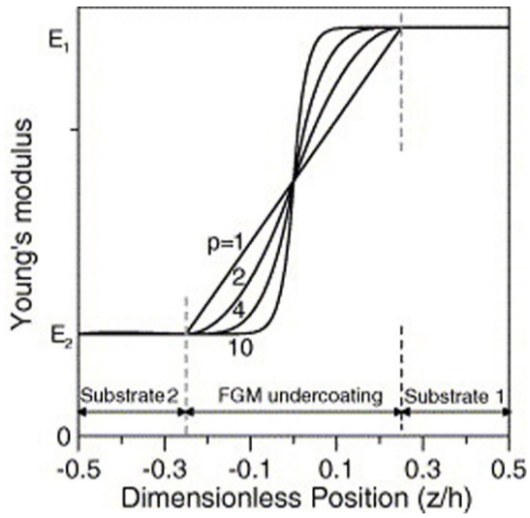
$$E(z)=E_2+(E_1-E_2)\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{-z+(h_2+h_3-h_1)/2}{h_2/2}\right)^p\right) \qquad (۲)$$

$$\text{for} \quad \frac{h_3-h_1}{2}\le z\le\frac{h_2+h_3-h_1}{2}$$

$$E(z)=E_1$$

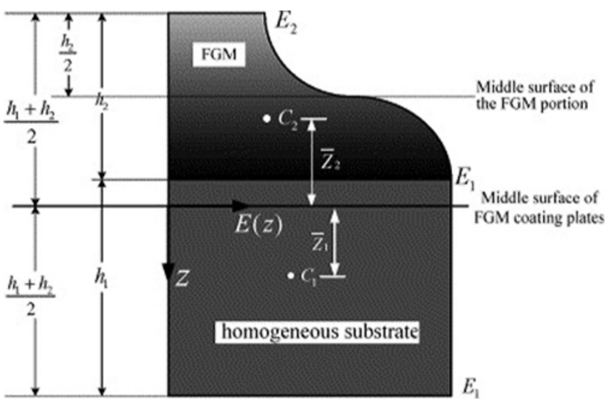
$$\text{for} \quad \frac{h_2+h_3-h_1}{2}\le z\le\frac{h_1+h_2+h_3}{2}$$

که در ورق S-FGM-coated، $h_3=0$ و در ورق S-FGM، $h_1=h_3=0$ می باشد. در شکل(۴) ، توزیع مدول یانگ ورق S-FGM-undercoated برای پارامترهای مختلف ماده یا پارامتر p، (توان p در رابطهٔ مدول یانگ) ارایه گردیده است:

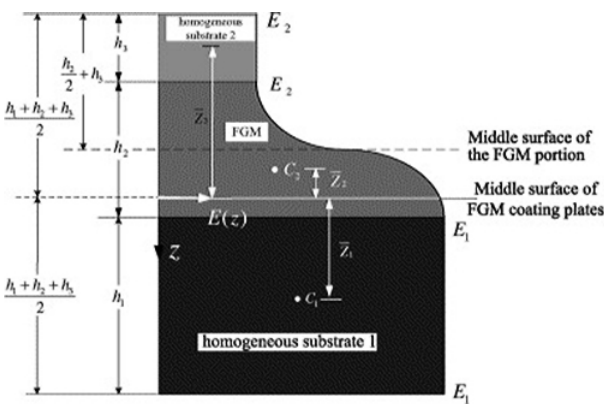



شکل(۴): تغییر مدول یانگ ورق S-FGM-undercoated برای p=1,2,4,10

اشکال (۵) و (۶) به ترتیب نمودار توزیع مدول یانگ ورق S-FGM-coated و S-FGM-undercoated می باشد.




شکل(۵): توزیع مدول یانگ ورق S-FGM-coated در جهت ضخامت




شکل(۶): توزیع مدول یانگ ورق S-FGM-undercoated در جهت ضخامت

## ۲-۲- معادلات حاکم

برای مساله شرح داده شده فرض می شود که ضخامت ورقها متوسط می باشند که ضخامت کل $h$ در دامنه $\frac{1}{20}-\frac{1}{100}$ می باشد. تغییر شکلها و تنشهای ورق های ذکر شده بر مبنای فرضیات ذیل هستند:

۱- المانهای خط عمود بر سطح میانی ورق قبل از تغییر شکل به طور نرمال و بعد از تغییر شکل بدون کشیده شدن باقی می مانند.

۲- خیزهای ورق S-FGM، S-FGM-coated و S-FGM-undercoated در مقایسه با کل ضخامتشان کوچک هستند، به این دلیل روابط کرنش – تغییر مکان صحیح هستند.

۳- از تنش نرمال در جهت ضخامت می توان صرف نظر نمود، زیرا نسبت ضخامت به ابعاد در بازهٔ $\frac{1}{20}-\frac{1}{100}$ از اندازهٔ آنها فرض شده، کوچک می باشد.

باید توجه شود که حذف تغییر شکل برشی هنگامی که ورق ضخیم بطور متوسط با اندازهٔ بزرگتر از ۰/۱ اندازه ورق بکار گرفته شده باشد می تواند به خطاهای مهمی منجر شود. به هر حال، [۳۳] نشان دادند که برای یک ورق با ضخامت کمتر از ۰/۱ اندازه اش (نسبت ضخامت به بعد بزرگتر ورق) از تئوری کلاسیک صفحات انتظار کسب نتایج خوبی می رود. در این تحقیق، نسبت ضخامت به بزرگترین بعد ورق های S-FGM، S-FGM-coated و S-FGM-undercoated در محدودهٔ $\frac{1}{20}$ تا $\frac{1}{100}$ هستند، بنابراین تغییر شکلهای برشی عرضی قابل صرف نظر کردن هستند. بر پایهٔ فرضیات فوق، روابط تنش- کرنش ورقهای S-FGM، S-FGM-coated یا S-FGM-undercoated برای شرایط تنش صفحه ای عبارتند از:

$$\sigma_x=\frac{E(z)}{1-\upsilon(z)^2}\left\{\varepsilon_{x_0}+\upsilon(z)\varepsilon_{y_0}-z\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\upsilon(z)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right\}, \quad (3a)$$

$$\sigma_y=\frac{E(z)}{1-\upsilon(z)^2}\left\{\varepsilon_{y_0}+\upsilon(z)\varepsilon_{x_0}-z\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\upsilon(z)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\right\}, \quad (3b)$$

$$\tau_{xy}=\frac{E(z)}{1-\upsilon(z)^2}\left(\frac{1-\upsilon(z)}{2}\right)\left[\gamma_{xy_0}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right], \quad (3c)$$

