

طراحی کنترلر فیدبک خروجی برای سیستم‌های چند عاملی با دینامیک ناهماهنگ در حضور نامعینی پارامتری و اغتشاش خارجی

بدرالزمان حسینی^(۱) - مهدی سجودی^(۲)

(۱) کارشناس ارشد - شرکت انتقال گاز ایران، منطقه دو عملیات انتقال گاز، اصفهان، ایران

(۲) استادیار - دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۶/۲۴

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۴/۷

خلاصه: مطالعه حاضر به ردیابی عامل مرجع یک سیستم چندعاملی درون شبکه و متأثر از تأخیر زمانی بازه‌ای متغیر با زمان دارای نامعینی و در حضور اغتشاش می‌پردازد. در این مطالعه گراف ارتباطی بین عاملها، مستقیم فرض شده و با استفاده از یک روش تقسیم‌بندی بازه تأخیر، ضرایب غیرخطی‌ای که از نامعادله جنسن مشتق می‌گردند، تخمین زده شده و در نهایت با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی محدب شرایط پایداری با کمترین محافظه کاری به دست می‌آیند. در این روش از فیدبک خروجی H_∞ به منظور ردیابی عامل مرجع و پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته بهره گرفته شده است. با در نظر گرفتن اغتشاش و نامعینی در سیستم، استفاده از روش H_∞ در کنار طراحی فیدبک خروجی پویا به نتایج بهتر در ردیابی عامل مرجع منجر گردیده است که کارایی طراحی صورت گرفته در شبیه‌سازی‌ها مشهود است.

کلمات کلیدی: نابرابری ماتریسی خطی، نابرابری جنسن، پایداری مقاوم H_∞ ، فیدبک خروجی پویا، تأخیر زمانی متغیر با زمان بازه‌ای.

Output Feedback Controller Design for Multi-Agent Systems with Dynamic Heterogeneity in the Presence of Parameter Uncertainty and Exogenous Disturbances

Badrozaman Hosseini⁽¹⁾ - Mehdi Sojoodi⁽²⁾

(1) MSc - Senior Engineer, Nigtcdist 2, Isfahan, Iran
badrezia@yahoo.com

(2) Assistant Professor – Department of Electrical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran
sojoodi@modares.ac.ir

This paper is concerned with network based leader following consensus for a distributed multi agent system with interval time varying delays in the presence of uncertainty and disturbances. A network based consensus control protocol under a directed graph is proposed. The nonlinear time varying coefficients derived from Jenson's integral inequality is approximated with an estimation method. Finally with convex combination, less conservative stability criteria are provided. In this method, the output feedback H_∞ control is proposed to leader following consensus and robust stability of the closed loop system. In the presence of uncertainty and disturbances in the system, using H_∞ control along with dynamic output feedback controller has led to better results in tracking the reference signal. This study provides H_∞ inf stability criteria in the forms of linear matrix inequalities (LMIs) and convex programming standard form. Numerical examples are given to show the effectiveness of the obtained theorems and results.

Index Terms: LMI, Jenson's inequality, H_∞ robust stability, dynamic output feedback, interval time varying delay.

نویسنده مسئول: مهدی سجودی، دانشگاه تربیت مدرس تهران، sojoodi@modares.ac.ir

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر، کنترل جمعی سیستم‌های چندعاملی به دلیل کاربردهای وسیع آنها در زمینه‌های مختلف صنعتی، بیولوژیکی، بیوشیمیایی، سنسورهای تحت شبکه، جهت گیری سفینه‌های فضایی مورد توجه گسترده قرار گرفته‌اند. اجماع مهمترین موضوع در کنترل جمعی سیستم‌های چندعاملی است. به منظور ذخیره سازی انرژی در اجماع عامل‌ها از روش ردیابی عامل مرجع استفاده گردیده است [۱]. با تعریف سیگنال خطا، مسئله اجماع به مسئله پایداری تبدیل می‌گردد. در این روش با اعمال روش لیاپانوف- کراسوفسکی جدید، میان عامل‌هایی که به طور مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند نیز ارتباط برقرار می‌گردد. بدین منظور کرونگر ارتباط ماتریس‌های لیاپانوف و گراف ارتباطی غیر مستقیم عامل‌ها استفاده شده است. زمانی که تعداد ماتریس‌های وزنی در روابط لیاپانوف افزایش یابد، روش ارائه شده در [۱] باعث می‌گردد اجماع عامل‌ها با محافظه کاری زیادی همراه باشد. در تحقیق [۱] از کنترلگر فیدبک حالت و در تحقیق [۲] هر دو کنترلگر فیدبک حالت و فیدبک خروجی دینامیکی مورد بررسی قرار گرفته شده و بهره‌های کنترلگر به طور مستقل از ماتریس‌های لیاپانوف و با کمک الگوریتم سلسله مراتبی به دست می‌آیند. با این شرایط، تغییرات در وضعیت ماتریس‌های لیاپانوف تأثیری روی بهره کنترلگر ندارد. با استفاده از روش‌های سلسله مراتبی و بهبود مقادیر اولیه تحلیل، بهره کنترلگر به دست می‌آید. از جمله معایب این روش را می‌توان در طراحی کنترلگر دانست که در برخی شرایط با وجود بهینه سازی شرایط اولیه با استفاده از الگوریتم تربیتی، برای بهره کنترلگر پاسخی به دست نمی‌آید [۲]. تأخیر زمانی در بسیاری از سیستم‌های دینامیکی نظیر سیستم‌های کنترل تحت شبکه، سیستم‌های قدرت، سیستم‌های اقتصادی، کنترل فرآیند و شبکه‌های عصبی ایجاد می‌گردد [۳]. انتقال سیگنال ممکن است منجر به تأخیر شود. آنالیز روش پایداری که با در نظر گرفتن پارامترهای تأخیر پردازش می‌شود، از محافظه کاری کمتری برخوردار است [۴]. روش ارائه شده در [۴] به منظور تخمین ضرایب غیرخطی از روش محدب و تقسیم بندی بازه تأخیر استفاده کرده است. آنالیز پایداری سیستم‌های خطی متغیر با زمان برای بسیاری از مسائل عملی مهم است و توجه قابل ملاحظه‌ای به آنها صورت گرفته است [۵].

در [۵] با استفاده از روش لیاپانوف- کراسوفسکی پارامتری، نتایج با محافظه کاری کمتر در مقایسه با روش‌های هم‌زمانی به دست می‌آیند و به دلیل وجود نامعینی از روش‌های مقاوم سازی استفاده شده است. روش‌هایی برای تعیین محافظه کاری کمتر در حضور تأخیر بازه‌ای ارائه گردیده است. با استفاده از توابع لیاپانوف- کراسوفسکی، ماتریس‌های وزنی آزاد [۶] و استفاده از روش‌های محدب [۱۲] و [۳] به تحقیق در مورد تأخیر بازه‌ای پرداخته می‌شود. با انتخاب تعداد ماتریس‌های وزنی آزاد کمتر [۷] و روش‌های لیاپانوف ساده‌تر و انتخاب مناسب ماتریس‌ها [۸] از پیچیدگی محاسبات کاسته می‌شود. بحث طراحی کنترلگر مقاوم در سیستم‌های غیرخطی و دینامیک ناهماهنگ در حضور تأخیر

بازه‌ای و نامعینی متغیر با زمان با طراحی روابط لیاپانوف و روش پایداری نمایی در تحقیق [۹] انجام گرفته است. در تحقیق [۱۰] از روش به کار برده شده در [۹] برای سیستم‌های با دینامیک ناهماهنگ بهره می‌گیرد و از روش پایداری نمایی سوئیچینگ استفاده می‌کند. در این روش پارامترهای نمایی برای هر عامل متفاوت خواهند بود. در تحلیل از روابط لیاپانوف- کراسوفسکی، روابط نیوتن- لایبیز و ماتریس‌های وزنی استفاده شده است. در تعیین نرخ پایداری، هر دو کران بالا و پایین تغییر می‌کنند [۱۰]. در تحقیق [۱۱] نیز پایداری نمایی برای سیستم‌های خطی و تأخیر بازه‌ای متغیر با زمان در حضور نامعینی مورد بررسی قرار گرفته و از روش لیاپانوف- کراسوفسکی و نیوتن- لایبیز شرایط وابسته به تأخیر جدید برای پایداری نمایی سیستم به دست آمده است. در این روش از ماتریس‌های وزنی زیادی در روابط لیاپانوف استفاده شده که باعث پیچیدگی تحلیل گردیده است. در [۷] محدوده بازه تأخیر به دو قسمت تقسیم شده است و تحلیل برای هر ناحیه جداگانه انجام گرفته است. در مقاله حاضر با تقسیم بندی بازه تأخیر به n قسمت و استفاده از روابط حاکم بر مجموعه‌های محدب، محافظه کاری کمتر و سرعت اجماع بیشتر شده است. در [۷] برای بازه‌های تأخیر در روابط انتگرالی از روش بیشینه تقریب استفاده گردیده است، که باعث کاهش دقت می‌شود، در صورتی که با استفاده از روش تقسیم‌بندی بازه تأخیر، به استفاده از تقریب در روابط نیازی نیست. از نوآوری‌های تحقیق می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. بررسی دینامیک عامل‌ها به صورت ناهماهنگ در حضور نامعینی و اغتشاش می‌باشد که در کارهای قبلی به آن اشاره نشده است. در ساختار مسئله از کنترلگر خروجی دینامیکی پویا استفاده گردیده است. مزایای استفاده از کنترلگر دینامیکی پویا بر خلاف کنترلگر فیدبک حالت، عدم استفاده از روش‌های اضافه در کنار روابط لیاپانوف- کراسوفسکی در تضمین پایداری می‌باشد. در مقاوم‌سازی سیستم از خروجی کمکی $Z(t)$ استفاده شده است. ماتریس C_z در سیگنال خروجی کمکی، در بهینه‌سازی نتایج اجماع و مقاوم‌سازی در حضور اغتشاش نقش دارد (در تعریف ۱ به نقش خروجی کمکی اشاره می‌گردد). در این پژوهش با استفاده از پارامترهای طراحی نظیر ضریب ماتریس وزنی و مشتق تأخیر (بر خلاف روش‌های [۹] و [۱۱])، می‌توان سرعت اجماع را افزایش داد. پارامترهای طراحی علاوه بر اعمال تغییرات در سرعت اجماع می‌توانند در کم کردن میزان بالادگی و پایین آمدگی سیگنال‌ها نیز اثر بگذارند. به منظور کاهش محافظه کاری از روش انتگرال نیوتن- لایبیز و نامعادله جنسن استفاده شده است. برای خطی‌سازی ضرایب غیرخطی در انتگرال جنسن، روش تقسیم‌بندی بازه تأخیر مورد استفاده قرار گرفته است [۴]. در این روش هر چه بازه تأخیر به فواصل کوچکتر تقسیم‌بندی شود، قابلیت تحمل بیشینه تأخیر افزایش می‌یابد. نکته دیگر در نظر گرفتن اثر عامل مرجع در القای اغتشاش به سیستم است. در تحقیق [۱۳] اثر عامل مرجع در القای اغتشاش با بهره‌گیری از روش نمونه برداری از مدل داخلی سیستم^۱ در نظر گرفته نشده است.

