

## تعیین مشخصه‌های مودال سازه با استفاده از روش تبدیل ویولت

حسن جلالی<sup>۱</sup>، فردین پرویزی<sup>۲</sup>  
jalali@iust.ac.ir

پذیرش مقاله: ۹۰/۰۲/۲۰

دریافت مقاله: ۸۹/۱۲/۱۲

### چکیده

شناسایی پارامتر میرایی در سازه‌ها در مقایسه با تخمین پارامترهای سختی و جرم بسیار مشکل‌تر است. دلیل آن اینست که مکانیزم‌های مختلفی باعث اتلاف انرژی در سازه‌های مکانیکی می‌شوند. این مکانیزم‌ها شامل اصطکاک بین مولکولی، اصطکاک خشک بین دو قسمت از سازه و میرایی لزج می‌باشد. تشریح جزئیات مکانیزم‌های اتلاف انرژی در سازه‌های مکانیکی با استفاده از ابزارهای ریاضی مشکل و در برخی موارد غیر ممکن است. از این رو به‌منظور فائق آمدن بر مشکلاتی که از نظر تحلیلی استفاده از مدل‌های میرایی مختلف به‌همراه دارند، معمولاً میرایی لزج معادل در تحلیل‌های خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ضریب میرایی لزج معادل را می‌توان با اندازه‌گیری پاسخ سازه به صورت تجربی بدست آورد. روش‌های مختلفی برای تعیین میرایی لزج با استفاده از داده‌های حوزه زمان (مانند روش کاهش لگاریتمی)، داده‌های حوزه فرکانس (مانند استفاده از نمودارهای پاسخ فرکانسی) و یا روش‌های زمان-فرکانس (مانند تبدیل ویولت) ارائه شده است. در این مقاله با استفاده از روش تبدیل ویولت به تعیین ضرایب میرایی و فرکانس‌های طبیعی مودهای مختلف یک سازه پرداخته شده است. مقادیر بدست آمده توسط روش تبدیل ویولت دارای خطای قابل قبولی در فرکانس‌های پائین در مقایسه با پارامترهای مودال حاصل از روش بهنگام‌سازی می‌باشند.

### کلید واژه:

میرایی لزج - تبدیل ویولت - روش‌های زمان - فرکانس - بهنگام‌سازی

۱- استادیار، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده فنی و مهندسی اراک، اراک، ایران

۲- کارشناس ارشد، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، تهران، ایران fardin.parvizi@gmail.com

## ۱- مقدمه

در طول سه دهه گذشته روش‌های زیادی برای شناسایی پارامترهای مودال یک سازه- شامل فرکانس‌های طبیعی، ضرائب میرائی و شکل مودها- ارائه شده است. از بین پارامترهای مودال، معمولاً تعیین ضریب میرائی یک سازه مشکل‌تر می‌باشد. از این رو روش‌های زیادی در حوزه زمان، در حوزه فرکانس و یا روش‌های زمان-فرکانس برای تعیین ضریب میرائی ارائه شده است. تعیین ضریب میرائی یک سازه نیاز به یک آزمایش دینامیکی دارد. امروزه معمولاً ضریب میرائی را با استفاده از نتایج حاصل از آنالیز مودال تجربی استخراج می‌کنند. در این روش تجهیزات و نرم‌افزارهای خاصی برای تعیین نمودارهای پاسخ فرکانسی مورد نیاز است. همچنین به علت وجود نویز در نمودارهای پاسخ فرکانسی حاصل- که در تعیین ضرائب میرائی مورد استفاده قرار می‌گیرند- ضرائب میرائی استخراج شده ممکن است از دقت قابل قبولی برخوردار نباشند. [1] Staszewski در مقاله خود مرور کاملی بر روش‌های مختلف تعیین ضرائب میرائی انجام داده است.

تئوری ویولت<sup>۱</sup> در طول ۱۰ سال گذشته به یکی از ابزارهای قدرتمند ریاضی برای پردازش سیگنال تبدیل شده است. تبدیل ویولت دارای مزیت عمده‌ای در فیلتر نمودن و تعیین مشخصه‌های زمان-فرکانس یک سیگنال می‌باشد. از روش تبدیل ویولت پیوسته می‌توان به عنوان موفق‌ترین روش در تعیین ضرائب میرائی یک سازه نام برد. زیرا این روش حتی در صورت وجود نویز در سیگنال پاسخ اندازه‌گیری شده، بخوبی قادر به تعیین میرائی سازه می‌باشد [1]. Priebe و Wilson [2] نشان دادند که تبدیل ویولت را می‌توان برای تعیین مشخصه‌های زمان-فرکانس یک سیگنال مورد استفاده قرار داد. دو روش برای تعیین مشخصه‌های مودال بر پایه استفاده از تئوری ویولت وجود دارد. روش اول بر پایه تبدیل ویولت گسسته می‌باشد. در این روش ورودی و خروجی سیستم توسط توابع پایه ویولت بسط داده می‌شوند. سپس پارامترهای مودال را می‌توان از تبدیل ویولت گسسته سیگنال‌های ورودی و خروجی بدست آورد [3].