که $\varepsilon_{x_0}=\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x}, \varepsilon_{y_0}=\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y}, \gamma_{xy0}=\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}$ کرنشها در صفحهٔ میانی هستند. کمیت $w$ تغییر مکان در جهت z می باشد. منتجه های تنش بر واحد طول صفحهٔ میانی بوسیلهٔ انتگرال گیری تنش ها در ضخامت تعیین شده اند. بنابراین نیروهای محوری در صفحه $N_x, N_y, N_{xy}$ و ممانهای خمشی بر واحد طول صفحهٔ میانی، $M_x, M_y, M_{xy}$ به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\begin{aligned}&N_x=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x dz, \quad N_y=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_y dz,\\ &N_{xy}=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy} dz, \quad M_x=\int_{-h/2}^{h/2}z\,\sigma_x dz,\\ &M_y=\int_{-h/2}^{h/2}z\,\sigma_y dz, \quad M_{xy}=\int_{-h/2}^{h/2}z\,\tau_{xy} dz\end{aligned} \quad (۴)$$

سپس، با جانشانی معادلات (۳) در معادلات فوق، نیروهای محوری در صفحه و ممانهای خمشی در ترمهائی از کرنشهای صفحهٔ میانی و خیز به صورت ذیل بیان شده اند:

$$\begin{Bmatrix}N_x\\N_y\\N_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&0\\A_{12}&A_{11}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x_0}\\\varepsilon_{y_0}\\\gamma_{xy_0}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&0\\B_{12}&B_{11}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix} \quad (۵)$$

$$\begin{Bmatrix}M_x\\M_y\\M_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&0\\B_{12}&B_{11}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x_0}\\\varepsilon_{y_0}\\\gamma_{xy_0}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&0\\C_{12}&C_{11}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix} \quad (۶)$$

که ضرایب $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$ انتگرال خواص مادی ورقهای S-FGM، S-FGM-coated و S-FGM-undercoated هستند و آنها بدین گونه هستند:

$$(A_{11},B_{11},C_{11})=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{1}{1-\upsilon(z)^2}\times(E(z),zE(z),z^2E(z))dz, \quad (۷a)$$

$$\left(A_{12},B_{12},C_{12}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\upsilon}{1-\upsilon(z)^{2}}\times\left(E(z),zE(z),z^{2}E(z)\right)dz, \qquad (۷b)$$

$$\left(A_{66},B_{66},C_{66}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{1}{2\left(1+\upsilon(z)\right)}\times\left(E(z),zE(z),z^{2}E(z)\right)dz, \qquad (۷c)$$

بر اساس معادلهٔ ناویر در غیاب نیروهای جسمی برای ورقهای ذکر شده داریم:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=\rho(z)\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

که پس از بسط معادلهٔ فوق و ساده .سازی نتیجه می شود:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}+q_z(x,y)=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۸)$$

که $I_0=\int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)dz$ و با جانشانی معادلهٔ (۶) در معادلهٔ فوق خواهیم داشت:

$$B_{11}\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{x0}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{y0}}{\partial y^2}\right)+B_{12}\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{y0}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{x0}}{\partial y^2}\right)+$$
$$2B_{66}\frac{\partial^2\gamma_{xy0}}{\partial x\partial y}-C_{11}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)- \qquad (۹)$$
$$\left(2C_{12}+4C_{66}\right)+q_z=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

تابع تنش $\varphi$ بدین صورت تعرف شده است:

$$N_x=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},\quad N_y=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\quad N_{xy}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \qquad (۱۰)$$

با بکار بردن معادلهٔ(۵) و معادلهٔ(۱۰) کرنشهای صفحهٔ میانی به صورت ترمهائی از تابع تنش $\phi(x,y)$ و خیز $w$ بدست می آیند که با جانشانی کرنشهای صفحهٔ میانی در معادلهٔ(۹)، معادلهٔ حرکت بصورت ترمهایی از تابع تنش $\varphi$ و خیز $w$ بدست می آید:

$$Q_{12}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+2\left(Q_{11}-Q_{66}\right)\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}+Q_{12}\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}+$$
$$S_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(S_{12}+2S_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} \qquad (۱۱)$$
$$+S_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=q_z(x,y)-I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

که:

$$Q_{11}=\frac{\left(A_{12}B_{12}-A_{11}B_{11}\right)}{\Delta},\quad Q_{12}=\frac{\left(A_{12}B_{11}-A_{11}B_{12}\right)}{\Delta}$$
$$Q_{66}=-\frac{B_{66}}{A_{66}},\quad \Delta=A_{11}^2-A_{12}^2$$
$$S_{11}=B_{11}Q_{11}+B_{12}Q_{12}+C_{11} \qquad (۱۲)$$
$$S_{12}=B_{11}Q_{12}+B_{12}Q_{11}+C_{12}$$
$$S_{66}=C_{66}+B_{66}Q_{66}$$

برای ماده ای که فرض شده ضریب پوآسون ثابت و مدول یانگ در جهت ضخامت متغیر باشد، ضرایب فوق به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$\left(A_{12},B_{12},C_{12}\right)=\upsilon\left(A_{11},B_{11},C_{11}\right);$$
$$\left(A_{66},B_{66},C_{66}\right)=\frac{1-\upsilon}{2}\left(A_{11},B_{11},C_{11}\right);$$
$$\left(Q_{12},S_{12}\right)=\upsilon\left(0,S_{11}\right); \qquad (۱۳)$$
$$\left(Q_{66},S_{66}\right)=\left(Q_{11},\frac{1-\upsilon}{2}S_{11}\right);$$
$$Q_{11}=-\frac{B_{11}}{A_{11}},\qquad S_{11}=B_{11}Q_{11}+C_{11}$$

در نهایت با ساده سازی، معادله ارتعاش آزاد ورقهای S-FGM، S-FGM-coated و S-FGM-undercaoted بدین صورت ساده می شود:

$$S_{11}\nabla^4 w=-I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۱۴)$$

## ۳- حل کلی

### ۳-۱- ارتعاش آزاد برای شرایط مرزی چهار طرف تکیه گاه ساده

شرایط مرزی برای تکیه گاه های ساده، گیر دار و آزاد مطابق جدول (۱) می باشند.