۲- مقدمات ریاضی و بیان مسأله

در این نوشتار گراف ارتباطی مستقیم $G=(V,D)$ از N عامل $D \subseteq V \times V$ و مجموعه‌ای از لبه‌های ارتباطی آنها $V=\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ تشکیل یافته است. ارتباطات $W=[w_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس وزنی مجاورتی عامل‌ها را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن عامل v_j به عنوان همسایه عامل v_i می‌توان رابطه $\varepsilon_{ij}=(v_i, v_j)$ را برای آنها تعریف کرد. این رابطه نشان می‌دهد که عامل v_i می‌تواند اطلاعات را از عامل v_j دریافت نماید. در گراف ارتباطی مستقیم در صورتی که عامل v_i از عامل v_j اطلاعات دریافت کند به معنی آن نیست که ارتباط بالعکس وجود داشته باشد ولی در گراف ارتباطی غیرمستقیم ارتباط بالعکس وجود دارد. درجه ماتریس گراف G به صورت $\Lambda = \text{diag}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ نمایش داده می‌شود. در این ماتریس عناصر قطر رابطه $v_i = \sum w_{ij}$ را دارا هستند. ماتریس لاپلاس در گراف ارتباطی مستقیم به صورت $L = \Lambda - W$ نمایش داده می‌شود. گراف را در صورتی متصل می‌گوئیم که بین هر دو زوج عامل یک مسیر ارتباطی وجود داشته باشد. با فرض اینکه یک شبکه ارتباطی شامل n عامل و یک عامل مرجع 0 باشد، در این صورت میان عاملها و عامل مرجع نیز گراف ارتباطی برقرار خواهد بود.

ماتریس قطری $M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ بیانگر ارتباط هرکدام از عاملها با عامل مرجع است. در صورتی که ارتباطی بین هر عامل با عامل مرجع برقرار باشد $m_i \leq 0$ خواهد بود و در غیر این صورت $m_i = 0$ می‌باشد. برقرار بودن تنها یک ارتباط از گراف G با عامل مرجع باعث می‌گردد عامل مرجع برای سایر عاملهای شبکه نیز به صورت سراسری در دسترس باشد. نمادهایی که در مقاله ذکر شده‌اند، به شرح زیر می‌باشند. نماد \mathbb{R}^n بیانگر فضای n بعدی نتایج اسکالر (\cdot, \cdot) و بردار نرم $\|\cdot\|$ است. $\mathbb{R}^{n \times r}$ نمادی برای تمامی ماتریس‌های $(n \times r)$ بعدی است. ماتریس A^T برگردان A است و $A = A^T$ نماد متقارن بودن ماتریس A می‌باشد. $\lambda(A)$ به عنوان مقادیر ویژه ماتریس A در نظر گرفته می‌شود و $\lambda_{\max}(A) = \max\{\text{Re } \lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$ است. I نمادی از ماتریس همانی است. واژه متقارن در ماتریس‌ها با نماد $*$ بیان می‌گردد. $C^1([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ نمادی از مجموعه‌ای از توابع n بعدی است که در محدوده $[- \tau, 0]$ مشتق‌پذیر هستند. $L_2([0, \infty], \mathbb{R}^r)$ نماد مجموعه‌ای از توابع r بعدی است که در بازه $[0, \infty]$ مربعی و انتگرال‌پذیر می‌باشند. $\|\cdot\|$ نماد بردار نرم اقلیدسی است. ماتریس A نیم مثبت معین است $A \geq 0$ در صورتی که برای تمامی $x \in \mathbb{R}^n$ رابطه $(Ax, x) \leq 0$ برقرار باشد. ماتریس A مثبت معین است $A > 0$ در صورتی که برای $x \neq 0$ رابطه $(Ax, x) < 0$ برقرار باشد. سیستم چند عامله غیرمتمرکز شامل n عامل و یک عامل مرجع را در نظر بگیرید به گونه‌ای که هر عامل متأثر از نامعینی و اغتشاش باشد. نماد \otimes بیانگر ارتباط کرونکر^۱ ماتریس‌ها می‌باشد.

دینامیک هر عامل را به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \theta_1 x_i(t) + \theta_2 u_i(t) + \theta_3 w_i(t) \\ x_i(t_0) = x_i^0 \quad i=1,2,\dots,N \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\theta_1 = a_i + \Delta a_i, \theta_2 = b_i + \Delta b_i, \theta_3 = N_i + \Delta N_i,$$

ماتریس‌های $a_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $N_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$ برای $i=1,2,\dots,N$ به گونه‌ای که N تعداد عامل‌ها باشد، ثابت در نظر گرفته شده‌اند. $x_i(t)$ سیگنال حالت، $u_i(t)$ سیگنال کنترل، $w_i(t)$ سیگنال اغتشاش خارجی و $y_i(t)$ خروجی سیستم است.

دینامیک عامل مرجع بصورت زیر توصیف می‌گردد [۱]:

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = a_0 x_0(t) \\ x_0(t_0) = x_0^0 \\ y_0(t) = C_0 x_0(t) \end{cases} \quad (2)$$

در معادله فوق $x_0 \in \mathbb{R}^n$ حالت عامل مرجع و C_0 , a_0 ماتریس‌های ثابت و x_0^0 شرایط اولیه سیستم را بیان می‌کنند.

فرض ۱: هدف طراحی کنترلگر بر پایه شبکه است به گونه‌ای که حالات تمامی عاملها بتوانند عامل مرجع را ردیابی کنند.

تعریف فوق را می‌توان به ازای هر شرط اولیه‌ای به صورت $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0$ بیان داشت.

در این تحقیق، عامل‌ها و عامل مرجع به صورت غیرمتمرکز در سرتاسر شبکه پراکنده هستند و کنترلگر خروجی طراحی شده بایستی ردیابی عامل مرجع را از طریق شبکه انجام دهد.

ماهیت شبکه و پراکندگی عاملها باعث القای تأخیر در سیستم می‌گردد. در ابتدا از اطلاعات هر عامل در دوره $h > 0$ نمونه برداری شده و به همراه اطلاعات نمونه‌برداری شده سایر عاملهای مجاور از طریق شبکه به کنترلگر منتقل می‌گردند. از آنجا که اطلاعات همگی عاملها در یک زمان به کنترلگر نمی‌رسند، لزوم استفاده از یک بافر قبل از کنترلگر لازم است. سیگنال‌های وارده به بافر هر یک دارای یک میزان تأخیر هستند. وظیفه خروجی بافر تعیین یک اندازه تأخیر ثابت (انتخاب مقدار بیشینه) برای خروجی هر عامل و ارسال اطلاعات به کنترلگر است. اطلاعات خروجی کنترلگر نیز از طریق شبکه به ورودی عاملها منتقل می‌شود. نکته‌ای که باید مورد توجه قرار گیرد این است که اطلاعات نمونه K ام به دست آمده از هر کنترلگر جهت انتقال به عامل مربوطه بایستی با سایر کنترلگرها در یک مقیاس زمانی باشد یا به عبارتی نتایج خروجی کنترلگر تمامی عاملها در یک زمان به هر کدام از عاملها اعمال گردد. به همین منظور بین کنترلگر هر عامل و محرکه از بافر ۲ استفاده می‌شود لحظه‌ای که اطلاعات از بافر ۲ خارج می‌گردد برابر بیشینه زمانی است که نمونه K ام از هر کدام از کنترلگرها انتقال می‌یابد. تأخیر کلی در لحظه K ام برابر $h_{ik} = h_{ik}^{sc} + h_{ik}^{ca}$ و $h_k = \max\{h_{ik}, i=1,2,\dots,N\}$ است. زمان نمونه‌برداری $t \in [kh + h_k, (k+1)h + h_{k+1}]$ تعریف می‌شود و تأخیر مصنوعی $h(t) = t - kh$ به معادله کنترلگر اعمال می‌گردد. شماتیک ارتباطی عامل‌های تحت شبکه در زیر نمایش داده شده است. قضایا و تعریف ارائه شده به منظور آنالیز پایداری در این تحقیق مورد استفاده قرار می‌گیرند.

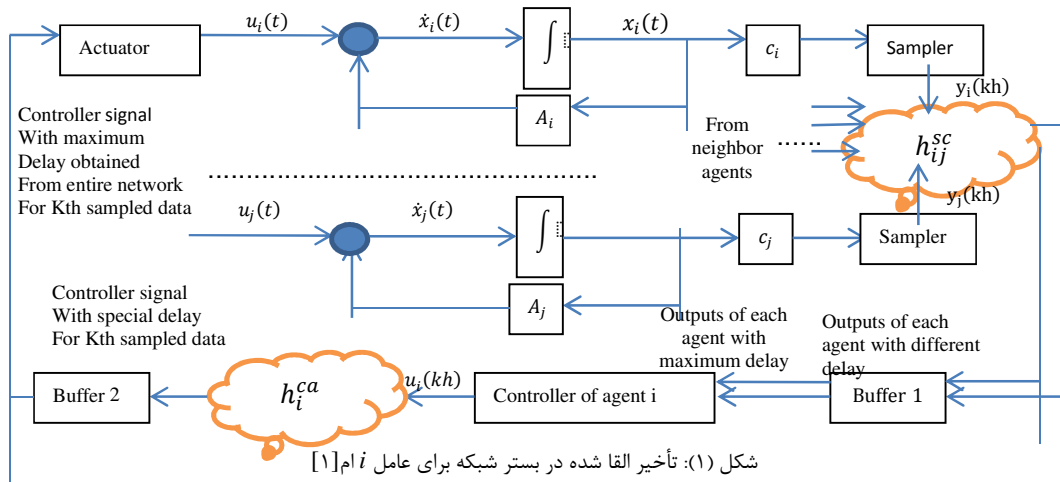


Fig. (1): Network- bases Induced delay for agent i [1]

برای سیستم حلقه بسته با تأخیرهای متغیر با زمان بازه‌ای به صورت نابرابری‌های ماتریسی خطی^۵ (LMI) معرفی می‌گردد. سپس به منظور کنترل نامعینی و اغتشاش یک روش کاربردی (تعریف ۱) برای کنترلر مقاوم در نظر گرفته می‌شود. همانطور که در فرض ۱ اشاره شد، شبکه ارتباطی در انتقال اطلاعات تأخیر القا می‌کند و بر اساس شماتیک ارتباطی توضیح داده شده دارای یک مقدار بیشینه و کمینه است.