روش دوم تعیین ضرائب میرائی با استفاده از تبدیل ویولت پیوسته (CWT) می‌باشد. این روش ابتدا توسط Staszewski و Cooper [4] پایه‌گذاری شد. پس از آن Ruzzene و همکارانش [5] و Staszewski و همکارانش [6] نشان دادند که رابطه مشخصی بین پارامترهای مودال یک سازه و تبدیل ویولت پاسخ ضربه سازه که از توابع Morlet استفاده می‌کند وجود دارد. این روش برای تعیین ضرائب میرائی

سازه‌های مختلفی مورد استفاده قرار گرفته است. از آن جمله می‌توان به استفاده از این روش برای تعیین ضرائب میرائی و فرکانس‌های طبیعی یک پل [5]، ضرائب میرائی یک هواپیما [7] و ضرائب میرائی یک مجموعه چرخنده اشاره نمود [8]. Shyh-Leh و همکارانش [9] با استفاده از توابع Morlet روشی برای تعیین مشخصه‌های مودال سیستم‌های یک و چند درجه آزادی ارائه نمودند. روش ارائه شده توسط آنها قابلیت استفاده از داده‌های نوسان آزاد و یا ارتعاش اجباری سیستم را داراست. Slavic و همکارانش [10] به تعیین ضرائب میرائی با استفاده از تبدیل ویولت که بر پایه توابع Gabor قرار دارد پرداختند. Joseph و Minh-Nghi [11] تبدیل ویولت را برای تعیین میرائی غیر خطی یک سیستم یک درجه آزادی مورد استفاده قرار دادند. در مقاله آنها مدل میرائی سیستم یک درجه آزادی به صورت میرائی ویسکوز در نظر گرفته شده بود و ضریب میرائی به صورت حاصلضرب اندازه سرعت در اندازه جابجائی تعریف شده است.

در این مقاله به تعیین ضرائب میرائی و فرکانس‌های طبیعی یک سازه با استفاده از روش تبدیل ویولت پرداخته خواهد شد. ابتدا، در قسمت بعد، مبانی تئوری این روش شرح داده خواهد شد. در بخش سوم با استفاده از روش تبدیل ویولت به تعیین مشخصه‌های میرائی و فرکانس‌های طبیعی یک سیستم چند درجه آزادی با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده پرداخته خواهد شد. در ادامه به انجام آزمایش بر روی یک سازه و تعیین ضرائب میرائی و فرکانس‌های طبیعی آن با استفاده از داده‌های واقعی تشریح می‌شود. جهت ارزیابی دقت ضرائب میرائی تعیین شده، در انتهای مقاله از یک مدل اجزاء محدود بهنگام شده استفاده شده است.

## ۲- تئوری

در این قسمت به ارائه مبانی تئوری تعیین ضریب میرائی و فرکانس طبیعی با استفاده از تبدیل ویولت پرداخته می‌شود. ابتدا اعمال این روش بر روی پاسخ یک سیستم یک درجه آزادی به صورت مبسوط تشریح خواهد شد. سپس، در ادامه، تعمیم روش به سیستم چند درجه آزادی ارائه می‌شود. در این مقاله فرکانس طبیعی و ضریب میرائی با استفاده از پاسخ نوسان آزاد سیستم شناسائی شده است. یک سیستم یک درجه آزادی که پاسخ نوسان آزاد آن با حل معادله (۱) تعیین می‌شود را در نظر بگیرید،

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (1)$$

در معادله فوق  $\omega_n^2 = k/m$  فرکانس طبیعی و  $\zeta = c/2m\omega_n$  نسبت میرائی می‌باشند. پاسخ نوسان آزاد سیستم یک درجه آزادی

$$\alpha = -\zeta\omega_n b - \frac{1}{2}[(1-2\zeta^2)\omega_n^2 a^2 - 2\omega_0\omega_d a + \omega_0^2] \quad (9)$$

$$\beta = \omega_d b - \varphi_0 + \zeta\omega_0\omega_n a - \zeta\omega_n\omega_d a^2 \quad (10)$$

با انتخاب  $a=a_0$  خواهیم داشت،

$$\ln |W_x(a_0, b)| \approx -\zeta\omega_n b + c_1 \quad (11)$$

$$\angle W_x(a_0, b) \approx \omega_d b + c_2 \quad (12)$$

$c_1$  و  $c_2$  مستقل از  $b$  می‌باشند. روابط (۱۱) و (۱۲) نشان می‌دهند که در یک  $a$  ثابت، یعنی  $a=a_0$ ، شیب نمودار لگاریتم اندازه تبدیل ویولت پاسخ سیستم بر حسب  $b$  برابر با  $-\zeta\omega_n$  و شیب نمودار فاز تبدیل ویولت پاسخ سیستم بر حسب  $b$  برابر با  $\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}$  است. بنابراین با محاسبه تبدیل ویولت پاسخ سیستم و رسم اندازه و فاز آن بر حسب  $b$  می‌توان فرکانس طبیعی و نسبت میرایی را بدست آورد. لازم بذکر است که در تبدیل ویولت،  $a$  نشان‌دهنده فرکانس و  $b$  نشان‌دهنده زمان می‌باشد. از این رو با استفاده از تبدیل ویولت می‌توان یک سیگنال را در حوزه زمان و فرکانس تجزیه نمود.