جدول(۱): شرایط مرزی برای تکیه گاه های ساده، گیر دار و آزاد

| Boundary conditions | |
|---|---|
| Simply support | $w=0 \quad M=0$ |
| Clamp | $w=0 \quad w'=0$ |
| Free | $M=0 \quad V=0$ |

برای ارتعاش طبیعی، حل به صورت ذیل فرض شده است:

$$w_0(x,y,t)=w(x,y)e^{i\omega t}$$

با جانشانی رابطهٔ فوق در شرط مرزی تکیه گاه ساده نتیجه می شود:

$$S_{11}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)-\omega^2\left(I_0 w\right)=0 \qquad (۱۵)$$

با استفاده از فرآیند حل ناویر، حل را به صورت زیر فرض می کنیم که شرایط مرزی را برای حالتی که چهار طرف ورقها تکیه گاه ساده می باشد را ارضا می کند:

$$w(x,y)=W_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{b} \qquad (۱۶)$$

و حل آن برای $\omega$، رابطهٔ فرکانس طبیعی ورقها بدین بدست می آید:

$$\omega_{mn}=\sqrt{\frac{S_{11}}{I_0}}\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{a^2}\right) \qquad m,n=1,2,3,.... \qquad (۱۷)$$

## ۳-۲- ارتعاش طبیعی ورق با دولبهٔ تکیه گاه ساده موازی:

معادلهٔ (۱۵) برای ورق‌های ذکر شده که دارای دو لبهٔ تکیه گاه سادهٔ روبروی یکدیگر هستند و دو لبهٔ دیگر هر نوع شرط مرزی گیردار، تکیه گاه ساده و آزاد می باشند، را می توان از روش لوی حل نمود. جواب به صورت ذیل فرض شده است:

$$w(x,y)=W_m(y)\sin\alpha_m x, \qquad \alpha_m=\frac{m\pi}{a} \qquad (۱۸)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۱۸) در شرایط مرزی تکیه گاه ساده نتیجه می شود:

$$\left(S_{11}\alpha_m^4-\omega^2 I_0\right)W-2S_{11}\alpha_m^2\frac{d^2W}{dy^2}+S_{11}\frac{d^4W}{dy^4}=0 \qquad (۱۹)$$

معادلهٔ فوق می تواند برای فرکانسهای طبیعی و شکل مدها بصورت تحلیلی حل شود. بنابراین حل کلی برای $\omega^2 \geq \frac{\alpha_m^4 S_{11}}{I_0}$ بدین صورت خواهد بود:

$$w(x,y)=\left(A\cosh\lambda_1 y+B\sinh\lambda_1 y+C\cos\lambda_2 y+D\sin\lambda_2 y\right)\sin\alpha_m x, \qquad \alpha_m=\frac{m\pi}{a} \qquad (۲۰)$$

که در آن:

$$\lambda_1^2,\lambda_2^2=\frac{\omega\sqrt{S_{11}I_0}\pm\alpha_m^2 S_{11}}{S_{11}} \qquad (۲۱)$$

### ۳-۲-۱- ارتعاش آزاد ورق با شرایط مرزی SFSS:

شرط مرزی SFSS یعنی کاراکتر اول مربوط به لبهٔ $x=0$ می باشد (در اینجا تکیه گاه ساده) و بقیه کاراکترها به صورت ساعتگرد تغییر می کند. با اعمال شرایط مرزی در لبهٔ $y=0$ و $y=b$ در معادلهٔ (۲۰) و پس از ساده سازی و صفرقرار دادن دترمینان ضرایب، معادلهٔ مشخصه بدست خواهد آمد:

$$\Omega_1\lambda_2\overline{\Omega}_2\sinh\lambda_1 b\cos\lambda_2 b-\Omega_2\lambda_1\overline{\Omega}_1\cosh\lambda_1 b\sin\lambda_2 b=0 \qquad (۲۱)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\Omega_1&=\lambda_1^2-\upsilon\alpha_m^2, & \Omega_2&=\lambda_2^2+\upsilon\alpha_m^2\\ \overline{\Omega}_1&=\lambda_1^2-(2-\upsilon)\alpha_m^2, & \overline{\Omega}_2&=\lambda_2^2+(2-\upsilon)\alpha_m^2\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

### ۳-۲-۲- ارتعاش آزاد ورق با شرایط مرزی SFSC:

با اعمال شرایط مرزی در لبهٔ $y=0$ و $y=b$ معادلهٔ مشخصه بدین صورت بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&2\lambda_1\lambda_2\Omega_1\Omega_2+\lambda_1\lambda_2\left(\Omega_1^2+\Omega_2^2\right)\cosh\lambda_1 b\cos\lambda_2 b\\&-\left(\lambda_1^2\Omega_2^2-\lambda_2^2\Omega_1^2\right)\sinh\lambda_1 b\sin\lambda_2 b=0\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

### ۳-۲-۳- ارتعاش آزاد ورق با شرایط مرزی SCSC:

با اعمال شرایط مرزی در لبهٔ $y=0$ و $y=b$ معادلهٔ مشخصه بدین صورت بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&2\lambda_1\lambda_2-\lambda_2^2\sinh\lambda_1 b\sin\lambda_2 b-2\lambda_1\lambda_2\\&\times\cosh\lambda_1 b\cos\lambda_2 b+\lambda_1^2\sinh\lambda_1 b\sin\lambda_2 b=0\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

### ۳-۲-۴- ارتعاش آزاد ورق با شرایط مرزی SSSC:

با اعمال شرایط مرزی در لبهٔ $y=0$ و $y=b$ معادلهٔ مشخصه بدین صورت بدست خواهد آمد:

$$\lambda_1\cosh\lambda_1 b\sin\lambda_2 b-\lambda_2\sinh\lambda_1 b\cos\lambda_2 b=0 \qquad (۲۶)$$

### ۳-۲-۵- ارتعاش آزاد ورق با شرایط مرزی SFSF:

با اعمال شرایط مرزی در لبهٔ $y=0$ و $y=b$ معادلهٔ مشخصه بدین صورت بدست خواهد آمد:

$$2\left(1-\cosh\lambda_1 b\cos\lambda_2 b\right)+\left(\beta_0-\frac{1}{\beta_0}\right)\sinh\lambda_1 b\sin\lambda_2 b=0 \qquad (۲۷)$$

که در آن:

$$\beta_0=\frac{\lambda_1\Omega_2\overline{\Omega}_1}{\lambda_2\Omega_1\overline{\Omega}_2}$$

که در آن مقادیر $\Omega_1,\Omega_2,\overline{\Omega}_1,\overline{\Omega}_2$ در رابطهٔ (۲۳) داده شده است.