تأخیر $h(t)$ یک تابع مشتق پذیر است و رابطه زیر را برآورده می‌سازد.

$$0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2, \dot{h}(t) \leq \mu \quad (۸)$$
 در تمامی روابط به کار برده شده $h_{12} = h_2 - h_1$ در نظر گرفته شده است.

لم ۵ (نامعادله جنسن^۶): با فرض " $0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2$ " و $x(t) \in \mathbb{R}^n, R \in \mathbb{R}^{n \times n}, R > 0$ نامعادله زیر برقرار خواهد بود.

$$-(h_2 - h_1) \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq \begin{bmatrix} x(t-h_1) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R & R \\ R & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_1) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix} \quad (۹)$$

لم ۶ (خطی سازی بازه تأخیر^۷): با فرض " $0 < A < B \leq 1/2$ " و $\alpha(t) \in [A, B]$ رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$\frac{1}{\alpha(t)} + \frac{1}{1-\alpha(t)} \geq \frac{1}{1-\alpha(t)} \left[1 - \frac{(1-B)^2}{B^2} \right] + \frac{1}{B^2} \quad (۱۰)$$

لم ۷ (فرمول نیوتن- لاینیز^۸): با فرض " $0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2$ " و $x(t) \in \mathbb{R}^n, R \in \mathbb{R}^{n \times n}, R > 0$ نامعادله زیر برای کاهش محافظه کاری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$-h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq - \left[\int_{t-h_1}^t \dot{x}(s) ds \right]^T R \left[\int_{t-h_1}^t \dot{x}(s) ds \right] \leq - [x(t) - x(t-h_1)]^T R [x(t) - x(t-h_1)] \quad (۱۱)$$

لم ۱ [۲] (نامعادله کوشی^۹): برای هر ماتریس مثبت معین متقارن $a \in \mathbb{R}^n$ و $b \in \mathbb{R}^n$ و $N \in \mathbb{M}^{n \times n}$ خواهیم داشت.

$$+a^T b \leq a^T N a + b^T N^{-1} b. \quad (۳)$$

لم ۲ [۲]: با فرض اینکه ماتریس‌های H, E ثابت باشند و ماتریس $F(t)$ نیز به صورت روبرو $F^T(t)F(t) \leq I$ برقرار باشد، در این صورت برای $\varepsilon > 0$ رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$EFH + H^T F^T E^T \leq \varepsilon E E^T + \varepsilon^{-1} H^T H. \quad (۴)$$

لم ۳ [۲] (مکمل شور^{۱۰}): با داشتن ماتریس‌های ثابت X, Y, Z و برقراری $Y = Y^T$ نامعادله زیر برقرار خواهد بود.

$$X + Z^T Y^{-1} Z < 0 \text{ if } \begin{bmatrix} X & Z^T \\ Z & -Y \end{bmatrix} < 0. \quad (۵)$$

لم ۴ [۱]: با در نظر گرفتن ماتریس‌های P, Q با ابعاد مناسب و با توجه به اینکه ماتریس Q مثبت معین و متقارن باشد، رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$(2Px, y) - (Qy, y) \leq (PQ^{-1}P^T x, x). \quad (۶)$$

تعریف ۱ [۱]: با فرض اینکه $\varsigma > 0$ باشد، کنترل H_∞ سیستم ۱ قابل تحلیل است در صورتی که یک کنترلر دینامیکی خروجی به سیستم اعمال گردد و بتواند نیازهای زیر را برآورده سازد.

i پاسخ سیستم حلقه بسته به ازای شرایطی که $w(t) = 0$ باشد، پایدار گردد.

$\dot{x}_i(t) = (A_i + \Delta A_i)x_i(t) + (B_i + \Delta B_i)u_i(t)$,
 ii به ازای شرایطی که $w(t) \neq 0$ باشد و $w(t) \in L_2([0, \infty), \mathbb{R}^r)$ در نظر گرفته شود، رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$\frac{\int_0^s \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^s \|w(t)\|^2 dt + \frac{1}{\varsigma} v(0, x_0)} \leq \varsigma, \quad (۷)$$

۳- طراحی فیدبک خروجی

در این قسمت، کنترلر فیدبک خروجی برای سیستم طراحی می‌شود. با ایجاد توابع لیاپانوف- کراسوفسکی و بهره‌گیری از لم ۲ روش پایداری

$$\begin{aligned} & \theta_1 C_i^{-1} C_i x_i(t) - \theta_1 C_i^{-1} C_o x_o(t) + \theta_1 C_i^{-1} C_o x_o(t) + \\ & \theta_2 u_i(t) + \theta_3 w_i(t) \\ & \dot{x}_i(t) - \theta_1 C_i^{-1} C_o x_o(t) \\ & = \theta_1 C_i^{-1} e_i(t) + \theta_2 u_i(t) + \theta_3 w_i(t) \\ & \text{با ضرب کردن کل رابطه فوق در } C_i, \text{ افزودن و کاستن } C_o A_o x_o(t) \\ & \text{به آن و بهره گیری از } \dot{e}_i(t) = C_i \dot{x}_i(t) - C_o \dot{x}_o(t) \text{ رابطه } \dot{e}_i(t) \\ & \text{به دست می آید.} \end{aligned} \quad (۱۶)$$

$$\begin{aligned} & C_i \dot{x}_i(t) - C_o A_o x_o(t) - C_i \theta_1 C_i^{-1} C_o x_o(t) + C_o A_o x_o(t) \\ & = C_i \theta_1 C_i^{-1} e_i(t) + C_i \theta_2 u_i(t) \\ & + C_i \theta_3 w_i(t) \\ \dot{e}_i(t) & = C_i \theta_1 C_i^{-1} e_i(t) + C_i \theta_2 u_i(t) \\ & + (C_i \theta_1 C_i^{-1} C_o - C_o A_o) x_o(t) \\ & + C_i \theta_3 w_i(t) \end{aligned}$$

با اعمال $\rho v_i(kh)$ به $\dot{v}_i(t)$ رابطه ۸ به دست می آید.

در فرض ۱ به تولید تأخیر مصنوعی با رابطه $h(t) = t - kh$ اشاره شد که در دینامیک سیستم اعمال می گردد.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) & = \mathcal{A}_1 \xi(t) + \mathcal{A}_2 \xi(t - h(t)) + \mathcal{A}_3 \theta(t) + f(\cdot), f(\cdot) = \\ & \Delta \mathcal{A}_1 \xi(t) + \Delta \mathcal{A}_2 \xi(t - h(t)) + \\ & \Delta \mathcal{A}_3 \theta(t), \end{aligned} \quad (۱۷)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 & = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{1(11)} & \mathcal{A}_{1(12)} \\ 0 & \mathcal{A}_{1(22)} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{1(11)} & = \text{diag}\{C_1 A_1 C_1^{-1}, \dots, C_i A_i C_i^{-1}\}, \mathcal{A}_{1(12)} \\ & = \text{diag}\{C_1 B_1 K_{C1}, \dots, C_i B_i K_{Ci}\}, \\ \mathcal{A}_{1(22)} & = \text{diag}\{K_{A1}, \dots, K_{Ai}\}, \\ \mathcal{A}_2 & = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{2(11)} & 0 \\ \mathcal{A}_{2(21)} & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A}_{2(11)} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 B_1 K_{D1} \\ \dots \\ H_i \otimes C_i B_i K_{Di} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{2(21)} & = \begin{bmatrix} H_1 \otimes K_{B1} \\ \dots \\ H_i \otimes K_{Bi} \end{bmatrix}, \mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{3(11)} & \mathcal{A}_{3(12)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{3(11)} & = \begin{bmatrix} (C_1 A_1 C_1^{-1} C_o - C_o A_o) \\ \dots \\ (C_i A_i C_i^{-1} C_o - C_o A_o) \end{bmatrix}, \mathcal{A}_{3(12)} \\ & = \text{diag}\{C_1 N_1, \dots, C_i N_i\}, \end{aligned}$$

هر یک از ماتریس‌های دارای نامعینی را می توان به قسمت‌های معین و نامعین تقسیم بندی نمود. به همین منظور نامعین $\Delta A = E_{A1} F(t) H_{A1}$, $\Delta B = E_{B1} F(t) H_{B1}$, $\Delta N = E_{N1} F(t) H_{N1}$ نظر گرفته می شوند. ماتریس‌های $H_{A1}, H_{B1}, H_{N1}, E_{A1}, E_{B1}, E_{N1}$ و H_{A1}, H_{B1}, H_{N1} ثابت و ماتریس $F(t)$ متغیر با زمان و رابطه $F^T(t)F(t) \leq I$ در مورد آن صادق است.

