دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهر
فصلنامه‌ی کاربرد شیمی در محیط زیست

سال پانزدهم، شماره‌ی ۵۹
پاییز ۱٤۰۳، صفحات ۸۱-۷۵

"مقاله پژوهشی"

کاربرد معادلات دیفرانسیل در حل مدلی از پدیده‌های زیست محیطی

مجید باقری *

گروه ریاضی کاربری، واحد اهر، دانشگاه آزاد اسلامی، اهر، ایران

* نویسنده مسئول مکاتبات: E-mail: majid.bagheri5391@gmail.com

(دریافت مقاله: ۱٤۰۳/۱۰/۱۵، پذیرش نهایی: ۱٤۰۳/۱۰/۳۰)

چکیده

معادلات دیفرانسیل نقش کلیدی در علوم زیست محیطی ایفا می‌کنند و ابزارهای ریاضی را برای درک فرآیندهای محیطی و پیش‌بینی تغییرات فراهم می‌کنند. هدف تحقیق ارائه روش‌های مدل‌سازی ریاضی برای حل مسائل زیست محیطی و استفاده از تکنیک‌ها و متدهای استاندارد ریاضی جهت حل مدل با دست آوردن نتایج مورد نظراست و تجزیه و تحلیل بر اساس قوانین ریاضی و سیستم اکولوژی انجام می‌شود. در این تحقیق به کاربرد معادلات دیفرانسیل برای مدل‌سازی محیطی، به ویژه در پراکندگی آلاینده‌ها، دینامیک اکوسیستم و پیش‌بینی تغییرات آب و هوا پرداخته می‌شود. در این پژوهش مبانی ریاضی، روش مدل‌سازی از طریق معادله دیفرانسیل بررسی می‌شود و نقش آن را در تبیین پیچیدگی سیستم محیطی نمایان می‌کند. این مطالعه همچنین به پتانسیل توسعه آینده معادلات دیفرانسیل در موضوعات بین رشته‌ای و محاسبات پیشرفته‌تر اشاره می‌کند که زمینه تحقیق و مسیر بهبود را برای حوزه علوم زیست محیطی فراهم می‌کند.

واژه‌های کلیدی: علوم زیست‌محیطی، مدل‌سازی ریاضی، معادله دیفرانسیل

مقدمه

مسائل علوم زیست محیطی مربوط به حفاظت از اکوسیستم، استراتژی‌های توسعه پایدار و رفاه انسان از اهمیت حیاتی برخوردار است (۱). در این علوم، درک تأثیر فرآیندهای طبیعی و فعالیت‌های انسانی بر روی محیط زیست، شامل مناطقی مانند تغییرات آب و هوا، تنوع زیستی، منابع آب و کنترل آلودگی مورد توجه عام قرار می‌گیرد. در این زمینه، معادلات دیفرانسیل نقش کلیدی ایفا می‌کنند و محققان را قادر می‌سازند تا دینامیک پیچیده سیستم‌های محیطی را از طریق مدل-های ریاضی توصیف کنند (۳-۲). این مدل‌ها نه تنها برای فرآیندهای اساسی اعمال می‌شوند، بلکه در سیستم‌های پیچیده‌تر مانند تغییرات آب و هوا و پویایی‌های اکولوژیکی نیز گسترش می‌یابند. استفاده از معادلات دیفرانسیل دانشمندان را قادر می‌سازد تا مسائل محیطی را به دقت تجزیه و تحلیل کرده و روش‌های مؤثری را پیشنهاد کنند (۵-٤). بنابراین، معادلات دیفرانسیل به عنوان یک ابزار مهم در مدل‌سازی علوم زیست‌محیطی برای کمک به دانشمندان در خصوص درک بهتر سیستم‌های محیطی، مبنای علمی را برای حل مسائل چالش‌های محیطی ارائه می‌کند. مدل ریاضی با رویکرد مکانیکی سیستم-های محیطی به عبارات ریاضی مانند نمادها و معادلات اشاره دارد که برای توصیف عواملی که منجر به تغییرات یا دگرگونی در فرآیندهای محیطی با کنترل زمان، مکان و شرایط می‌شود، مورد استفاده می‌گیرد.