## ۴- ضرایب $A_{11}, B_{11}, C_{11}$:

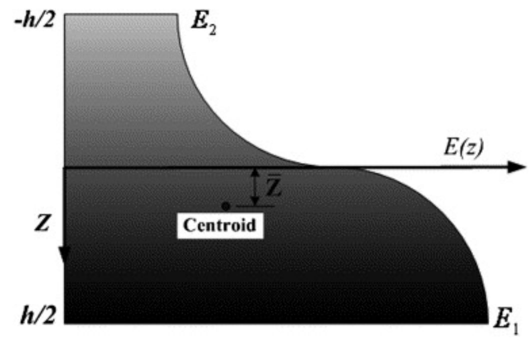
برای S-FGM، S-FGM-coated و S-FGM-undercoated با ضریب پوآسون ثابت، پارامترهای $A_{11},B_{11},C_{11}$ در معادله (۷a) بدین صورت تعریف شده اند:

$$\left(A_{11},B_{11},C_{11}\right)=\frac{1}{1-\upsilon^2}\int_{-h/2}^{h/2}\left(E(z),zE(z),z^2E(z)\right)dz$$

که در آن $h$ ضخامت کل ورق می باشد، که برای ورقهای S-FGM-coated $h=h_1+h_2$ و برای ورقهای S-FGM-undercoated، $h=h_1+h_2+h_3$ می باشد. انتگرالها در معادلهٔ(۷) که مقادیر $A_{11},B_{11},C_{11}$ را می دهد، برای ورق S-FGM با انتگرال گیری ساده بدست می آیند ولی برای هر یک از ورقهای S-FGM-coated و S-FGM-undercoated پیچیده می شود.

### ۴-۱- ضرایب $A_{11},B_{11},C_{11}$ برای ورق S-FGM:

در ابتدا، فقط یک ورق FGM به تنهایی بررسی می گردد. توزیع مدول یانگ یک ورق FGM در شکل(۵) نشان داده شده است.




شکل(۵): توزیع مدول یانگ ورق S-FGM در جهت ضخامت

ضرایب $A_{11},B_{11},C_{11}$ برای ورقهای FGM که تغییرات خواص ماده از توابع S مانند پیروی می کند، همان طور که قبلاً گفته شد، ورق S-FGM نامیده شده، می تواند با انتگرال گیری ساده محاسبه گردند و آنها هستند:

$$A_{11}=\frac{h}{1-\upsilon^2}\left(\frac{E_1+E_2}{2}\right) \qquad (۲۸a)$$

$$B_{11}=\frac{h^2}{8\left(1-\upsilon^2\right)}\left(E_1-E_2\right)\frac{p^2+3p}{(p+1)(p+2)} \qquad (۲۸b)$$

$$C_{11}=\frac{h^3}{12\left(1-\upsilon^2\right)}\left(\frac{E_1+E_2}{2}\right) \qquad (۲۸c)$$

### ۴-۲- ضرایب $A_{11},B_{11},C_{11}$ برای ورق S-FGM-undercoated:

عبارت $\left(1-\upsilon^2\right)A_{11}$ مساوی مساحت زیر منحنی $E(z)$ در محدودهٔ $z=-\frac{h}{2}$ و $z=\frac{h}{2}$ می باشد. پارامترهای $C_{11},B_{11}$ به اولین و دومین ممان سطح زیر منحنی $E(z)$ از $z=-\frac{h}{2}$ تا $z=\frac{h}{2}$ نسبت به محور $z=0$ وابسته اند. بنابراین، مفهوم ممان سطح و تئوری محور موازی جهت محاسبهٔ فرمولهای $A_{11},B_{11},C_{11}$ برای هر دو ورقهای S-FGM-coated و S-FGM-undercoated معرفی می گردد. برای ورق S-FGM-undercoated ضخامتها در لایه بالائی $h_3$، بخش FGM برابر $h_2$ و لایه پائینی $h_1$ هستند، (مطابق تصویر نشان داده شده در شکل(۶)).

ضرایب $A_{11},B_{11},C_{11}$ برای ورقهای S-FGM-undercoated به صورت $A^u_{11},B^u_{11},C^u_{11}$ تغییر نام داده شده اند که بالانویس "u" برای نمایش دادن ورقهای S-FGM-undercoated می باشد. کمیتهای $A^u_{11},B^u_{11},C^u_{11}$ بدین صورت تعریف شده اند:

$$A^u_{11}=\int_{-\frac{h_1+h_2+h_3}{2}}^{\frac{h_1+h_2+h_3}{2}}\frac{E(z)}{\left(1-\upsilon^2\right)}dz \qquad (۲۹a)$$

$$B^u_{11}=\int_{-\frac{h_1+h_2+h_3}{2}}^{\frac{h_1+h_2+h_3}{2}}\frac{E(z)}{\left(1-\upsilon^2\right)}zdz \qquad (۲۹b)$$

$$C^u_{11}=\int_{-\frac{h_1+h_2+h_3}{2}}^{\frac{h_1+h_2+h_3}{2}}\frac{E(z)}{\left(1-\upsilon^2\right)}z^2dz \qquad (۲۹c)$$

$A^u_{11},B^u_{11},C^u_{11}$ می توانند به راحتی با مفهوم سطح، ممان اول سطح و ممان دوم سطح تعیین گردند. مجدداً بیان می گردد که ترم $\left(1-\upsilon^2\right)A^u_{11}$ مساوی مساحت تحت منحنی $E(z)$ از $z=-\frac{(h_1+h_2+h_3)}{2}$ تا $z=\frac{(h_1+h_2+h_3)}{2}$ می باشد. بنابراین:

$$A^u_{11}=A_{11}+\frac{1}{1-\upsilon^2}\left(E_2h_3+E_1h_1\right) \qquad (۳۰)$$

که در آن کمیت $A_{11}$ در معادلهٔ (۳۰)، در معادلهٔ (۲۸a) داده شده است. ترم $\left(1-\upsilon^2\right)B^u_{11}$ مساوی ممان اول سطح زیر منحنی $E(z)$ نسبت به محور $z=0$ هست.