همانگونه که در فوق اشاره شد تعیین ضرائب میرایی و فرکانس طبیعی وابسته به انتخاب  $\omega_0$ ،  $a_0$  و  $b$  می‌باشد.  $\omega_0$  به‌قسمی انتخاب می‌شود که رابطه  $\omega_0\omega_d a \gg 1$  صادق باشد.  $a_0$  متناظر با قله  $|W_x(a, b)|$  انتخاب می‌شود.  $b$  در محدوده‌ای انتخاب می‌شود که نمودار لگاریتم اندازه ویولت بر حسب  $b$ ، خطی و دارای شیب منفی است.

تحلیل فوق که برای یک سیستم یک درجه آزادی ارائه شد قابل تعمیم به سیستم‌های چند درجه آزادی نیز می‌باشد. به‌عنوان مثال پاسخ یک سیستم دو درجه آزادی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت،

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (13)$$

که در رابطه فوق،

$$x_i(t) = A_{0i} e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} \cos(\omega_{ni} \sqrt{1-\zeta_i^2} t - \varphi_{0i}), \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

میزان شرکت مود  $\omega_{ni}$  در پاسخ سیستم می‌باشد. تبدیل ویولت پاسخ معادله (۱۳) به‌صورت زیر خواهد بود،

$$W_x(a, b) = W_{x_1}(a, b) + W_{x_2}(a, b) = \frac{\sqrt{2\pi a}}{2} [A_{01} e^{\alpha_1 + j\beta_1} + A_{02} e^{\alpha_2 + j\beta_2}] \quad (15)$$

در صورتی که ضرائب  $a_1$  و  $a_2$  به‌قسمی انتخاب شوند که روابط زیر برقرار باشد،

به‌صورت زیر بدست می‌آید،

$$x(t) = A_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \varphi_0) \quad (2)$$

$A_0$  و  $\varphi_0$  دامنه و فاز پاسخ بوده و از شرایط اولیه بدست می‌آیند و  $\omega_d^2 = \omega_n^2(1-\zeta^2)$  فرکانس طبیعی سیستم میرا است. هدف در این قسمت بدست آوردن رابطه‌ای بین تبدیل ویولت پاسخ فوق و ضریب میرایی و فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد.

تبدیل ویولت پیوسته<sup>۲</sup> یک تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\text{CWT}\{x(\tau)\} = W_x(a, b) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(a\tau + b) g^*(\tau) d\tau \quad (3)$$

که در آن  $a$  و  $b$  بترتیب پارامتر تاخیر (dilation) و پارامتر انتقال (translation) می‌باشند و  $g$  تابع ویولت Morlet بوده که به‌صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود. در معادله (۳)،  $(\cdot)^*$  نشان دهنده همزاد مختلط (complex conjugate) تابع  $g$  می‌باشد.

$$g(\tau) = e^{j\omega_0 \tau} e^{(-1/2)\tau^2}, \quad t = \tau + b/a \quad (4)$$

$\omega_0$  پارامتر قابل تنظیمی می‌باشد که در ادامه در مورد آن بحث خواهد شد. از دیدگاه ریاضی تبدیل ویولت حاصل ضرب داخلی یک سیگنال حوزه زمانی و یکی از زیر مجموعه توابع ویولت می‌باشد. تبدیل ویولت تابع را در حوزه زمان و حوزه فرکانس تجزیه نموده و اطلاعات دقیق‌تری از مشخصات سیگنال را ارائه می‌دهد.

با جایگذاری پاسخ سیستم یک درجه آزادی، رابطه (۲)، درون رابطه (۳)، انتگرال‌گیری و ساده‌سازی در انتها رابطه زیر حاصل خواهد شد [۹]،

$$W_x(a, b) = \frac{\sqrt{2\pi a}}{2} A_0 e^{j\psi} (e^{\theta} + e^{-\theta}) \quad (5)$$

پارامترهای  $\psi$  و  $\theta$  در معادله (۵) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\psi = -\zeta\omega_n b - \frac{1}{2}[(1-2\zeta^2)\omega_n^2 a^2 + \omega_0^2] + j\zeta\omega_0\omega_n a \quad (6)$$

$$\theta = \omega_0\omega_d a + j(\omega_d b - \varphi_0) - j\zeta\omega_n\omega_d a^2 \quad (7)$$

با انتخاب  $\omega_0\omega_d a \gg 1$  که قسمی به بزرگ با اندازه کافی بزرگ به قسمی می‌توان نشان داد که  $|e^{-\theta}| \ll |e^{\theta}|$  و در اینصورت  $W_x(a, b)$  را می‌توان به‌صورت زیر نوشت،

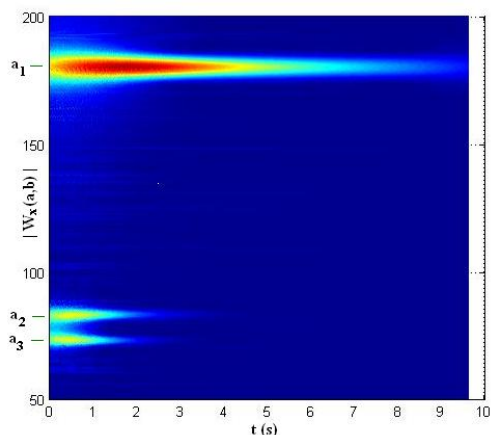
$$W_x(a, b) \approx \frac{\sqrt{2\pi a}}{2} A_0 e^{\alpha + j\beta} \quad (8)$$