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{A}_1 & = E_1 * \text{diag}\{F(t), \dots, F(t)\} * H_1, \\ E_1 & = \begin{bmatrix} E_{1(11)} & E_{1(12)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{1(11)} = \text{diag}\{C_1 E_{A1}, \dots, C_i E_{Ai}\}, \\ E_{1(12)} & = \text{diag}\{C_1 E_{A1}, \dots, C_i E_{Ai}\}, \\ H_1 & = \begin{bmatrix} H_{1(11)} & 0 \\ 0 & H_{1(22)} \end{bmatrix}, H_{1(11)} \\ & = \text{diag}\{H_{A1} C_1^{-1}, \dots, H_{Ai} C_i^{-1}\}, \\ H_{1(22)} & = \text{diag}\{H_{A1} K_{C1}, \dots, H_{Ai} K_{Ci}\}, \\ \Delta \mathcal{A}_2 & = E_2 * \text{diag}\{F(t), \dots, F(t)\} * H_2, \\ H_B & = H_{B1} = \dots = H_{Bi}, i = 1, \dots, N, \\ K_D & = K_{D1} = \dots = K_{Di} \end{aligned}$$

کنترلر زیر به منظور ردیابی عامل مرجع به سیستم دینامیک ۱ اعمال می گردد.

$$\begin{cases} \dot{v}_i(t) = K_{Ai} v_i(t) + K_{Bi} \rho_i(kh) \\ u_i(t) = K_{Ci} v_i(t) + K_{Di} \rho_i(kh) \end{cases} \quad (۱۲)$$

$$\begin{aligned} \rho_i(kh) & = \sum_{j=1}^N w_{ij} (C_i x_i(kh) - C_j x_j(kh)) \\ & + m_i (C_i x_i(kh) - C_o x_o(kh)), \end{aligned}$$

ماتریس‌های $K_{Ai}, K_{Bi}, K_{Ci}, K_{Di}$ بهره‌های کنترلر هستند و بایستی مقادیر آنها در مراحل طراحی مشخص گردند. روابط $\dot{e}_i(t) = C_i \dot{x}_i(t) - C_o \dot{x}_o(t) = C_i \dot{x}_i(t) - C_o A_o x_o(t)$ از معادلات ۱ و ۷ سیستم با دینامیک زیر به دست می آید.

$$\begin{cases} \dot{e}_i(t) = C_i \theta_1 C_i^{-1} e_i(t) + C_i \theta_2 u_i(t) + \omega(t) \\ \dot{v}_i(t) = K_{Ai} v_i(t) + K_{Bi} \rho v_i(kh) \end{cases}$$

$$\theta_1 = A_i + \Delta A_i, \theta_2 = B_i + \Delta B_i, \theta_3 = N_i + \Delta N_i,$$

$$\rho v_i(kh) = \sum_{j=1}^N w_{ij} (e_i(kh) - e_j(kh)) + m_i (e_i(kh)),$$

$$u_i(t) = K_{Ci} v_i(t) + K_{Di} \rho v_i(kh),$$

$$\omega(t) = (C_i (A_i + \Delta A_i) C_i^{-1} C_o - C_o A_o) x_o(t) + C_i (N_i + \Delta N_i) w_i(t),$$

ماتریس $\theta^T(t) = [x_o(t) \quad w_1(t) \quad \dots \quad w_i(t)]^T$ را به عنوان اغتشاش و بردار سیستم به صورت $\xi^T(t) = [e^T(t) \quad v^T(t)]$ نظر گرفته می شوند.

اثبات:
بعد از اعمال کنترلر به سیستم اشاره شده در رابطه ۱ نتیجه زیر به دست می آید.

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \theta_1 x_i(t) + \theta_2 u_i(t) + \theta_3 w_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = K_{Ai} v_i(t) + K_{Bi} \rho v_i(kh) \end{cases}$$

$$\theta_1 = A_i + \Delta A_i, \theta_2 = B_i + \Delta B_i, \theta_3 = N_i + \Delta N_i,$$

با در نظر گرفتن سیگنال خطا به صورت $e_i(kh) = C_i x_i(kh) - C_o x_o(kh)$ سیگنال $\rho v_i(kh)$ به صورت زیر تبدیل می گردد.

$$\begin{aligned} \rho v_i(kh) & = \sum_{j=1}^N w_{ij} (C_i x_i(kh) - C_j x_j(kh)) \\ & + m_i (C_i x_i(kh) - C_o x_o(kh)), \\ \rho v_i(kh) & = \sum_{j=1}^N w_{ij} (e_i(kh) - e_j(kh)) + m_i (e_i(kh)), \end{aligned}$$

برای اینکه کل تابع برحسب سیگنال خطا نوشته شود و مسأله اجماع به مسأله پایداری تبدیل گردد، لازم است که سیگنال خطا در کل روابط ظاهر گردد. به همین منظور تغییرات زیر به دینامیک اعمال می گردد.

$$\dot{x}_i(t) = \quad (۱۵)$$

$$H_{3(11)} = \begin{bmatrix} (H_{A1}C_1^{-1}C_0) \\ \dots \\ (H_{A3}C_3^{-1}C_0) \end{bmatrix}, H_{3(22)} = \text{diag}\{H_{N1}, \dots, H_{N3}\},$$

قضیه ۱: با در اختیار داشتن مقادیر اسکالر $0 \leq h_1 < h_2, \mu \geq 0$ و مقدار صحیح $N \geq 1$ ، سیستم (۱) با تأخیر متغیر با زمان به صورت مجانبی پایدار است اگر ماتریس‌های با ابعاد مناسب $\hat{P} > 0, \hat{Q}_i > 0, \hat{Z}_j > 0, j = 1, 2, \varepsilon > 0$ در اختیار باشند به گونه‌ای که نابرابری‌های ماتریسی خطی زیر بر آورده گردند.

$$\varphi_i^1 = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \hat{A}_2 & \hat{Z}_1 & 0 & \varepsilon \hat{A}_1 & \hat{H}_1 & 0 & (I_{2N} \otimes \hat{P})C_{Z\xi}^T \\ * & \pi_{22} & \gamma_i^1 \hat{Z}_2 & \gamma_i^2 \hat{Z}_2 & \varepsilon \hat{A}_2 & 0 & \hat{H}_2 & 0 \\ * & * & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & \pi_{55} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{H}_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}I & 0 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ C_{Z\xi}(I_{2N} \otimes \hat{P}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= \hat{A}_1 + \hat{A}_1^T + \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 + \hat{Q}_3 - \hat{Z}_1 + E_1 E_1^T + E_2 E_2^T + \frac{4}{\zeta} A_3 A_3^T + \frac{4}{\zeta} \lambda_{\max}(H_3 H_3^T) * E_3 E_3^T, \pi_{22} \\ &= -(1 - \mu)\hat{Q}_3 - \gamma_i^1 \hat{Z}_2 - \gamma_i^2 \hat{Z}_2, \pi_{33} = -\gamma_i^1 \hat{Z}_2 - \hat{Q}_1 - \hat{Z}_1, \pi_{44} = -\hat{Q}_2 - \gamma_i^1 \hat{Z}_2, \pi_{55} \\ &= \varepsilon E_1 E_1^T \varepsilon + \varepsilon E_2 E_2^T \varepsilon + h_{12}^2 \hat{Z}_1 + h_{12}^2 \hat{Z}_2 - 2\varepsilon(I_{2N} \otimes \hat{P}) + \frac{4}{\zeta} \varepsilon^2 A_3 A_3^T + \varepsilon^2 * \frac{4}{\zeta} \lambda_{\max}(H_3 H_3^T) * E_3 E_3^T, i \\ &= 0, 1 \dots N - 1 \end{aligned}$$

$$\varphi_i^2 = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \hat{A}_2 & \hat{Z}_1 & 0 & \varepsilon \hat{A}_1 & \hat{H}_1 & 0 & (I_{2N} \otimes \hat{P})C_{Z\xi}^T \\ * & \pi_{22} & \gamma_i^1 \hat{Z}_2 & \gamma_i^2 \hat{Z}_2 & \varepsilon \hat{A}_2 & 0 & \hat{H}_2 & 0 \\ * & * & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & \pi_{55} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{H}_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}I & 0 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ C_{Z\xi}(I_{2N} \otimes \hat{P}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= \hat{A}_1 + \hat{A}_1^T + \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 + \hat{Q}_3 - \hat{Z}_1 + E_1 E_1^T + E_2 E_2^T + \frac{4}{\zeta} A_3 A_3^T + \frac{4}{\zeta} \lambda_{\max}(H_3 H_3^T) * E_3 E_3^T, \pi_{22} \\ &= -(1 - \mu)\hat{Q}_3 - \gamma_i^1 \hat{Z}_2 - \gamma_i^2 \hat{Z}_2, \pi_{33} = -\gamma_i^1 \hat{Z}_2 - \hat{Q}_1 - \hat{Z}_1, \pi_{44} = -\hat{Q}_2 - \gamma_i^1 \hat{Z}_2, \pi_{55} \\ &= \varepsilon E_1 E_1^T \varepsilon + \varepsilon E_2 E_2^T \varepsilon + h_{12}^2 \hat{Z}_1 + h_{12}^2 \hat{Z}_2 - 2\varepsilon(I_{2N} \otimes \hat{P}) + \frac{4}{\zeta} \varepsilon^2 A_3 A_3^T + \varepsilon^2 * \frac{4}{\zeta} \lambda_{\max}(H_3 H_3^T) * E_3 E_3^T, i \\ &= 0, 1 \dots N - 1, \gamma_i^1 = \left(\frac{2N}{i+1}\right)^2 - \frac{2N}{2N-i} \times \left(\frac{2N-i-1}{i+1}\right)^2, \gamma_i^2 = \frac{2N}{2N-i} \end{aligned}$$

$$v_1 = \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\xi(t) \quad (20)$$

$$v_2 = \int_{t-h_1}^t \xi^T(s)Q_1\xi(s)ds$$

اثبات:

در تحلیل پایداری از توابع لیپانوف با در نظر گرفتن شرط تأخیر بازه‌ای استفاده می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 & 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)f(\cdot) \\
 & = \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)E_1E_1^T(I_{2N} \otimes P)\xi(t) \\
 & + \xi^T(t)H_1^TH_1\xi(t) \\
 & + \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)E_2E_2^T(I_{2N} \otimes P)\xi(t) \\
 & + \xi^T(t-h(t))H_2^TH_2\xi(t-h(t)) \\
 & + \frac{4}{\varsigma}\lambda_{\max}(H_3H_3^T)\xi^T(t)(I_{2N} \\
 & \otimes P)E_3E_3^T(I_{2N} \otimes P)\xi(t) + \frac{\varsigma}{4}\theta^T(t) \\
 & * \theta(t),
 \end{aligned}$$

از روی روابط فوق مقدار نهایی \dot{v}_1 مشخص می‌گردد.
(۲۷)

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 & = \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\xi(t) + \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\dot{\xi}(t) \\
 & = \left(\xi^T(t)\mathcal{A}_1^T + \xi^T(t-h(t))\mathcal{A}_2^T \right. \\
 & \quad \left. + \theta^T(t)\mathcal{A}_3^T + f^T(\cdot) \right) (I_{2N} \otimes P)\xi(t) \\
 & \quad + \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)(\mathcal{A}_1\xi(t) \\
 & \quad + \mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) + \mathcal{A}_3\theta(t) + f(\cdot)) \\
 \dot{v}_1 & = 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\mathcal{A}_1\xi(t) \\
 & + 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) \\
 & + 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\mathcal{A}_3\theta(t) \\
 & + \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)E_1E_1^T(I_{2N} \otimes P)\xi(t) \\
 & + \xi^T(t)H_1^TH_1\xi(t) \\
 & + \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)E_2E_2^T(I_{2N} \otimes P)\xi(t) \\
 & + \xi^T(t-h(t))H_2^TH_2\xi(t-h(t)) \\
 & + \frac{4}{\varsigma}\lambda_{\max}(H_3H_3^T)\xi^T(t)(I_{2N} \\
 & \otimes P)E_3E_3^T(I_{2N} \otimes P)\xi(t) + \frac{\varsigma}{4}\theta^T(t) \\
 & * \theta(t),
 \end{aligned}$$