$$\left(1-\upsilon^2\right)B^u_{11}=\sum\left(Area\right)_i\times\bar{z}_i$$

که $\bar{z}$ بیانگر فاصله از مرکز ثقل تا محور $z=0$ می باشد. مساحت در بخش لایهٔ پائینی $E_1h_1$ و $\bar{z}$ برابر $\frac{h_2+h_3}{2}$ می باشند. همچنین مساحت در بخش لایهٔ بالائی $E_2h_3$ و $\bar{z}$ برابر $-\frac{h_1+h_2}{2}$ می باشند. به طور مشابه مساحت در بخش FGM، $\left(1-\upsilon^2\right)A_{11}$ و $\bar{z}$ برابر $\frac{B_{11}}{A_{11}}-\frac{h_1-h_3}{2}$ هستند. در نتیجه، ضریب $B^u_{11}$ برای ورقهای S-FGM-coated بدین صورت بدست می آید:

$$B_{11}^u = \frac{1}{(1-\upsilon^2)}\left[E_1h_1\left(\frac{h_2+h_3}{2}\right) - E_2h_3\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)\right] + A_{11}\left(\frac{B_{11}}{A_{11}} - \frac{h_1-h_3}{2}\right) \qquad (۳۱)$$

ترم $(1-\upsilon^2)C_{11}^u$ مساوی ممان دوم سطح زیر منحنی $E(z)$ نسبت به محور $z=0$ می باشد. مطابق با تئوری محور موازی، مقدار $(1-\upsilon^2)C_{11}^u$ مساوی ممان دوم سطح زیر منحنی $E(z)$ نسبت به محور مرکز ثقلش به علاوه $Ad^2$ می باشد، که $A$ سطح مورد نظر تا محور $z=0$ می باشد. بنابراین $(1-\upsilon^2)C_{11}^u$ در بخش لایهٔ پائینی برابر $\frac{E_1h_1^3}{12}+E_1h_1\left(\frac{h_2+h_3}{2}\right)^2$ می باشد؛ همچنین در بخش لایهٔ پائینی $\frac{E_1h_3^3}{12}+E_2h_3\left(-\frac{h_1+h_2}{2}\right)^2$ می باشد و آن در بخش FGM ورق S-FGM-undercoated به صورت $(1-\upsilon^2)\left[C_{11}+A_{11}\left(\frac{B_{11}}{A_{11}}\right)^2+A_{11}\left(\frac{B_{11}}{A_{11}}-\frac{h_1-h_3}{2}\right)^2\right]$ می باشد.

پس از ساده سازی، ضریب $C_{11}^u$ برای ورقهای S-FGM-undercoated بدین صورت بدست می آید:

$$C_{11}^u = \frac{1}{(1-\upsilon^2)}\left[\frac{1}{12}E_1h_1\left(h_1^2+3h_2^2+6h_2h_3+3h_3^2\right) + \frac{1}{12}E_2h_3\left(3h_1^2+6h_1h_3+3h_2^2+h_3^2\right)\right] + \left(C_{11}-B_{11}(h_1-h_3)+\frac{A_{11}(h_1-h_3)^2}{4}\right) \qquad (۳۲)$$

### ۴-۳- ضرایب $A_{11},B_{11},C_{11}$ برای ورق S-FGM-coated:

برای ورق S-FGM-coated ضخامتها در بخش FGM و زیر لایه به ترتیب $h_1$ و $h_2$ هستند، (مطابق تصویر نشان داده شده در شکل(۵)). ضرایب $A_{11},B_{11},C_{11}$ برای ورقهای S-FGM-coated به صورت $A_{11}^c,B_{11}^c,C_{11}^c$ تغییر نام داده شده اند که بالانویس "c" برای نمایش دادن ورقهای S-FGM-coated می باشد. کمیتهای $A_{11}^c,B_{11}^c,C_{11}^c$ بدین صورت تعریف شده اند:

$$A_{11}^c = \int_{-\frac{h_1+h_2}{2}}^{\frac{h_1+h_2}{2}} \frac{E(z)}{(1-\upsilon^2)}dz \qquad (۳۳a)$$

$$B_{11}^c = \int_{-\frac{h_1+h_2}{2}}^{\frac{h_1+h_2}{2}} \frac{E(z)}{(1-\upsilon^2)}z\,dz \qquad (۳۳b)$$

$$C_{11}^c = \int_{-\frac{h_1+h_2}{2}}^{\frac{h_1+h_2}{2}} \frac{E(z)}{(1-\upsilon^2)}z^2dz \qquad (۳۳c)$$

با روش مشابه ورقهای S-FGM-undercoated، ضرایب $A_{11}^c,B_{11}^c,C_{11}^c$ برای ورقهای S-FGM-coated بر مبنای مفهوم ممان سطح و تئوری محور موازی می توانند بدست بیایند. همچنین می توان مقدار $h_3$ را در ضرایب $A_{11}^u,B_{11}^u,C_{11}^u$ بدست آمده برای ورقهای S-FGM-undercoated برابر صفر قرار داد، در نتیجه ضرایب $A_{11}^c,B_{11}^c,C_{11}^c$ خواهند بود:

$$A_{11}^c = A_{11} + \frac{E_1h_1}{1-\upsilon^2} \qquad (۳۴a)$$

$$B_{11}^c = \frac{E_1h_1h_2}{(1-\upsilon^2)} + B_{11} - A_{11}\frac{h_1}{2} \qquad (۳۴b)$$

$$C_{11}^c = \frac{1}{12(1-\upsilon^2)}\left[E_1h_1\left(h_1^2+3h_2^2\right)\right] + C_{11} - B_{11}h_1 + \frac{A_{11}h_1^2}{4} \qquad (۳۴c)$$

## ۵- نتایج عددی

در این بخش، فرکانس های طبیعی برای ورقهای S-FGM، S-FGM-coated و S-FGM-undercoated را برای ۶ حالت شرایط مرزی کلاسیک و برای دو حالت مختلف ۱۰وp=۱ محاسبه شده است. همچنین این ورقها با شرایط مرزی و حالتهای ذکر شده با نرم افزار المان محدود ABAQUS نیز مدل شده و فرکانسهای طبیعی آنها محاسبه شده است و با حل تحلیلی مقایسه گردیده است. سپس فرکانس طبیعی اول را برای نسبتهای مختلف طول به عرض ($\frac{a}{b}$) برای هر سه ورقهای فوق الذکر استخراج شده است و در نمودارهای (۸) و (۹) ارائه گردیده است. شکل مُدهای ارتعاشی نیز ترسیم شده اند. مشخصات مادی و هندسی ورقهای مورد مطالعه در جدول(۲) ارائه گردیده است.