شیب این دو نمودار در بازه  $t=[4\ 7]$  ثانیه عبارتست از:

شیب نمودار لگاریتم اندازه ویولت:  $\zeta\omega_n = 0.2375$

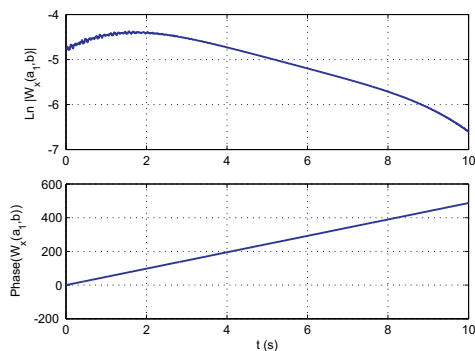
شیب نمودار فاز ویولت:  $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 48.6540$

با حل دو معادله فوق فرکانس طبیعی و ضرائب میرائی برای مود اول محاسبه می‌شوند. برای مود اول خواهیم داشت  $\omega_0\omega_n a = 96327$  که شرط روش ویولت را ارضاء می‌کند. در جدول (۲) فرکانس‌های طبیعی و ضرائب میرائی برای سیستم سه درجه آزادی فوق که از روش تبدیل ویولت بدست آمده‌اند با مقادیر واقعی این پارامترها مقایسه شده‌اند.



شکل (۲): نمایش دو بعدی اندازه ویولت پاسخ

همان‌گونه که نتایج جدول (۲) نشان می‌دهد، روش ویولت با دقت بسیار بالائی قادر به تعیین مشخصه‌های مودال یک سازه می‌باشد. لازم بذکر است که در بدست آوردن نتایج جدول (۲) مقدار  $\omega_0=11$  rad/s مورد استفاده قرار گرفته است. در قسمت بعد به اعمال روش تشریح شده در این مقاله بر پاسخ یک سازه واقعی و تعیین فرکانس‌های طبیعی و ضرائب میرائی آن پرداخته می‌شود.



شکل (۳): نمودار اندازه و فاز تبدیل ویولت پاسخ به ازاء  $a_1=180$

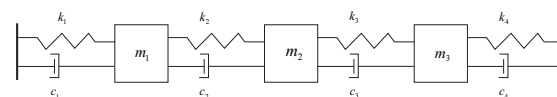
$$|W_{x1}(a_1, b)| \gg |W_{x2}(a_1, b)| \quad (16)$$

$$|W_{x2}(a_2, b)| \gg |W_{x1}(a_2, b)| \quad (17)$$

روشی که در فوق برای تعیین فرکانس طبیعی و نسبت میرائی سیستم یک درجه آزادی ارائه شد را می‌توان برای سیستم دو درجه آزادی نیز بکار برد. در قسمت بعد روشی که در این قسمت تشریح شد به یک سیستم سه درجه آزادی اعمال و فرکانس‌های طبیعی و ضرائب میرائی آن استخراج می‌شود.

### ۳- تعیین مشخصات یک سیستم سه درجه آزادی - داده‌های شبیه‌سازی شده

در شکل (۱) یک سیستم سه درجه آزادی نشان داده شده است. هدف در این قسمت تعیین فرکانس‌های طبیعی و نسبت میرائی برای این سیستم ارتعاشی با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده می‌باشد.



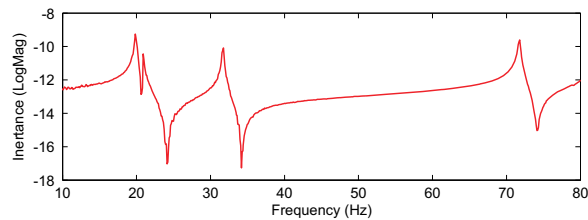
شکل (۱): سیستم سه درجه آزادی

ماتریس‌های جرم، میرائی و سختی سیستم نشان داده شده در شکل (۱) به صورت زیر می‌باشد،

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (Kg), \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 11 \end{bmatrix} (KN/m),$$

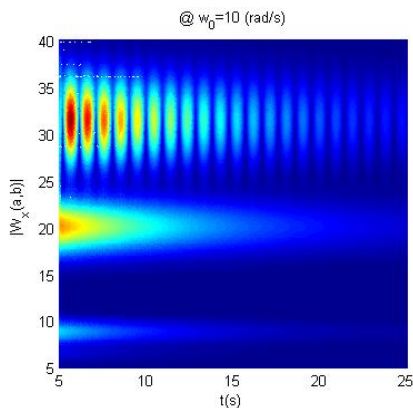
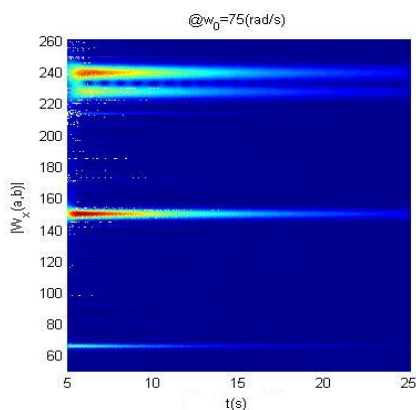
$$\mathbf{C} = 8 \times 10^{-5} \mathbf{K} (Ns/m)$$