مشتق \dot{v}_2, \dot{v}_3 به صورت زیر خواهند بود.
(۲۸)

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_2 & = \xi^T(t)(Q_1 + Q_2 + Q_3)\xi(t) - \xi^T(t-h_1)Q_1\xi(t-h_1) \\
 & \quad - \xi^T(t-h_2)Q_2\xi(t-h_2) \\
 & \quad - (1-\mu)\xi^T(t-h(t))Q_3\xi(t-h(t)), \\
 \dot{v}_3 & = h_1 \int_{-h_1}^0 \left(\dot{\xi}^T(t)Z_1\xi(t) - \dot{\xi}^T(t+\theta)Z_1\xi(t+\theta) \right) d\theta + \\
 & h_{12} \int_{-h_2}^{-h_1} \left(\dot{\xi}^T(t)Z_2\xi(t) - \dot{\xi}^T(t+\theta)Z_2\xi(t+\theta) \right) d\theta = \\
 & h_1^2 \dot{\xi}^T(t)Z_1\xi(t) - h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{\xi}^T(s)Z_1\xi(s)ds + h_{12}^2 \dot{\xi}^T(t)Z_2\xi(t) - \\
 & h_{12} \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{\xi}^T(s)Z_2\xi(s)ds, \quad (۲۹)
 \end{aligned}$$

از لم ۵ و فرمول نیوتن - لایبِنیز که در لم ۷ به آن اشاره گردیده است در تعیین نتایج توابع انتگرالی زیر استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned}
 & -h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{\xi}^T(s)Z_1\xi(s)ds \\
 & \leq -(\xi(t) - \xi(t-h_1))^T Z_1 (\xi(t) \\
 & - \xi(t-h_1)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t-h_2}^t \dot{\xi}^T(s)Q_2\xi(s)ds + \\
 & \int_{t-h(t)}^t \dot{\xi}^T(s)Q_3\xi(s)ds \quad (۲۱)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_3 & = \\
 & h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\xi}^T(s)Z_1\xi(s)dsd\theta + \\
 & h_{12} \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \dot{\xi}^T(s)Z_2\xi(s)dsd\theta \quad (۲۲)
 \end{aligned}$$

به منظور تضمین پایداری مجانبی از یک معادله دارای ماتریس وزنی به گونه‌ای که معادله نتیجه صفر داشته باشد در کنار توابع لیاپانوف اعمال شده استفاده می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 & -2\xi^T(t)S_1 \left(\dot{\xi}(t) - \mathcal{A}_1\xi(t) - \mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) - \mathcal{A}_3\theta(t) \right. \\
 & \quad \left. - f(\cdot) \right) = 0, \quad (۲۳)
 \end{aligned}$$

$f(\cdot) = \Delta\mathcal{A}_1\xi(t) + \Delta\mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) + \Delta\mathcal{A}_3\theta(t)$,
به منظور تعیین نابرابری‌های ماتریسی خطی از توابع لیاپانوف مشتق گیری به عمل می‌آید.
(۲۴)

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_1 & = \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\xi(t) + \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\dot{\xi}(t) \\
 & = \left(\xi^T(t)\mathcal{A}_1^T + \xi^T(t-h(t))\mathcal{A}_2^T \right. \\
 & \quad \left. + \theta^T(t)\mathcal{A}_3^T + f^T(\cdot) \right) (I_{2N} \otimes P)\xi(t) \\
 & \quad + \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)(\mathcal{A}_1\xi(t) \\
 & \quad + \mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) + \mathcal{A}_3\theta(t) + f(\cdot)) \\
 & = 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\mathcal{A}_1\xi(t) \\
 & \quad + 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) \\
 & \quad + 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\mathcal{A}_3\theta(t) \\
 & \quad + 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)f(\cdot),
 \end{aligned}$$

به منظور تعیین $2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)f(\cdot)$ می‌توان از نامعادله زیر بهره گرفت.

$$\begin{aligned}
 & 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)f(\cdot) \\
 & = 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)(\Delta\mathcal{A}_1\xi(t) \\
 & \quad + \Delta\mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) + \Delta\mathcal{A}_3\theta(t)),
 \end{aligned}$$

در روابط بایستی به گونه‌ای عمل کرد که پارامتر $\theta(t)$ به صورت مستقل ظاهر شود. بنابراین می‌توان از لم ۴ بهره گرفت و رابطه زیر را تعریف نمود.

$$\left(\sqrt{\frac{4}{\varsigma}} \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\Delta\mathcal{A}_3 - \sqrt{\frac{\varsigma}{4}} \theta(t) \right)^2 \geq 0, \quad (۲۵)$$

$$\left(\sqrt{\frac{4}{\varsigma}} \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\Delta\mathcal{A}_3 - \sqrt{\frac{\varsigma}{4}} \theta(t) \right)^2 \geq 0,$$

$$\begin{aligned}
 & 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\Delta\mathcal{A}_3\theta(t) \\
 & \leq \frac{4}{\varsigma}\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\Delta\mathcal{A}_3(\Delta\mathcal{A}_3)^T(I_{2N} \otimes P)\xi(t) + \frac{\varsigma}{4}\theta^T(t) \\
 & \quad (۲۶)
 \end{aligned}$$

در رابطه فوق ضرایب غیرخطی $\frac{h_{12}}{h(t)-h_1}$ و $\frac{h_{12}}{h_2-h(t)}$ ظاهر شده‌اند. از لم ۶ به منظور خطی‌سازی این ضرایب استفاده می‌شود. اثبات این مسأله در تحقیق [۳] آورده شده است و از ارائه آن در این قسمت صرفنظر می‌شود. رابطه اتحاد بر اساس ماتریس وزنی و با فرض $S_1 = \varepsilon(I_{2N} \otimes P)$ در ادامه آورده شده است. تابع نهایی مشتق لیپانوف از مجموع $\dot{v} = \dot{v}_1 + \dot{v}_2 + \dot{v}_3$ و رابطه اتحاد ذکر شده به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{v} \leq & \xi^T(t)(Q_1 + Q_2 + Q_3 - Z_1 + 2(I_{2N} \otimes P)\mathcal{A}_1 + (I_{2N} \otimes P)E_1E_1^T(I_{2N} \otimes P) + H_1^TH_1 + (I_{2N} \otimes P)E_2E_2^T(I_{2N} \otimes P) + \frac{4}{\zeta}\lambda_{\max}(H_3H_3^T)(I_{2N} \otimes P)E_3E_3^T(I_{2N} \otimes P))\xi(t) + 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) + \\ & 2\xi^T(t)Z_1\xi(t-h_1) + 2\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)\mathcal{A}_3\theta(t) - \xi^T(t-h(t))((1-\mu)Q_3 + \frac{h(t)-h_1}{h_2-h_1}Z_2 + \frac{h_2-h(t)}{h_2-h_1}Z_2 + \\ & H_2^TH_2)\xi(t-h(t)) + 2\xi^T(t-h(t))(\frac{h_2-h(t)}{h_2-h_1}Z_2)\xi(t-h_2) - \xi^T(t-h_1)(Q_1 + Z_1 + \frac{h(t)-h_1}{h_2-h_1}Z_2)\xi(t-h_1) - \\ & \xi^T(t-h_2)(Q_2 + \frac{h_2-h(t)}{h_2-h_1}Z_2)\xi(t-h_2) + \xi^T(t)(h_1^2Z_1 + h_{12}^2Z_2)\xi(t) + \frac{\zeta}{4}\|\theta(t)\|^2 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} -2\xi^T(t)S_1(\xi(t) - \mathcal{A}_1\xi(t) - \mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) - \mathcal{A}_3\theta(t) - f(\cdot)) = & -2\xi^T(t)S_1\xi(t) + 2\xi^T(t)S_1\mathcal{A}_1\xi(t) + 2\xi^T(t)S_1\mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) + \\ & 2\xi^T(t)S_1\mathcal{A}_3\theta(t) + 2\xi^T(t)S_1f(\cdot) = -2\xi^T(t)S_1\xi(t) + 2\xi^T(t)S_1\mathcal{A}_1\xi(t) + 2\xi^T(t)S_1\mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) + \\ & 2\xi^T(t)S_1\mathcal{A}_3\theta(t) + \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)E_1E_1^T(I_{2N} \otimes P)\xi(t) + \xi^T(t)H_1^TH_1\xi(t) + \xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)E_2E_2^T(I_{2N} \otimes P)\xi(t) + \\ & \xi^T(t-h(t))H_2^TH_2\xi(t-h(t)) + \frac{4}{\zeta}\lambda_{\max}(H_3H_3^T)\xi^T(t)(I_{2N} \otimes P)E_3E_3^T(I_{2N} \otimes P)\xi(t) + \frac{\zeta}{4}\|\theta(t)\|^2, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{A}}_{2(11)} & 0 \\ \hat{\mathcal{A}}_{2(21)} & 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathcal{A}}_{2(11)} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1B_1\hat{R}_{D1} \\ \dots \\ H_i \otimes C_iB_i\hat{R}_{Di} \end{bmatrix}, \hat{\mathcal{A}}_{2(21)} \\ = \begin{bmatrix} H_1 \otimes \hat{R}_{B1} \\ \dots \\ H_i \otimes \hat{R}_{Bi} \end{bmatrix}, \hat{R}_{D1} = K_{D1}\hat{P}, \dots, \hat{R}_{Dn} \\ = K_{Dn}\hat{P}, \hat{R}_{B1} = K_{B1}\hat{P}, \dots, \hat{R}_{Bn} = K_{Bn}\hat{P}, \end{aligned}$$

همانگونه که در مورد $\Delta\mathcal{A}_2$ توضیح داده شد، به منظور تجزیه شدن ماتریس مذکور و تبدیل آن به فرم $E_2F_2(t)H_2$ لازم است که $K_D = K_{D1} = \dots = K_{Dn}$ در نظر گرفته شوند.