جدول(۲): مشخصات مادی و هندسی ورقهای مورد مطالعه

| Materials | Young Modulus | Density |
|---|---|---|
| Zirconia($ZRO_2$) | $E_1 = 2\times10^7 \frac{kg}{cm^2}$ | $\rho_1 = 0.0057 \frac{kg}{cm^3}$ |
| Aluminum,(AL) | $E_2 = 7\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$ | $\rho_2 = 0.0078 \frac{kg}{cm^3}$ |

$\upsilon = 0.3 \qquad a=b=100\ cm \qquad \frac{a}{b} = 0.5, 0.7, 1, 1.5, 2$

ضخامت برای ورق S-FGM برابر $2\ cm$، برای ورق S-FGM-coated، ضخامت برای بخش S-FGM، $1\ cm$ و برای لایهٔ هموژن نیز $1\ cm$ می باشد. برای ورق S-FGM-undercoated ضخامت بخش S-FGM برابر $1\ cm$ و برای لایه های هموژن بالائی و پائینی به ترتیب $.25\ cm$ و $.75\ cm$. در نظر گرفته شده اند. بنابراین در همهٔ ورقها نسبت $\frac{h}{a}$ برابر $\frac{1}{50}$ می باشد. مقادیر $S_{11}$ و

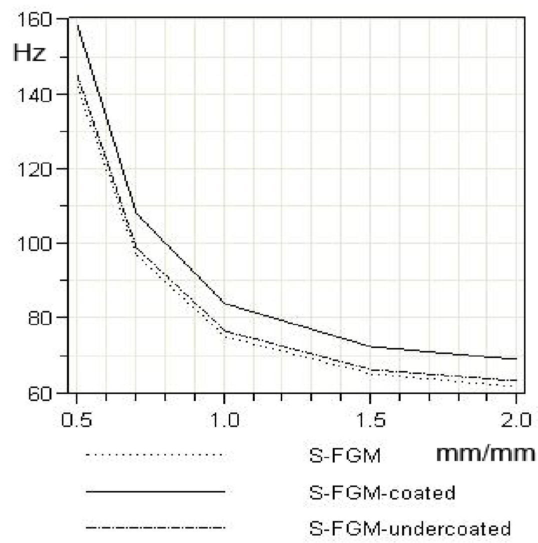
$I_0$ نیز از روابط بخش ۴ قابل محاسبه می باشند. با بکار گیری معادله مشخصهٔ(۲۹) برای شرط مرزی SCSC مقدار فرکانس طبیعی اول برای هر سه ورقها و برای p=۱ و p=۱۰ بدست می آید که درجدول(۳) با نتایج نرم افزار المان محدود ABAQUS مقایسه گردیده اند:

جدول(۳): فرکانسهای طبیعی اول برای ورقهای S-FGM، S-FGM-coated و S-FGM0undercoated برای شرط مرزی SCSC و p=۱ و p=۱۰

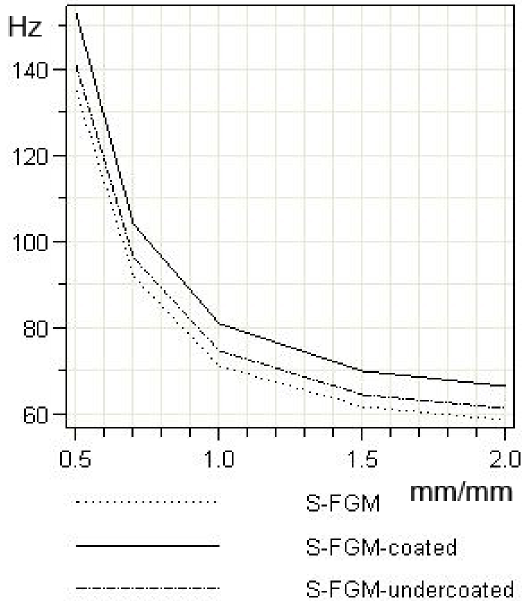
| P=1 | نوع ورق | | |
|---|---|---|---|
| | S-FGM | S-FGM-coated | S-FGM-undercoated |
| حل دقیق | 75.2716 | 83.9340 | 76.8485 |
| ABAQUS | 74.6756 | 83.2584 | 76.6171 |
| P=10 | نوع ورق | | |
| | S-FGM | S-FGM-coated | S-FGM-undercoated |
| حل دقیق | 71.4479 | 80.9787 | 74.7073 |
| ABAQUS | 71.8545 | 80.9588 | 74.9835 |

مقادیر فرکانس طبیعی اول برای مقادیر مختلف نسبت طول به عرض ورقها ، برای p=۱ و p=۱۰ بدست آمده اند و در نمودارهای تصاویر(۸) و (۹) ترسیم شده اند:

فرکانسهای بی بعد برای ورقهای مربعی در حالتی که نسبت ابعاد ورق یک می باشد، محاسبه گردیده و در جدول (۴) با مرجع [۳۱] مقایسه گردیده است. همچنین شکل مد اول ارتعاشی برای هر سه ورقها، بدست آمده از نرم افزار ABAQUS و حل دقیق به ترتیب در اشکال(۱۰) و (۱۱) ارائه گردیده است.