با استفاده از ماتریس‌های جرم، سختی و میرائی فوق، معادلات حاکم بر نوسان سیستم تشکیل و با حل این معادلات به ازاء یک شرایط اولیه مشخص پاسخ نوسان آزاد سیستم فوق بدست می‌آید. در شکل (۲) نمودار دو بعدی اندازه تبدیل ویولت پاسخ جرم  $m_1$  بر حسب زمان نشان داده شده است. جهت محاسبه تبدیل ویولت از تابع cwt در نرم افزار Matlab استفاده شده است. پارامترهای مودال سیستم را میتوان با ثابت نمودن  $a$  بر روی مقادیر متناظر با مقدار بیشینه اندازه تبدیل ویولت بدست آورد. این مقادیر برای سیستم سه درجه آزادی فوق عبارتند از:  $a_1=180$ ,  $a_2=83$ ,  $a_3=74$  می‌باشد. همانگونه که در قسمت قبل عنوان شد جهت محاسبه پارامترهای مودال باید نمودار اندازه و فاز تبدیل ویولت پاسخ در مقادیر  $a$  که در فوق مشخص شد رسم شود. این نمودارها برای  $a_1=180$  در شکل (۳) رسم شده‌اند.



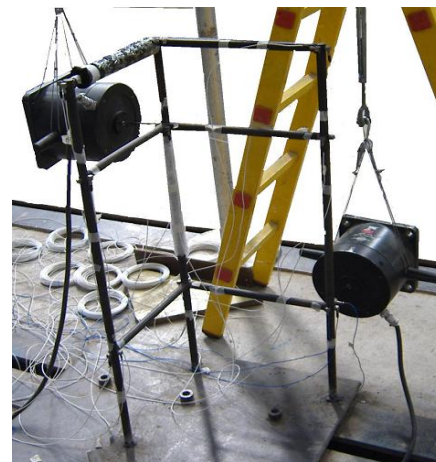
شکل (۵): نمودار پاسخ فرکانسی سازه

جهت تعیین مقادیر فرکانس طبیعی و ضرائب میرایی سازه با استفاده از پاسخ ارتعاش آزاد آن، تبدیل ویولت یکی از سیگنال‌های پاسخ اندازه‌گیری شده محاسبه می‌شود. از آنجا که فرکانس‌های طبیعی اول و دوم سازه بسیار نزدیک می‌باشند، جهت تعیین بهینه فرکانس‌های طبیعی و ضرائب میرایی دو مود اول باید از یک مقدار بالای  $\omega_0$  استفاده شود. در شکل (۶) و شکل (۷) اندازه تبدیل ویولت پاسخ به ازاء دو مقدار مختلف  $\omega_0$  نشان داده شده است. همان‌گونه که مقایسه این دو شکل نشان می‌دهد با افزایش مقدار  $\omega_0$  مودهای اول و دوم از هم مستقل شده و تعیین پارامترهای دینامیکی آنها با دقت بیشتری صورت می‌گیرد.

شکل (۶): نمودار دو بعدی اندازه ویولت پاسخ سازه به ازاء  $\omega_0=10$  rad/sشکل (۷): نمودار دو بعدی اندازه ویولت پاسخ سازه به ازاء  $\omega_0=75$  rad/s

#### ۴- تعیین مشخصات یک سازه- داده‌های تجربی

شکل (۴) سازه‌ای که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است را نشان می‌دهد. سازه از میلگردی به قطر ۲ سانتیمتر ساخته شده است. این سازه از سمت پائین بر روی فونداسیون (یک ورق فلزی) جوش شده است. شکل (۴) همچنین شتاب سنجهایی که برای اندازه‌گیری پاسخ سازه نصب شده‌اند را نیز نشان می‌دهد. از دو لرزاننده جهت تحریک سازه و اندازه‌گیری نمودارهای پاسخ فرکانسی آن استفاده شده است. نمودارهای پاسخ فرکانسی در ادامه این مقاله جهت بهنگام سازی مدل اجزاء محدود استفاده خواهد شد. ابعاد سازه فوق به قسمی انتخاب شده‌اند که سازه دارای دو مود ارتعاشی بسیار نزدیک می‌باشد. چگالی مودال بالا در یک بازه فرکانسی کوچک دقت مشخصات دینامیکی سازه (مخصوصاً میرایی) که با روش‌های معمول آنالیز مودال تعیین می‌شوند را کاهش می‌دهد. در این مقاله هدف نشان دادن قابلیت روش تبدیل ویولت در تعیین مشخصات دینامیکی یک سازه با چگالی مودال بالا می‌باشد.



شکل (۴): سازه مورد بحث در مقاله و چیدمان آزمایش مودال

در ادامه سازه توسط چکش تحریک و پاسخ نوسان آزاد آن بوسیله شتاب سنجهایی که روی سازه نصب شده است ثبت می‌گردد. سپس با تحریک سازه توسط شیکرها به تعیین نمودارهای پاسخ فرکانسی آن پرداخته خواهد شد. در تعیین نمودارهای پاسخ فرکانسی از تحریک تصادفی استفاده شده است. نمونه‌ای از نمودارهای پاسخ فرکانسی سازه در شکل (۵) نشان داده شده است. این نمودار مربوط به تحریک و پاسخ اندازه‌گیری شده در محل لرزاننده پایین می‌باشد. فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از نمودارهای پاسخ فرکانسی در جدول (۳) نشان داده شده‌اند.