روش‌ها

مدل‌سازی معادلات دیفرانسیل در علوم زیست محیطی به صورت مراحل زیر بررسی می‌شود:

مرحله اول: مسئله تعریف شده و نظریه و داده‌های مربوطه جمع آوری شده و سپس فرضیه ایجاد می‌شود.

مرحله دوم: با استفاده از اطلاعات بدست آمده، مسئله به فرم معادلات دیفرانسیل مدل سازی می‌شود.

مرحله سوم: معادله دیفرانسیل به صورت تحلیلی یا عددی حل می‌شود.

مرحله چهارم: پس از تایید و تنظیم با داده‌های تجربی، از مدل برای پیش‌بینی و تصمیمات واقعی مدیریت زیست محیطی، استفاده می‌شود.

مدل‌های پراکندگی

در کاربردهای کلاسیک مدل‌های PDEs[1] برای اکولوژی جمعیت، موجودات زنده‌دارای حرکت تصادفی برآونی فرض می‌شوند که سرعت آن در زمان و مکان تغییر نمی‌کند. این فرضیه منجر به انتشار مدل (۱) می شود (۹-۷).

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

که در آن $u(x,y,t)$ چگالی موجودات در فضای مکانی به مختصات (x, y) ، زمان t است و D ضریب انتشار است که میزان پراکندگی را با واحد مسافت بر زمان اندازه‌گیری می‌کند.

[1] Partial differential equations

معادله دیفرانسیل انتقال (معادله جابجایی – پراکندگی – واکنش) (ADRE [۲]) در رودخانه‌ها

اولین فرایند انتقال آلودگی در رود خانه از محلی به محل دیگر از طریق جریان آب، فرایند جابجایی می باشد (۱۰). فرایند دیگر در انتقال آلایندگی فرایند پراکندگی است که توسط فیک [۳] ارائه شده است. معادله حاکم بر انتقال آلودگی در محیط‌های آبی اعم از رودخانه‌ها و جریانات زیرسطحی، در حالات یک، دو و سه بعدی، معادله انتقال (معادله جابجایی– پراکندگی– واکنش) (ADRE) است که این معادله یکی از مهم‌ترین معادلات دیفرانسیل جزئی ناهمگن سهموی بوده واز ترکیب معادله پیوستگی و قانون اول فیک به دست آمده و دارای کاربردهای وسیعی در علوم آب، جو و انتقال حرارت است. فرم کلی این معادله در حالت انتقال یک بعدی آلاینده که در معرض سه پدیده جابجایی، پراکندگی و واکنش قرار دارد به صورت رابطه (۲) است

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -V\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) - ku(x,t) \pm \varphi(x,t) \qquad (۲)$$

که t زمان، x فاصله کف رودخانه از محل ورود آلاینده، V سرعت میانگین درمقطع رودخانه در جهت طولی ، D ضریب پراکندگی طولی، k ثابت نرخ واکنش، $u(x,t)$ غلظت آلایندگی که بصورت تابعی از زمان و مکان تعریف می‌شود $\varphi(x,t)$ ، چاهک است و تحت شرایطی که $\varphi(x,t)$ چشمه یا منبع آلاینده خارجی باشد، به غلظت ماده آلاینده در محیط افزوده خواهد شد، لذا علامت آن مثبت درنظر گرفته می‌شود. در صورتی که $\varphi(x,t)$ چاهک باشد، از غلظت ماده آلاینده در محیط کاسته خواهد شد، لذا علامت آن منفی در نظرگرفته می‌شود.

روش تحلیلی حل معادلات دیفرانسیل جزئی

محققان در پژوهش‌های انجام یافته جهت حل معادلات دیفرانسیل حاصل شده از انتشار– انتقال آلایندگی از روش‌های مختلف تحلیلی وعددی استفاده کرده‌اند که روش‌های عددی در یک بازه معین توام با خطا محدود می‌باشند (۱۲–۱۵). از طرفی روش‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی از نظر پیچیدگی نوع روش و زمان مناسب نیستند (۱۶–۲۱)، ولی با استفاده از روش بکار برده شده در این تحقیق، معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر انتشار– انتقال آلایندگی‌ها از طریق تغییر متغیر تبدیل خطی به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند که با روش‌های ضرائب نامعین و تغییر پارامتر به سهولت قابل حل هستند.