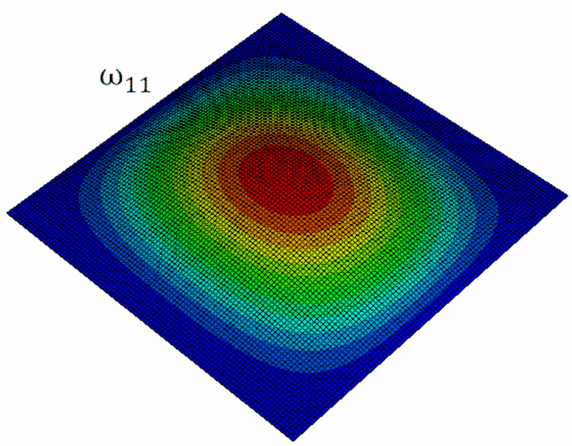

شکل(۸): نمودار فرکانس طبیعی اول برای نسبتهای مختلف $a/b$ برای ورقهای S-FGM, S-FGM-coated,S-FGM-undercoated برای p=۱



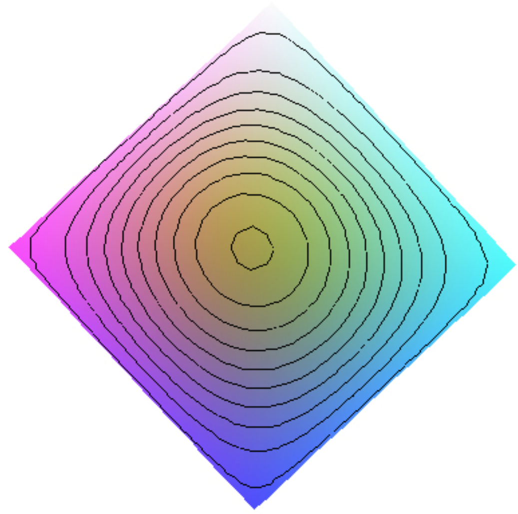

شکل(۹): نمودار فرکانس طبیعی اول برای نسبتهای مختلف $a/b$ برای ورقهای S-FGM, S-FGM-coated,S-FGM-undercoated برای p=۱

جدول(۴): فرکانسهای بی بعد $\omega_{mn}\times b^2\times\sqrt{\frac{I_0}{S_{11}}}$ برای ورقهای مربعی S-FGM, S-FGM-coated, S-FGM-undercoated و برای شرط مرزی SCSC

| Nondimensional frequency | S-FGM & S-FGM-coated & S-FGM-undercoated | فرکانس های بی بعد در مرجع [31] |
|---|---|---|
| $\overline{\omega}_{11}$ | 28.950 | 28.946 |
| $\overline{\omega}_{12}$ | 69.326 | 69.320 |




شکل(۱۰): شکل مد اول ارتعاشی بدست آمده از نرم افزار ABAQUS برای ورقهای S-FGM, S-FGM-coated, S-FGM-undercoated برای شرط مرزی SCSC



شکل(۱۱): شکل مد اول ارتعاشی بدست آمده از حل دقیق برای ورقهای S-FGM, S-FGM-coated, S-FGM-undercoated برای شرط مرزی SCSC

فرکانسهای طبیعی اول $\omega_{11}$ برای ورقهای S-FGM، S-FGM-coated و S-FGM-undercoated با شش شرط مرزی مختلف برای p=۱ و p=۱۰ به ترتیب در جداول(۵) و (۶) ارائه گردیده است.

جدول(۵): فرکانسهای طبیعی اول $\omega_{11}$ برای ورق های S-FGM، S-FGM-coated، S-FGM-undercoated با شرایط مرزی مختلف و برای p=۱

| frequency | S-FGM | S-FGM-coated | S-FGM-undercoated |
|---|---|---|---|
| SFSF | 25.0413 | 27.9232 | 25.5660 |
| SFSS | 30.3795 | 33.8757 | 31.0160 |
| SFSC | 32.9868 | 36.7757 | 33.6779 |
| SSSS | 51.3215 | 57.2277 | 52.3967 |
| SSSC | 61.4799 | 68.5552 | 62.7679 |
| SCSC | 76.8485 | 83.9340 | 75.2716 |

جدول(۶): فرکانسهای طبیعی اول $\omega_{11}$ برای ورق های S-FGM، S-FGM-coated، S-FGM-undercoated با شرایط مرزی مختلف و برای p=۱

| frequency | S-FGM | S-FGM-coated | S-FGM-undercoated |
|---|---|---|---|
| SFSF | 23.7693 | 26.9400 | 24.8536 |
| SFSS | 28.8363 | 32.6829 | 30.1518 |
| SFSC | 31.3111 | 35.4808 | 32.7395 |
| SSSS | 48.7144 | 55.2127 | 50.9368 |
| SSSC | 58.3568 | 66.1414 | 61.0190 |
| SCSC | 74.7073 | 80.9787 | 71.4479 |

## ۶- نتیجه گیری

طبق مقادیر عددی بدست آمده نتایج ذیل حاصل گردیده اند:

۱- فرکانس های طبیعی ورق های S-FGM-coated از S-FGM-undercoated بالاتر، و فرکانسهای طبیعی ورقهای S-FGM-undercoated از ورقهای S-FGM بالاتر می باشد، که این یک مزیت در سازه می باشد، چون وقتی سازه در معرض بارهای دینامیکی قرار می گیرد، با بالاتر بودن فرکانس طبیعی، دیرتر به حالت تشدید می رسد.

۲- با افزایش مقدار پارامتر p، در کلیهٔ ورقها، فرکانس طبیعی کاهش می یابد.

۳- با افزایش مقدار پارامتر p، اختلاف بین فرکانسهای طبیعی ورقهای S-FGM-undercoated و S-FGM افزایش می یابد.

۴- همان طور که ذکر شد، فرکانس های طبیعی ورق S-FGM-coated و ورقهای S-FGM-undercoated از ورقهای S-FGM بالاتر می باشد، از آنجائیکه در ورق S-FGM ضخامت برابر 2 $cm$ می باشد ولی ضخامت بخش FGM، در ورقهای S-FGM-coated و S-FGM-undercoated برابر 1 $cm$ می باشد، پس مقدار مادهٔ S-FGM کمتری در سازهٔ بکار رفته در حالیکه فرکانس طبیعی هم بالاتر رفته است، پس می تواند از لحاظ اقتصادی مقرون به صرفه باشد.

۵- به ازای b و h ثابت، با افزایش a، در کلیهٔ ورقها، مقدار فرکانسهای طبیعی کاهش می یابد.

۶- مقادیر فرکانسهای طبیعی برای کلیهٔ ورقها، برای شرط مرزی SFSF کمترین و برای شرط مرزی SCSC بیشترین مقدار خود را دارد.

## ۷- مراجع


[1] Jin, Z. H.and Batra, R. C., "Stresses Intensity Relaxation at the Tip of an Edge Crack in a Functionally Graded Material Subjected to a Thermal Shock", J Therm Stress, Vol. 19, No. 4, 1996, pp. 317- 339.