مدل اجزاء محدود می‌باشد. با حل معادله (۱۸) مقادیر تغییرات سختی فوندانسیون محاسبه می‌شود و میتوان مقادیر اولیه در نظر گرفته شده برای سختی فوندانسیون را تصحیح نمود. با تکرار فرایند فوق تا زمانی که اختلاف بین فرکانس‌های طبیعی مدل اجزاء محدود و فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش به کمترین مقدار خود برسد، مقادیر واقعی ضرائب سختی فوندانسیون تعیین می‌شوند. در جدول (۱) مقادیر ضرائب سختی فوندانسیون (بر حسب N/m)، فرکانس‌های طبیعی آزمایش و مدل بهنگام شده و خطای آنها نشان داده شده است.

جدول (۱): مقایسه فرکانس‌های طبیعی آزمایش و مدل بهنگام شده (Hz).

$$k_x = 6.8824 \times 10^5, \quad k_y = 4.4850 \times 10^6, \quad k_z = 3.5167 \times 10^6$$

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$
آزمایش	۱۹/۸۲	۲۰/۹۰	۳۱/۶۵	۷۱/۷۰
مدل بهنگام شده	۱۹/۸۱	۲۰/۹۱	۳۱/۵۸	۷۱/۹۲
خطا (%)	۰/۰۳	-۰/۰۵	۰/۱۹	-۰/۳۱

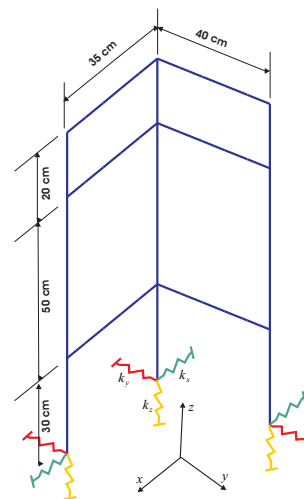
در ادامه به تعیین ماتریس میرائی سازه پرداخته می‌شود. برای این منظور ماتریس میرائی سازه تناسبی و بصورت ترکیبی از ماتریس‌های جرم و سختی سازه در نظر گرفته شده است.

$$[C] = \alpha[K] + \beta[M] \quad (۱۹)$$

جهت تعیین ضرائب  $\alpha$  و  $\beta$  از حساسیت نمودارهای پاسخ فرکانسی استفاده شده است. برای این منظور با مینیمم نمودن اختلاف بین نمودارهای پاسخ فرکانسی حاصل از آزمایش و نمودارهای پاسخ فرکانسی حاصل از مدل اجزاء محدود به تعیین ضرائب  $\alpha$  و  $\beta$  پرداخته می‌شود. در این مقاله از حساسیت لگاریتمی نمودارهای پاسخ فرکانسی (معادله (۲۰)) استفاده می‌شود [۱۳]،

$$H_{ij}^{ex}(\omega_k) - H_{ij}^{an}(\omega_k) = \left[ -\{H_i^{an}(\omega_k)\}^T \frac{\partial[Z(\omega_k)]}{\partial\alpha} \{H_j^{an}(\omega_k)\} - \{H_i^{an}(\omega_k)\}^T \frac{\partial[Z(\omega_k)]}{\partial\beta} \{H_j^{an}(\omega_k)\} \right] \begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{Bmatrix} \quad (۲۰)$$

در معادله (۲۰)  $Z$  و  $H$  بترتیب نشان دهنده ماتریس توابع پاسخ فرکانسی و ماتریس سختی دینامیکی سازه می‌باشند که از مدل اجزاء محدود بدست می‌آیند.  $H_{ij}^{an}$  و  $H_{ij}^{ex}$  نیز بترتیب مقدار تابع پاسخ فرکانسی حاصل از مدل اجزاء محدود و آزمایش در فرکانس  $\omega_k$  می‌باشند. با نوشتن معادله (۲۰) در نقاط فرکانسی مختلف، در انتها یک دسته معادلات خطی تشکیل می‌شود که با حل این دسته معادلات، مقدار تغییرات در ضرائب ماتریس سختی محاسبه



شکل (۸): شماتیکی از مدل اجزاء محدود سازه

## ۵- تعیین ضرائب میرائی با استفاده از مدل بهنگام شده

در ادامه جهت ارزیابی صحت ضرائب میرائی بدست آمده توسط روش ویولت، از یک مدل اجزاء محدود بهنگام شده استفاده شده است. برای این منظور ابتدا یک مدل اجزاء محدود از سازه با استفاده از المان‌های تیر اوپلر-برنولی به وجود آمده است. برای المان‌های تیر اوپلر-برنولی مدول الاستیسیته  $E=210$  Gpa و چگالی جرمی  $\rho=7860$  kg/m<sup>3</sup> در نظر گرفته شده است.