معادلات دیفرانسیل جزئی در رابطه (۳)

$$P\left(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{tt}, u_{xt}, \dots\right) = 0 \qquad (۳)$$

با تغییر متغیر $\eta = k(x + ay - ct)$ به معادله دیفرانسیل معمولی رابطه (٤) تبدیل می‌شوند:

$$P\left(u, ku', kaú, -kcú, k^2u'', k^2a^2u'', k^2c^2u'', -k^2cu'', \dots\right) = 0 \quad (٤)$$

که k, a و c ثابت‌های اختیاری هستند که شکل مرسوم معادله فوق به فرم زیر می‌باشد:

$$P_0\left(u, u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \dots\right) = 0 \qquad (۵)$$

P_0 چند جمله‌ای برحسب $u(\eta)$ و مشتقات مراتب مختلف آن هست و $u^{(m)}$ مشتق تابع $u(\eta)$ از مرتبه صحیح m است.

[2] Advection-Dispersion-Reaction equation

[3] Fick

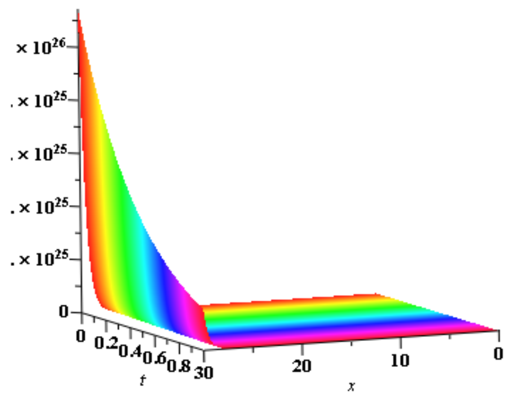
به عنوان مثال روش فوق را برای معادله (۱) انجام می‌دهیم:

با تغییر متغیر $\eta = k(x + ay - ct)$ معادله (۱) به معادله دیفرانسیل $-cku = Dk^2u'' + Da^2k^2u''$ که به فرم کلی معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم همگن $(Dk^2 + Da^2k^2)u'' - cku = 0$ بر حسب متغیر η می‌باشد و به سادگی جواب عمومی آن با تشکیل معادله مشخصه جبری $(Dk^2 + Da^2k^2)r^2 - (ck)r = 0$ بر حسب r بدست می‌آیند که جواب‌های آن $r = 0$ و $r = \frac{c}{Dk+Da^2k}$ می باشند لذا جواب عمومی معادله (۱) بصورت رابطه (٦) می باشد:

$$u = c_1 + c_2 e^{\frac{c}{Dk+Da^2k}\eta} \qquad (٦)$$

که در آن $\eta = k(x + ay - ct)$ و c_1 و c_2 ثابت های اختیاری هستند و در نتیجه تابع چگالی و یا تابع غلظت آلایندگی $u(x,y,t)$ برحسب متغیرهای اصلی x,y,t مشخص می‌شود.

گرافیک تابع $u(x,y,t)$ بازای مقادیر $D = \frac{1}{2}, k = 2, c = c_1 = c_2 = 1, a = 0$ برای پارامترهای آن به شکل زیر می باشد.



شکل (۱): نمودار تابع غلظت، $u(x,t) = 1 + e^{2(x-t)}$

روندها و چالش‌های آینده

کاربرد معادلات دیفرانسیل در علوم زیست محیطی با چالش هایی روبرو بوده و روند توسعه آشکاری را نشان می دهد. با تعمیق یکپارچگی چند رشته‌ای، مانند ترکیب علم محاسبات، علوم داده و علوم اجتماعی، مدل‌های معادلات دیفرانسیل پیچیده‌تر و کاربردی‌تر می‌شوند و می‌توانند پویایی سیستم‌های محیطی را به طور جامع‌تری منعکس کنند.

علاوه بر این، با پیشرفت در قدرت محاسباتی و الگوریتم‌ها، حل معادلات دیفرانسیل پیچیده مانند معادلات دیفرانسیل جزئی با مرتبه بالا ترا در حال امکان پذیر شدن است و شبیه‌سازی‌های دقیق‌تری از فرآیندهای محیطی ارائه می‌دهند. در عین حال، همگرایی روش‌ها، یادگیری ماشین و هوش مصنوعی سبب بهبود کارایی پیش‌بینی مدل‌ها و توانایی آن‌ها در مدیریت داده‌های با مقیاس بزرگ می‌شود.