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 = \begin{bmatrix} \hat{H}_{1(11)} & 0 \\ 0 & \hat{H}_{1(22)} \end{bmatrix}, \hat{H}_{1(11)} \\ = \text{diag}\{H_{A1}C_1^{-1}\hat{P}, \dots, H_{Ai}C_i^{-1}\hat{P}\}, \hat{H}_{1(22)} \\ = \text{diag}\{H_{A1}\hat{R}_{C1}, \dots, H_{Ai}\hat{R}_{Ci}\}, \hat{R}_{C1} \\ = K_{C1}\hat{P}, \dots, \hat{R}_{Cn} = K_{Cn}\hat{P}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 = \begin{bmatrix} \hat{H}_{2(11)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{H}_{2(11)} = I_N \otimes H_B\hat{R}_D, \hat{R}_D = K_D\hat{P}, \end{aligned}$$

نابرابری‌های ماتریسی خطی و روابط لیپانوف بر اساس بردار تعیین می‌گردند.

$$\begin{aligned} \psi^T(t) = & [\xi^T(t) \quad \xi^T(t-h(t)) \\ & \xi^T(t-h_1) \quad \xi^T(t-h_2) \quad \xi^T(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -h_{12} \int_{t-h_2}^{t-h_1} \xi^T(s)Z_2\xi(s)ds \\ \leq -\frac{h_{12}}{h_2-h(t)}(\xi(t-h(t)) \\ - \xi(t-h_2))^T Z_2(\xi(t-h(t)) \\ - \xi(t-h_2)) \\ - \frac{h_{12}}{h(t)-h_1}(\xi(t-h_1) \\ - \xi(t-h(t)))^T Z_2(\xi(t-h_1) \\ - \xi(t-h(t))), \end{aligned}$$

تابع $\xi^T(t) = \tilde{\xi}^T(t)(I_{2N} \otimes \hat{P})$ در نظر گرفته شده و به مشتق روابط لیپانوف اعمال می‌گردد. با تعیین نابرابری‌های ماتریسی خطی و تحلیل آن بهره‌های کنترلر به منظور ردیابی عامل مرجع مشخص می‌گردند. با اعمال تابع مذکور ماتریس‌های متغیر روابط لیپانوف به صورت زیر تغییر خواهند کرد.

$$\begin{aligned} \hat{P} = P^{-1} > 0, \hat{Q}_i = (I_{2N} \otimes \hat{P})Q_i(I_{2N} \otimes \hat{P}) \\ > 0 \quad (i = 1, 2, 3), \hat{Z}_j \\ = (I_{2N} \otimes \hat{P})Z_j(I_{2N} \otimes \hat{P}) \\ > 0 \quad (j = 1, 2), \hat{S}_1 = \varepsilon(I_{2N} \otimes \hat{P}), i \\ = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

در نتیجه اعمال تغییرات فوق، ماتریس‌های دینامیک سیستم نیز متأثر از تابع اعمال شده خواهند بود.

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{A}}_{1(11)} & \hat{\mathcal{A}}_{1(12)} \\ 0 & \hat{\mathcal{A}}_{1(22)} \end{bmatrix}, \hat{\mathcal{A}}_{1(11)} \\ = \text{diag}\{C_1A_1C_1^{-1}\hat{P}, \dots, C_iA_iC_i^{-1}\hat{P}\}, \hat{\mathcal{A}}_{1(12)} \\ = \text{diag}\{C_1B_1\hat{R}_{C1}, \dots, C_iB_i\hat{R}_{Ci}\}, \hat{\mathcal{A}}_{1(22)} \\ = \text{diag}\{\hat{R}_{A1}, \dots, \hat{R}_{Ai}\}, \hat{R}_{C1} = K_{C1}\hat{P}, \dots, \hat{R}_{Cn} \\ = K_{Cn}\hat{P}, \hat{R}_{A1} = K_{A1}\hat{P}, \dots, \hat{R}_{An} = K_{An}\hat{P}, \end{aligned}$$

$$\varphi_i^1 = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \widehat{A}_2 & \widehat{Z}_1 & 0 & \varepsilon \widehat{A}_1 & \widehat{H}_1 & 0 \\ * & \pi_{22} & \gamma_1^1 \widehat{Z}_2 & \gamma_1^2 \widehat{Z}_2 & \varepsilon \widehat{A}_2 & 0 & \widehat{H}_2 \\ * & * & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & \pi_{55} & 0 & 0 \\ \widehat{H}_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ 0 & \widehat{H}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= \widehat{A}_1 + \widehat{A}_1^T + \widehat{Q}_1 + \widehat{Q}_2 + \widehat{Q}_3 - \widehat{Z}_1 + E_1 E_1^T + E_2 E_2^T + \frac{4}{\varsigma} A_3 A_3^T + \frac{4}{\varsigma} \lambda_{\max}(H_3 H_3^T) * E_3 E_3^T, \pi_{22} \\ &= -(1 - \mu) \widehat{Q}_3 - \gamma_1^1 \widehat{Z}_2 - \gamma_1^2 \widehat{Z}_2, \pi_{33} = -\gamma_1^1 \widehat{Z}_2 - \widehat{Q}_1 - \widehat{Z}_1, \pi_{44} = -\widehat{Q}_2 - \gamma_1^1 \widehat{Z}_2, \pi_{55} \\ &= \varepsilon E_1 E_1^T \varepsilon + \varepsilon E_2 E_2^T \varepsilon + h_1^2 \widehat{Z}_1 + h_{12}^2 \widehat{Z}_2 - 2\varepsilon(I_{2N} \otimes \widehat{P}) + \frac{4}{\varsigma} \varepsilon^2 A_3 A_3^T + \varepsilon^2 * \frac{4}{\varsigma} \lambda_{\max}(H_3 H_3^T) * E_3 E_3^T, i \\ &= 0, 1 \dots N - 1 \end{aligned}$$

$$\varphi_i^2 = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \widehat{A}_2 & \widehat{Z}_1 & 0 & \varepsilon \widehat{A}_1 & \widehat{H}_1 & 0 \\ * & \pi_{22} & \gamma_1^2 \widehat{Z}_2 & \gamma_1^1 \widehat{Z}_2 & \varepsilon \widehat{A}_2 & 0 & \widehat{H}_2 \\ * & * & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & \pi_{55} & 0 & 0 \\ \widehat{H}_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ 0 & \widehat{H}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= \widehat{A}_1 + \widehat{A}_1^T + \widehat{Q}_1 + \widehat{Q}_2 + \widehat{Q}_3 - \widehat{Z}_1 + E_1 E_1^T + E_2 E_2^T + \frac{4}{\varsigma} A_3 A_3^T + \frac{4}{\varsigma} \lambda_{\max}(H_3 H_3^T) * E_3 E_3^T, \pi_{22} \\ &= -(1 - \mu) \widehat{Q}_3 - \gamma_1^2 \widehat{Z}_2 - \gamma_1^1 \widehat{Z}_2, \pi_{33} = -\gamma_1^2 \widehat{Z}_2 - \widehat{Q}_1 - \widehat{Z}_1, \pi_{44} = -\widehat{Q}_2 - \gamma_1^1 \widehat{Z}_2, \pi_{55} \\ &= \varepsilon E_1 E_1^T \varepsilon + \varepsilon E_2 E_2^T \varepsilon + h_1^2 \widehat{Z}_1 + h_{12}^2 \widehat{Z}_2 - 2\varepsilon(I_{2N} \otimes \widehat{P}) + \frac{4}{\varsigma} \varepsilon^2 A_3 A_3^T + \varepsilon^2 * \frac{4}{\varsigma} \lambda_{\max}(H_3 H_3^T) * E_3 E_3^T, i \\ &= 0, 1 \dots N - 1, \quad \gamma_1^1 = \left(\frac{2N}{i+1}\right)^2 - \frac{2N}{2N-i} \times \left(\frac{2N-i-1}{i+1}\right)^2, \gamma_1^2 = \frac{2N}{2N-i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= \begin{bmatrix} E_{3(11)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} H_{3(11)} \\ 0 \end{bmatrix}, E_{3(11)} \\ &= \text{diag}\{C_1 E_{A1}, \dots, C_i E_{Ai}\}, H_{3(11)} \\ &= \begin{bmatrix} (H_{A1} C_1^{-1} C_0) \\ \dots \\ (H_{Ai} C_i^{-1} C_0) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

روابط لیاپانوف بر اساس مقادیر ماتریس ذکر شده و بردار $x_0(t)$ به دست خواهد آمد.

$$\dot{v} \leq \Psi^T(t) \varphi \Psi(t) + \varsigma \|x_0(t)\|^2, \varphi(\varphi_i^1 \& \varphi_i^2) < 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (35)$$

در این حالت نیز معادلات ۳۲ و ۳۳ صادق هستند. و ماتریس‌های دینامیک ذکر شده متفاوت از روش قبل خواهند بود.

به منظور تکمیل اثبات قضیه ۱، از شرط مقاوم سازی در این تحقیق استفاده می‌شود. به همین دلیل از روابطی که در زیر توصیف می‌گردند، استفاده می‌شود [۹].

$$\int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \varsigma \|\theta(t)\|^2] dt = \int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \varsigma \|\theta(t)\|^2 + \dot{v}(t, x_t)] dt - \int_0^s \dot{v}(t, x_t) dt \quad \forall s \geq 0, \quad (36)$$

$$- \int_0^s \dot{v}(t, x_t) dt = -v(s, x_s) + v(0, x_0), \quad (37)$$

تابع مشتق لیاپانوف بر اساس معادلات قبلی به صورت زیر قابل توصیف است.

$$\dot{v} \leq \Psi^T(t) \varphi \Psi(t) + \varsigma \|\theta(t)\|^2, \varphi(\varphi_i^1 \& \varphi_i^2) < 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (34)$$

روابط فوق بدون در نظر گرفتن خروجی مشاهده شده، به دست آمده‌اند. در صورتی که اغتشاشات اعمال شده به سیستم صفر باشند $W(t) = 0$ در این صورت ماتریس‌های $\Delta \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3$ متفاوت از روش قبل به دست می‌آیند. و همچنین بردار اغتشاشات برابر $x_0(t)$ خواهد بود. ماتریس‌های دینامیک سیستم به صورت زیر ارائه می‌شود.