در مدل اجزاء محدود اثر سختی فوندانسیون فلزی توسط فنرهای در راستاهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  مدل‌سازی شده است. درجات آزادی دورانی در نقاط اتصال مدل اجزاء محدود به فوندانسیون ثابت فرض شده است. شکل ۸ شماتیکی از مدل اجزاء محدود سازه را نشان می‌دهد. ابتدا با استفاده از روش حساسیت فرکانس‌های طبیعی به تعیین سختی فنرهای استفاده شده جهت مدل‌سازی اثر فوندانسیون پرداخته می‌شود.

برای این منظور و با در نظر گرفتن مقادیر اولیه ای برای ضرائب سختی فوندانسیون، حساسیت چهار فرکانس طبیعی اول سازه با استفاده از معادله (۱۸) محاسبه می‌شود [۱۲]،

$$(\omega_{ex-i}^2 - \omega_{an-i}^2) = \left[ \begin{matrix} \varphi_i^T \frac{\partial[K]}{\partial k_x} \varphi_i & \varphi_i^T \frac{\partial[K]}{\partial k_y} \varphi_i & \varphi_i^T \frac{\partial[K]}{\partial k_z} \varphi_i \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} \Delta k_x \\ \Delta k_y \\ \Delta k_z \end{Bmatrix}, \quad i=1, \dots, 4 \quad (۱۸)$$

در معادله (۱۸)  $\omega_{an}$  و  $\omega_{ex}$  بترتیب فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش و مدل اجزاء محدود بوده و  $k_x$ ،  $k_y$  و  $k_z$  نیز همان‌گونه که در شکل (۸) نشان داده شده است فنرهای استفاده شده در راستاهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  در مدل اجزاء محدود می‌باشد.  $\varphi_i$  شکل مود حاصل از

تثوری این روش برای یک سیستم یک درجه آزادی تشریح شد. روش تشریح شده به حالت چند درجه آزادی نیز تعمیم داده شد. سپس جهت ارزیابی قابلیت این روش در تعیین مشخصه‌های دینامیکی از نتایج شبیه‌سازی شده یک مدل عددی سه درجه آزادی استفاده شد. نشان داده شد که روش ویولت بخوبی قادر به شناسایی ضرائب میرائی و فرکانس‌های طبیعی سیستم‌های چند درجه آزادی می‌باشد.

در ادامه با انجام آزمایش‌های ارتعاشی بر روی یک سازه آزمایشگاهی به اندازه‌گیری نمودارهای پاسخ فرکانسی و پاسخ ارتعاش آزاد آن پرداخته شد. با استفاده از پاسخ ارتعاش آزاد سازه و بکارگیری روش ویولت ضرائب میرائی و فرکانس‌های طبیعی سازه مورد نظر تعیین شد. جهت ارزیابی صحت نتایج حاصل از روش ویولت از یک مدل اجزاء محدود به‌نگام شده استفاده شد. با استفاده از روش حساسیت فرکانس‌های طبیعی، مدل اجزاء محدود سازه تصحیح شد. با تشکیل ماتریس میرائی سازه به‌صورت ترکیبی از ماتریس‌های جرم و سختی و استفاده از روش حساسیت توابع پاسخ فرکانسی، ضرائب ماتریس میرائی سازه تعیین شدند. با داشتن ماتریس‌های جرم، میرائی و سختی سازه ضرائب میرائی هر مود محاسبه و با نتایج حاصل از روش ویولت مقایسه شد. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که روش ویولت بخوبی قادر به شناسایی ضرائب میرائی و فرکانس‌های طبیعی سازه‌هایی است که دارای مودهای نزدیک بهم می‌باشند. خطای بدست آمده در ضریب میرائی برای مودهای اول و دوم قابل قبول می‌باشد.

می‌شوند. تعیین ضرائب ماتریس میرائی نیز مانند تعیین ضرائب سختی فوندانسیون سازه یک فرایند تکرار می‌باشد. مقادیر نهائی ضرائب ماتریس میرائی و مقایسه بین نمودارهای پاسخ فرکانسی حاصل از آزمایش و مدل تصحیح شده در شکل (۹) نشان داده شده است.

با تعیین دقیق ماتریس‌های جرم، سختی و میرائی سازه می‌توان به محاسبه ضرائب میرائی هر مود پرداخت. برای این منظور از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \backslash & 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta_i \omega_{ni} & 0 \\ 0 & 0 & \backslash \end{bmatrix} = [\Phi]^T [C] [\Phi] \quad (21)$$

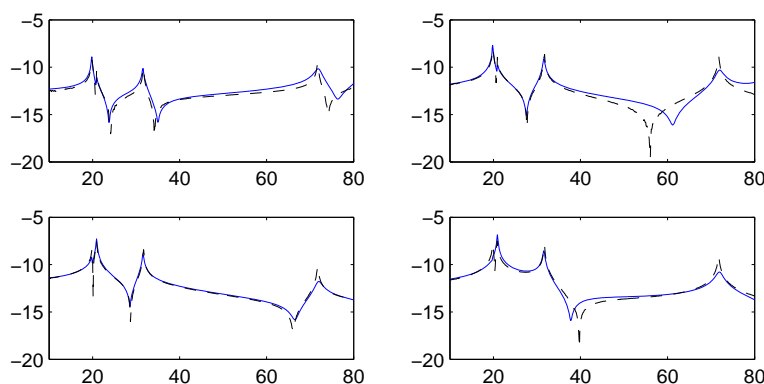
$[\Phi]$  در رابطه فوق ماتریس شکل مودهای حاصل از حل معادله مقدار ویژه زیر می‌باشد،