با این حال، پیچیدگی و ماهیت غیرخطی سیستم‌های محیطی، مدل‌سازی را به‌ویژه از نظر عدم قطعیت پارامتر و کیفیت داده‌ها چالش برانگیز می‌کند. به عنوان مثال، مدل‌های تغییر آب و هوا باید تعاملات سیستم‌های متعدد را در نظر بگیرند. این راه‌حل‌های پیشنهادی شامل توسعه روش‌های عددی کارآمدتر و ابزارهای محاسبه، استفاده از فناوری ترکیب داده‌ها برای بهبود تخمین پارامترهای مدل، و استفاده از روش‌های آماری برای تجزیه و تحلیل حساسیت مدل و تعیین کمیت عدم قطعیت است.

در نتیجه، کاربرد معادلات دیفرانسیل در علوم محیطی امیدوارکننده است و به توصیف و پیش‌بینی کمک می‌کند .فرآیندهای زیست محیطی دقیق تر در

مواجه با چالش‌های کنونی، همکاری میان رشته‌ای، نوآوری فن‌آوری و توسعه روش‌شناختی کلیدی است و انتظار می‌رود که به طور موثر بر این مشکلات غلبه کند.

نتیجه‌گیری

معادلات دیفرانسیل نقش کلیدی در علوم محیطی ایفا می کنند و ابزار قدرتمندی برای درک و پیش‌بینی سیستم‌های محیطی ارائه می‌دهند. از طریق مدل‌سازی ریاضی، معادلات دیفرانسیل به دانشمندان کمک می‌کند تا مشکلات پیچیده محیطی را به‌طور دقیق توصیف و تجزیه و تحلیل کنند و مبنای علمی برای تصمیم‌گیری‌های مدیریت زیست‌محیطی فراهم کنند. معادلات دیفرانسیل روابط دینامیکی و غیرخطی را در سیستم‌های محیطی مانند پراکندگی آلاینده‌ها، جمعیت نشان می‌دهد.

دینامیک و تغییرات آب و هوایی آن‌ها نه تنها متغیرهای محیطی را پیش‌بینی می‌کنند، بلکه از سیاست گذاری نیز حمایت می‌کنند. تحقیقات آینده به ادغام آمار، یادگیری ماشین و سایر فناوری‌ها برای بهبود دقت مدل نیازدارد. در کلیه رشته‌ها برای ساخت مدل-های زیست محیطی جامع‌تر، چالش‌هایی از جمله مدل‌سازی سیستم پیچیده، عدم قطعیت پارامتری و کیفیت داده‌ها را می‌توان از طریق روش‌های محاسباتی پیشرفته، ادغام داده‌ها و تحلیل حساسیت مدل، برطرف کرد.

معادلات دیفرانسیل در حل مشکلات زیست محیطی بسیار مهم هستند و مدل های بهبود یافته به درک سیستم زمین وحمایت از محیط زیست و توسعه، پایدارمی باشند. با روش‌های تحلیلی کارآمدتر، جواب عمومی معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل زیست محیطی را می‌توان بدست آورد.

منابع

[1] Tsoko. C. P., Xu, Y., 2009, Modeling carbon dioxide emissions with a system of differential equations. Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications, 71(12). E1182-E1197.

[2] Lu, Z., L. Zhenwei., Wang, H. L., 2016, The application of regression analysis and differential equation models in the prediction of indoor PM2.5 concentration. Journal of Residuals Science & Technology, 13(1), 325-328.

[3] Tiwari, J. L., Hobbie, J. E., 1976, Random differential equations as models of ecosystems Initial condition and parameter specifications in terms of maximum entropy distributions. Mathematical Biosciences, 31(1-2), 37-53.

[4] Liu, Y. L., Chen, C., Alotaibi, R., Shorman, S. M., 2022, Study on audio-visual family restoration of children with mental disorders based on the mathematical model of fuzzy comprehensive evaluation of differential equation. Applied Mathematics and NonlinearSciences,7(2), 307-314.