[2] Hirano, T. and Yamada, T., "Multi-paradigm Expert System Architecture Based Upon the Inverse Design Concept", In: Proc of Int Workshop on Artificial Intelligence for Industrial Applications, 1998, pp. 25-27.

[3] Niino, A. and Maeda, S., "Recent Development Status of Functionally Gradient Material", ISIJ Int, Vol. 30, 1990, pp. 699- 703.

[4] Chung, Y. L. and Chi, S. H., "The Residual Stress of Functionally Graded Materials", J Chin Inst Civil Hydraulic Eng, Vol. 13, 2001, pp. 1- 9.

[5] Chi, S. H. and Chung, Y. L., "Cracking in Sigmoid Functionally Graded Coating", J Mech, Vol. 18, 2002, pp. 41- 53.

[6] Bao, G. and Wang, L., "Multiple Cracking in Functionally Graded Ceramic/Metal Coatings", Int J Solids Struct, Vol. 32, No. 19, 1995, pp. 2853- 2871.

[7] Chi, S. H. and Chung, Y. L., "Cracking in Coating-Substrate Composites of Multi-Layered and Sigmoid FGM Coatings", Eng Fract Mech, Vol. 70, No. 10, 2003, pp. 1227- 1243.

[8] Jin, Z. H. and Noda, N., "Crack Ttip Singular Fields in Nonhomogeneous Materials", ASME J Appl Mech, Vol. 61, No. 3, 1994, pp. 738- 740.

[9] Gu, P. and Asaro, R. J., "Crack Deflection in Functionally Graded Materials", Int J Solids Struct, Vol. 34, No. 24, 1997, pp. 3085- 3098.

[10] Cai, H. and Bao, G., "Crack Bridging in Functionally Graded Coatings", Int J Solids Struct, Vol. 35, No. 7-8, 1998, pp. 701-717.

[11] Jin, Z. H. and Paulino, G. H., "Transient Thermal Stress Analysis of an Edge Crack in a Functionally Graded Material", Int J Fract, Vol. 107, No. 1, 2001, pp. 73- 98..

[12] Erdogan, F. and Chen, Y. F., "Interfacial Cracking of FGM/Metal Bonds", In: Kokini K, editor. Ceramic coating, 1998, pp. 29- 37.

[13] Kwon, P. and Crimp, M., "Automating the Design Process and Powder Processing of Functionally Gradient Materials", In: Srivatsan TS, et al., editors. Composites and Functionally Graded Materials, Vol. 80, 1997, pp. 73- 98.

[14] Kesler, O., Finot, M., Suresh, S. and Sampath, S., "Determination of Processing – Induced Stresses and Properties of Layered and Graded Coatings: Experimental Method and Results for Plasma – Sprayed Ni– Al2O", Acta Mater, Vol. 45, No. 8, 1997, pp. 3123- 3134.

[15] Obata, Y. and Noda, N., "Optimum Material Design for Functionally Gradient Material Plate" Arch Appl Mech, Vol. 66, 1996, pp. 581- 589.

[16] Praveen, G. N. and Reddy, J. N., "Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates", Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 35, No. 33, 1998, pp. 4457- 4476.

[17] Vel, S. and Batra, R. C., "Exact Solution for Thermoelastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plate", AIAA J, Vol. 40, No. 7, 2002, pp. 1421- 1433.

[18] Wu, L., Jiang, Z. and Liu, J., "Thermoelastic Stability of Functionally Graded Cylindrical Shell", Compos Struct, Vol. 70, No. 1, 2005, pp. 60- 68.

[19] Woo, J. and Meguid, S. A. "Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shell", Int. J Solids Struct, Vol. 38, No. 42, 2001, pp. 7409- 7421.

[20] He, X. Q., Ng, T. Y., Sivashanker, S. and Liew, K. M., "Active Control of FGM Plates with Integrated Piezoelectric Sensors and Actuators", Int. J Solids Struct, Vol. 38, No. 9, 2001, pp. 1641- 1655.

[21] Chi, S. H. and Chung, Y. L., "Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates under Transverse Load-Part I: Analysis", Int. J Solids Struct, Vol. 43, No. 13, 2006, pp. 3657- 3674.

[22] Chi, S. H. and Chung, Y. L., "Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates under Transverse Load-Part II: Numerical Results", Int. J Solids Struct, Vol. 43, No. 13, 2006, pp. 3675- 3691.

[23] Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, L. F. and Martins, P. A. L. S., "Static Analysis of Functionally Graded Plates Using Third-Order Shear Deformation Theory and a Meshless Method", Compos Struct, Vol. 69, No. 4, 2005, pp. 449- 457.

[24] Feldman, E. and Aboudi, J., "Buckling Analysis of Functionally Graded Plates Subjected to Uniaxial Loading", Compos Struct, Vol. 38, No. 1-4, 1997, pp. 29- 36.

[25] Ma, L. S. and Wang, T. J., "Relationships Between Axisymmetric Bending and Buckling Solutions of FGM Circular Plates Based on Third-Order Plate Theory and Classical Plate Theory", Int. J Solids Struct, Vol. 41, No. 1, 2004, pp. 85- 101.

[26] Sofiyev, A. H., "The Stability of Functionally Graded Truncated Conical Shells Subjected to Periodic Impulsive Loading", Int. J Solids Struct, Vol. 41, No. 13, 2004, pp. 3411-3424.

[27] Chung, Y. L. and Pon, C. F., "Boundary Element Analysis of Cracked Film-Substrate Medium", Int. J Solids Struct, Vol. 38, No. 1, 2001, pp. 75- 90.

[28] Cook, T. S. and Erdogan, F., "Stresses in Bonded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface", Int. J Eng. Sci, Vol. 10, No. 8, 1972, pp. 677- 697.

[29] Gecit, M. R., "Fracture of a Surface Layer Bonded to a Half Space", Int. J Eng. Sci, Vol. 17, No. 3, 1979, pp. 287- 295.

[30] Chung, Y. L. and Chen, T. W., "Bending Behavior of FGM-Coated and FGM-Undercoated Plates with Two Simply Supported Opposite Edges and Two Free Edges", Composite Structures, Vol. 81, No. 2, 2007, pp. 157- 167.

[31] Leissa, W., "Vibration of Plates", Ohio State University Columbus, Ohio, 1968.

[32] Reddy, J. N., "Theory and Analysis of Elastic Plates", 1974.

[33] Shames, I. H., Dym, C. L., "Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics", New York: McGraw-Hill; 1985.