$$([K] - [\Lambda][M])\{\Phi\} = 0 \quad (22)$$

ضرائب میرائی حاصل از معادله (۲۱) با ضرائب میرائی حاصل از روش ویولت در جدول (۳) مقایسه شده‌اند. نتایج جدول (۳) نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی و ضرائب میرائی بدست آمده از روش ویولت از دقت خوبی برخوردار می‌باشند. البته خطای ضرائب میرائی بدست آمده در فرکانس‌های سوم و چهارم زیاد می‌باشد اما باید توجه نمود که یک دسته از مقادیر ذکر شده در جدول (۳) از داده‌های حوزه زمان (روش ویولت) و دسته دیگر از داده‌های حوزه فرکانس (روش به‌نگام‌سازی) استخراج شده‌اند.

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله تعیین ضرائب میرائی و فرکانس‌های یک سازه با استفاده از روش تبدیل ویولت مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا مبانی



شکل (۹): مقایسه نمودارهای پاسخ فرکانسی حاصل از آزمایش (خط چین) و مدل به‌نگام شده (خط پر)،  $\beta=0.55$  و  $\alpha=4 \times 10^{-5}$

جدول (۲): مقایسه فرکانس‌های طبیعی و ضرائب میرایی حاصل از روش ویولت و مقادیر واقعی

$\zeta_3$	$\zeta_2$	$\zeta_1$	$\omega_3$	$\omega_2$	$\omega_1$	
۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۰۵	۰/۰۰۴۹	۱۹/۰۰۴۱	۱۶/۶۹۲۳	۷/۷۴۳۴	مقادیر واقعی (هرتز)
۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۰۵	۰/۰۰۴۹	۱۹/۰۱۰۶	۱۶/۶۹۶۳	۷/۷۴۳۴	مقادیر شناسایی شده (هرتز)
۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	خطا (/.)

جدول (۳): مقایسه فرکانس‌های طبیعی و ضرائب میرایی با استفاده از دو روش ویولت و بهنگام سازی

$\zeta_4$	$\zeta_3$	$\zeta_2$	$\zeta_1$	$\omega_4$	$\omega_3$	$\omega_2$	$\omega_1$	
۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۵۲	۷۳/۲۷	۳۱/۹۳	۲۱/۰۶	۲۰/۰۳	روش ویولت
۰/۰۰۹۷	۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۴۷	۰/۰۰۴۷	۷۱/۹۲	۳۱/۵۸	۲۰/۹۱	۱۹/۸۱	مدل بهنگام شده
-	-	-۸/۵۱	۱۰/۶۳	۱/۸۷	۱/۱۰	۰/۷۲	۱/۱۱	خطا (/.)

No. 4, pp. 639–658, 1998.

## ۷- مراجع

- [7] Staszewski, W. J., Cooper, J. E., "Wavelet approach to flutter data analysis", AIAA Journal of Aircraft, Vol. 39, pp. 125–132, 2002.
- [8] Dien, N. P., "Damping identification using the wavelet based demodulation approach", Technische Mechanik, Vol. 28, No 3-4, pp. 324-333, 2008.
- [9] Shyh-Leh, Chen, Jia-Jung, Liu, Hsiu-Chi, Lai, "Wavelet analysis for identification of damping ratios and natural frequencies", Journal of Sound and Vibration, Vol. 323, No. 1-2 pp. 130-147, 2009.
- [10] Slavic, J., Simonovski, I., Boltezar, M., "Damping identification using a continuous wavelet transform: application to real data", Journal of Sound and Vibration, Vol. 262, No. 2, pp. 291–307, 2003.
- [11] Joseph, L., Minh-Nghi, T., "A wavelet-based approach for the identification of damping in non-linear oscillators", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 47, No. 8, pp. 1262-1281, 2005.
- [12] Friswell, M. I., Mottershead, J. E., Finite Element Model Updating in Structural Dynamics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [13] Henning, Grafe, "Model updating of large structural dynamic models using measured response functions", Ph.D. Dissertation, Imperial college of Science Technology and Medicine, 1998.
- [1] Staszewski, W. J., "Identification of damping in mdof systems using time-scale decomposition", Journal of Sound and Vibration, Vol. 203, No. 2, pp. 283–305, 1997.
- [2] Priebe, R. D., Wilson, G. R., "Wavelet applications to structural analysis", IEEE, international Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, pp. 205–208, 1994.
- [3] Schoenwald, D. A., "System identification using a wavelet-based approach", Proceeding of the 32<sup>nd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, pp. 3064–3065, 1994.
- [4] Staszewski, W. J., Cooper, J. E., "Flutter data analysis using the wavelet transform", Proceedings of the MV2 International Congress on New Advances in Modal Synthesis of Large Structures: Nonlinear Damped and Non-Deterministic Cases, Lyon, France, pp. 549–561, 1995.
- [5] Ruzzene, M., Fasana, A., Garibaldi, L., Piombo, B., "Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform: application to real data", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 11, pp. 207–218, 1997.
- [6] Staszewski, W. J., "Identification of non-linear systems using multi-scale ridges and skeletons of the wavelet transform", Journal of Sound and Vibration, Vol. 214,