[5] Kafle, R. C., Pokhrel, K. P., Khanal, N Tsokos. C. P., 2019, Differential equation model of carbon dioxide emission using functional linear regression. Journal of Applied Statistics, 46(7), 1246-1259.

[6] Cai, W. G., & Pan, J. F., 2017, Stochastic differential equation models for the price European CO2 emissions allowances. Sustainability, 9(2), 207.

[7] Murray, J. D., 1989, Mathematical biology. Biomathematics. Volume 19. Springer-Verlag, Berlin, Germany.

[8] Edelstein-Keshet, L.,1986, Mathematical models in biology.Random House, New York, NewYork, USA.

[9] Okubo, A., 1980, Diffusion and ecological problems: mathematical models. Springer-Verlag, Berlin, Germany.

[10] Gulliver, J.S, 2007, Introduction to chemical transport in the environment. Cambridge University Press.

[11] Chapra. S.C., 1997, Surface water-quality modeling, Vol. 1, McGraw- Hill New York.

[12] Massabo. M., Cianci, R., Paladino, O., 2011, An analytical solution of the advection dispersion equation in a bounded domain and its application to laboratory experiments, Journal of Applied Mathematics, 2011, 1,p.493014..

[13] Mikhailov, M. D., & Ozisik, M. N., 1984, Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion.

[14] Pérez Guerrero, J., et al., 2009, Analytical solution of the advection–diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique, International Journal of Heat and Mass Transfer, 52(13), 3297-3304.

[15] Van Genuchten, M. T., 1982, Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation (No. 1661). US Department of Agriculture, Agricultural Research Service.

[16] Barati Moghaddam, M., Mazaheri, M., Mohammad Vali Samani, J., 2015, Numerical Solution of Advection-Dispersion Equation with Temporal Conservation Zones in Case of Unsteady Flow in Irregular Sections. Journal of Science And Irrigation Engineering, 40, 1, 99-117.

[17] Parsaie, A., Haghiabi, A. H., 2015, Calculation of Longitudinal Dispersion Coefficient and Modeling of Pollution transport in Rivers (Case Study: Severn and Narew Rivers), Water and Soil, in persian, 29, 5, 1070-1085.

[18] Wu, L., Zhang, X., & Manafian, J., 2021, On the Exact Solitary Wave Solutions to the New (2+ 1) and (3+ 1)-Dimensional Extensions of the Benjamin-Ono Equations. Advances in Mathematical Physics, 2021(1), 6672819.

[19] Manafian, J., 2018, Optical solitons in a power-law media with fourth order dispersion by three integration methods, Cogent math. stat., 5 (1), 1434924.

[20] Manafian.J, Lakestani, M., 2016, Abundant soliton solutions for the Kundu-Eckhaus equation via $ta(\phi/2)$-expansion method. Optik,127:5543–51.

[21] Dehghan, M., & Manafian, J., 2009, The solution of the variable coefficients fourth-order parabolic partial differential equations by the homotopy perturbation method. Zeitschrift für Naturforschung A, 64(7-8), 420-430.

"Research article"

Application of differential equations in solving a model of environmental phenomena

majid Bagheri [1*]

[1] Applied Mathematics Department, Ahar Branch, Islamic Azad University, Ahar, Iran.
*Corresponding Author: majid.bagheri5391@gmail.com
(Received: 4 January 2025, Accepted: 19 January 2025)

Abstract
Differential equations play a key role in the environmental sciences and provide mathematical tools for understanding environmental processes and predicting changes. The purpose of the research is to provide mathematical modeling methods to solve environmental problems and to use standard mathematical techniques and methods to solve the model by obtaining the desired results, and the analysis is done based on mathematical laws and ecological system. In this research, the application of differential equations for environmental modeling, especially in pollutant dispersion, ecosystem dynamics, and climate change prediction, is discussed. In this research, mathematical foundations, modeling method through differential equation is examined and its role in explaining the complexity of the environmental system is revealed. This paper also points to the potential for future development of differential equations in interdisciplinary topics and more advanced computing, which provides a research context and improvement path for the field of environmental sciences.

Conflict of interest: None declared.

Keyword: environmental science, mathematical modeling, differential equation