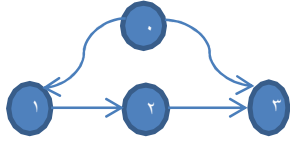
$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{31} \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta \mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} \Delta \mathcal{A}_{31} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A}_{31} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 A_1 C_1^{-1} C_0 - C_0 A_0 \\ \dots \\ C_n A_n C_n^{-1} C_0 - C_0 A_0 \end{bmatrix}, \Delta \mathcal{A}_3 \\ &= E_3 F(t) H_3, \end{aligned}$$

برای تمامی ماتریس‌های $\theta(t) \in L_2([0, \infty], R^2)$ و مقادیر اولیه عامل‌ها روابط ذکر شده صادق می‌باشند. ارائه موارد فوق اثبات قضیه ۱ را تکمیل می‌کند.

توضیحات: در تحقیق [۹]، از ماتریس‌های وزنی آزاد به منظور انعطاف پذیری پاسخ ماتریس LMI استفاده شده است. افزایش ماتریس‌های آزاد و نامعین آنالیز سیستم را پیچیده می‌سازد و به محاسبات بیشتری برای دستیابی به نتیجه نیاز دارد. در تحقیق ارائه شده، از یک ماتریس آزاد استفاده شده است و با استفاده از روش مقاوم سازی و همچنین خطی سازی ضرایب غیرخطی از آنالیز با پیچیدگی کمتر برای دستیابی به نتیجه مطلوب بهره گرفته است. علاوه بر آن در روش خطی سازی هر چقدر که بازه تأخیر به فواصل کوچکتری تقسیم گردد، سیستم در برابر بیشینه تأخیر بزرگتر پایدار خواهد بود.

۴- شبیه سازی

در این قسمت، دو مثال عددی از [۹] و [۱] برای اثبات اعتبار کنترلر ردیابی عامل مرجع و بهره گیری از کنترلر H_∞ آورده شده است. مثال ۱: سیستم (۱) که شامل (۳) عامل و یک عامل مرجع است، در نظر گرفته می‌شود. ارتباط میان عامل‌ها و عامل مرجع به صورت گراف مستقیم است و در شکل (۲) نمایش داده شده است.



شکل (۲): گراف ارتباطی میان عامل‌های غیرمترکز [۱]
Fig. (2): Decentralized agents graph [1]

از آنجا که عامل‌ها به صورت ناهماهنگ هستند، هر کدام با دینامیک متفاوتی توصیف می‌گردند. از ماتریس H برای تعریف گراف ارتباطی مستقیم استفاده شده است.

دینامیک عامل‌ها به صورت چند ورودی-چند خروجی (MIMO)^۸ است و ماتریس‌های نامعینی و اغتشاش به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند [۹] و [۱۴].

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.3 & 0.3 \\ -0.5 & 0.1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ -0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.01 \\ 0.02 & -0.03 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1.6 & -1.5 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0.2 & -1.4 \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1.049 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1.049 \end{bmatrix},$$

سیگنال‌های $F(t)$ و $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ نیز به عنوان سیگنال‌های نامعینی و اغتشاش به صورت زیر اعمال شده‌اند [۱۵]، [۱۶] و [۱۰].

با توجه به مثبت بودن تابع لیاپانوف رابطه $-v(s, x_s) + v(0, x_0) \leq v(0, x_0)$ نتیجه گیری خواهد شد.

$$\int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \varsigma \|\theta(t)\|^2] dt = \int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \varsigma \|\theta(t)\|^2 + \dot{v}(t, x_t)] dt + v(0, x_0), \quad (38)$$

$$\int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \varsigma \|\theta(t)\|^2] dt \leq v(0, x_0), \dot{v}(t, x_t) \leq 0, \quad (39)$$

$$\|Z(t)\|^2 = \xi^T(t) C_{Z\xi}^T C_{Z\xi} \xi(t) = \bar{\xi}^T(t) (I_{2N} \otimes \bar{P}) C_{Z\xi}^T C_{Z\xi} (I_{2N} \otimes \bar{P}) \bar{\xi}(t), \quad (40)$$

برای مقاوم‌سازی سیستم بایستی خروجی مشاهده شده را در اختیار داشته باشیم. با توجه به اینکه هدف ردیابی عامل مرجع است برای خروجی سیستم از دینامیکی استفاده می‌گردد به گونه‌ای که عامل‌های مجاور بتوانند از یکدیگر اطلاعات دریافت نمایند. ماتریس C_z به عنوان ماتریس اختیاری (با شرط تضمین پایداری عامل‌ها) انتخاب می‌گردد و در اجماع بهینه عامل‌ها مؤثر است.

$$Z_i(t) = \sum_{j=1}^n w_{ij} (\alpha_i x_i(t) - \alpha_j x_j(t)) + m_i (\alpha_i x_i(t) - \alpha_0 x_0(t)), \alpha_i = C_z C_i, \alpha_j = C_z C_j, \alpha_0 = C_z C_0 \quad (41)$$

$$Z_i(t) = C_z (\sum_{j=1}^n w_{ij} (C_i x_i(t) - C_j x_j(t)) + m_i (C_i x_i(t) - C_0 x_0(t))), \quad (42)$$

$$e_i(t) = C_i x_i(t) - C_0 x_0(t), \quad (43)$$

$$Z_i(t) = C_z (\sum_{j=1}^n w_{ij} (e_j(t) - e_i(t)) + m_i e_i(t)), \quad (44)$$

$$Z(t) = (H \otimes C_z) e(t) = [H \otimes C_z \quad 0] \xi(t) = C_{Z\xi} \xi(t), \quad (45)$$

از آنجا که $\varphi < 0$ است، می‌توان رابطه ۳۵ را به صورت زیر نوشت.

$$\dot{v} \leq \varsigma \|\theta(t)\|^2, \varphi(\varphi_1^2 \& \varphi_2^2) < 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (46)$$

با توجه به تابع $Z(t)$ و برقرار بودن معادله ۴۰ لازم است که تابع $\|Z(t)\|^2$ در مشتق روابط لیاپانوف به گونه‌ای ظاهر شود که نتایج زیر حاصل شود.

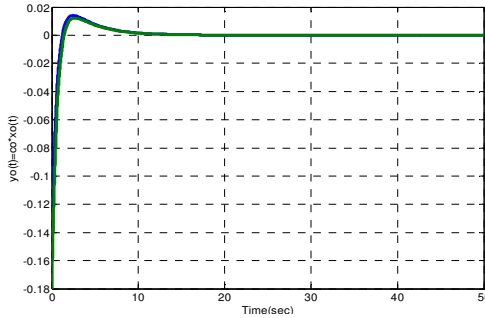
$$\int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \varsigma \|\theta(t)\|^2] dt = \int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \varsigma \|\theta(t)\|^2 + \dot{v}(t, x_t)] dt + v(0, x_0) \leq \int_0^s [\bar{\xi}^T(t) (I_{2N} \otimes \bar{P}) C_{Z\xi}^T C_{Z\xi} (I_{2N} \otimes \bar{P}) \bar{\xi}(t) - \varsigma \|\theta(t)\|^2 + \varsigma \|\theta(t)\|^2 - \bar{\xi}^T(t) (I_{2N} \otimes \bar{P}) C_{Z\xi}^T C_{Z\xi} (I_{2N} \otimes \bar{P}) \bar{\xi}(t)] dt + v(0, x_0),$$

$$\int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \varsigma \|\theta(t)\|^2] dt \leq v(0, x_0), \int_0^s \|Z(t)\|^2 dt \leq$$

$$\int_0^s \varsigma \|\theta(t)\|^2 dt + v(0, x_0) = \varsigma \left(\int_0^s \|\theta(t)\|^2 dt + \frac{1}{\varsigma} v(0, x_0) \right), \quad (47)$$

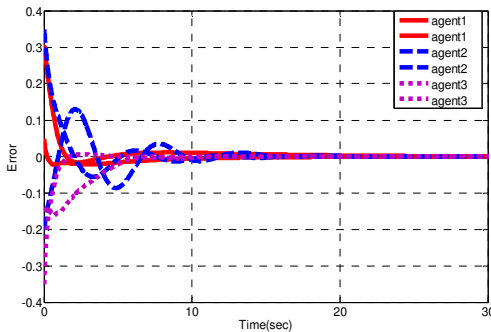
$$\frac{\int_0^s \|Z(t)\|^2 dt}{\int_0^s \|\theta(t)\|^2 dt + \frac{1}{\varsigma} v(0, x_0)} \leq \varsigma, \quad (48)$$

رابطه $\bar{\xi}^T(t) (I_{2N} \otimes \bar{P}) C_{Z\xi}^T C_{Z\xi} (I_{2N} \otimes \bar{P}) \bar{\xi}(t)$ در نتایج نابرابری‌های ماتریسی خطی ۳۲ و ۳۳ بر اساس لم ۳، اعمال می‌گردد.

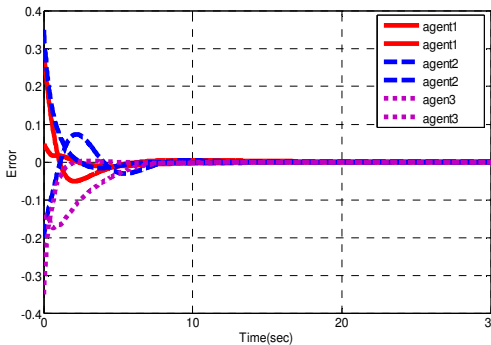


شکل (۳): سیگنال خروجی عامل مرجع
Fig. (3): Leader agent output signal

شکل (۴) پاسخ مقاوم خطای خروجی عاملها و حالات کنترلر را به منظور ردیابی عامل مرجع را نمایش می‌دهد.



شکل (۴): پاسخ مقاوم ردیابی عامل مرجع در حضور نامعینی و اغتشاش
Fig. (4): Robust tracking in the presence of uncertainty and disturbances



شکل (۵): پاسخ مقاوم ردیابی عامل مرجع بدون حضور اغتشاش
Fig. (5): Robust tracking without disturbance

شکل (۵) پاسخ مقاوم خطای خروجی عاملها و حالات کنترلر را در شرایط حضور نامعینی و بدون حضور اغتشاش نمایش می‌دهد. تمامی پارامترها و ماتریس‌های اعمال شده به منظور تعیین پاسخ ردیابی در هر دو روش یکسان در نظر گرفته شده‌اند. مقایسه نتایج با نتایج کارهای قبلی کارایی و مؤثر بودن روش ارائه شده در قضیه ۱ را ملموس‌تر می‌سازد.

مثال ۲: در این مثال نتایج خطا، خروجی، حالات عاملها و همچنین ورودی کنترلر در تحقیق ارائه شده با تحقیقات مرجع با یکدیگر مورد

$$F(t) = \frac{1}{0.02 + 0.05t} \sin\left(\frac{t}{10}\right),$$

$$W_1(t) = \begin{bmatrix} 0.2 * \sin(t) \\ \frac{1}{5+t} \end{bmatrix}, w_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3+7t \\ 1 \\ 1+2t \end{bmatrix}, w_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+2t} \end{bmatrix},$$

$$E_{a1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_{a2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, E_{a3} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$E_{b1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_{b2} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, E_{b3} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$E_{n1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, E_{n2} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_{n3} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$H_{a1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, H_{a2} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, H_{a3} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$H_b = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.6 & -0.1 \end{bmatrix}, H_{n1} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$H_{n2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, H_{n3} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$n_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, n_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, n_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ -0.5 & 0.3 \end{bmatrix},$$

نتایج قضیه ۱، با استفاده از افزونه Yalmip که به سادگی در محیط Matlab قابل اجرا است با تعیین پارامترهای $\mu = 1, \varepsilon = 1, h_1 = 0.1, h_2 = 1$ می‌گردند.

$$K_{A1} = \begin{bmatrix} -0.7086 & 0.0715 \\ 0.0732 & -0.6774 \end{bmatrix},$$

$$K_{A2} = \begin{bmatrix} -0.7092 & 0.0724 \\ 0.0739 & -0.6780 \end{bmatrix},$$

$$K_{A3} = \begin{bmatrix} -0.7074 & 0.0732 \\ 0.0735 & -0.6785 \end{bmatrix}, K_{B1} = \begin{bmatrix} -0.1407 \times 10^{-4} & -0.2342 \times 10^{-4} \\ 0.1533 \times 10^{-4} & 0.5446 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$

$$K_{B2} = \begin{bmatrix} 0.6840 \times 10^{-4} & 0.0841 \times 10^{-4} \\ -0.3598 \times 10^{-4} & -0.1722 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, K_{B3} = \begin{bmatrix} 0.1961 \times 10^{-3} & 0.0395 \times 10^{-3} \\ -0.0703 \times 10^{-3} & -0.0101 \times 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$K_{C1} = \begin{bmatrix} -0.3530 \times 10^{-4} & -0.0715 \times 10^{-4} \\ 0.0564 \times 10^{-4} & -0.1246 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, K_{C2} = \begin{bmatrix} 0.2897 \times 10^{-4} & 0.8261 \times 10^{-4} \\ 0.6075 \times 10^{-4} & 0.1721 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$

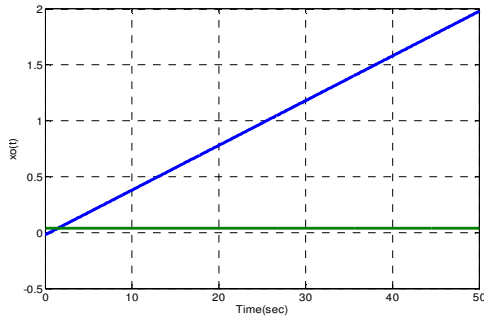
$$K_{C3} = \begin{bmatrix} -0.1755 \times 10^{-3} & -0.1024 \times 10^{-3} \\ -0.0106 \times 10^{-3} & -0.0315 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, K_D = \begin{bmatrix} -1.3819 & -1.3820 \\ -0.6811 & -0.5142 \end{bmatrix},$$

شرایط اولیه سیگنال‌های سیستم به صورت زیر می‌باشد.

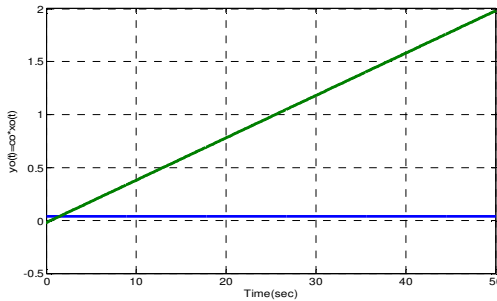
$$\emptyset(t) = [0.05 \ 0.3 \ -0.2 \ 0.35 \ -0.35 \ -0.15 \ -0.25 \ 0.25 \ -0.15 \ 0.45 \ 0.15 \ -0.3]^T$$

در ادامه به نتایج شبیه سازی پرداخته می‌شود.

شکل (۳) سیگنال خروجی عامل مرجع را که مقدار ماندگار صفر دارد، نمایش می‌دهد.

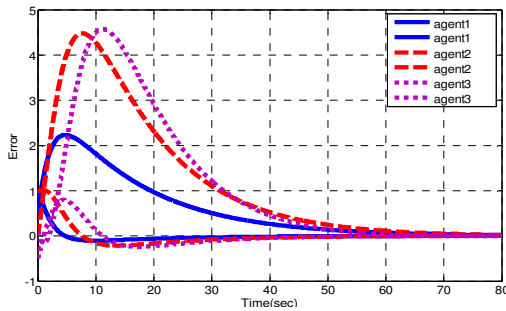


شکل (۶): سیگنال حالت عامل مرجع
Fig. (6): Leader agent state signal

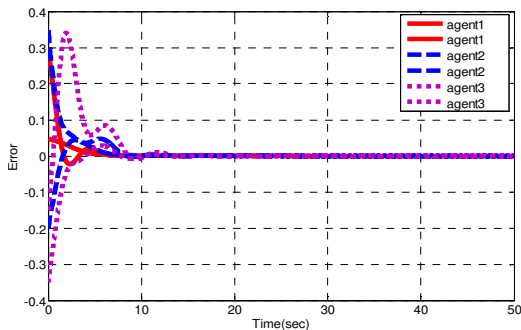


شکل (۷): سیگنال خروجی عامل مرجع
Fig. (7): Leader agent output signal

شکل‌های (۸)، (۹) و (۱۰) سیگنال خطا را برای تحقیق [۱] و روش ارائه شده در حضور نامعینی و اغتشاش نمایش می‌دهند.



شکل (۸): سیگنال خطا [۱]
Fig. (8): Error signal [1]



شکل (۹): سیگنال خطا در حضور نامعینی
Fig. (9): Error Signal in the presence of uncertainty

مقایسه قرار می‌گیرند. ارتباط عامل‌های غیر متمرکز به صورتی که در شکل (۲) آورده شده است، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این تحقیق و تحقیق شماره [۱] عامل‌ها در شبکه ارتباطی پراکنده هستند. در [۱] دینامیک عامل‌ها به صورت هماهنگ در نظر گرفته شده‌اند و کنترلر فیدبک حالت مورد استفاده قرار گرفته است. نویسنده از روش لیاپانوف- کراسوفسکی جدید استفاده کرده است که در نتیجه آن، میان عامل‌های مستقل نیز ارتباطات اضافی برقرار می‌شود. به همین منظور، از کرونگر گراف ارتباطی غیرمستقیم عامل‌ها و ماتریس‌های لیاپانوف استفاده می‌گردد. از آن جا که انتقال اطلاعات میان عامل‌ها با تأخیر همراه است، بحث محافظه کاری و تحمل بیشینه تأخیر از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشد. در تحقیق ارائه شده، با در نظر گرفتن عامل‌ها به صورت ناهماهنگ و همچنین وجود نامعینی و اغتشاش سعی در تضمین افزایش سرعت ردیابی با کمترین محافظه کاری می‌باشد. از جمله مزایای این تحقیق استفاده از کنترلر خروجی پویا است. با انتخاب این کنترلر، بر خلاف کنترلر فیدبک حالت، از تکنیک‌های کمتری در تضمین پایداری در کنار روابط لیاپانوف- کراسوفسکی استفاده می‌شود. در ادامه دینامیک عامل‌ها و ماتریس‌های نامعینی و اغتشاش برای اثبات ادعا آورده شده‌اند.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1.049 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1.049 \end{bmatrix},$$

سیگنال‌های نامعینی و اغتشاش نیز مانند مثال ۱ انتخاب شده‌اند.

ماتریس‌های نامعینی و اغتشاش نیز به صورت زیر اعمال می‌گردند.

$$E_{ai} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, E_{bi} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$E_{ni} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, H_{ai} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

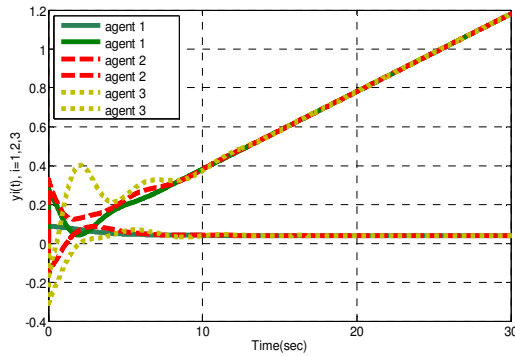
$$H_b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, H_{ni} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$n_1 = n_3 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, n_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

نتایج قضیه ۱، با استفاده از افزونه Yalmip و با تعیین پارامترهای $\mu = 0.03, \varepsilon = 0.7, h_1 = 0.1, h_2 = 1$ مورد بررسی قرار می‌گیرند. مقادیر اولیه نیز مانند مثال (۱) انتخاب شده‌اند. در [۱] مقادیر اولیه به صورت زیر هستند.

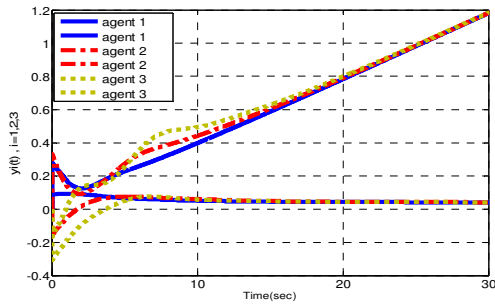
$$\phi(t) = [0.5 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0.1 \quad -0.5]^T,$$

شکل‌های (۶) و (۷) سیگنال عامل مرجع و خروجی آن را نمایش می‌دهد.



شکل (۱۲): سیگنال خروجی عامل‌ها در حضور نامعینی

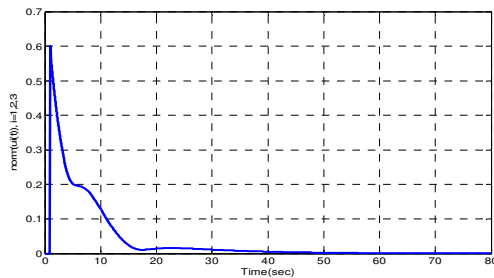
Fig. (12): Output signal of agents in the presence of uncertainty



شکل (۱۳): سیگنال خروجی عامل‌ها در حضور نامعینی و اغتشاش

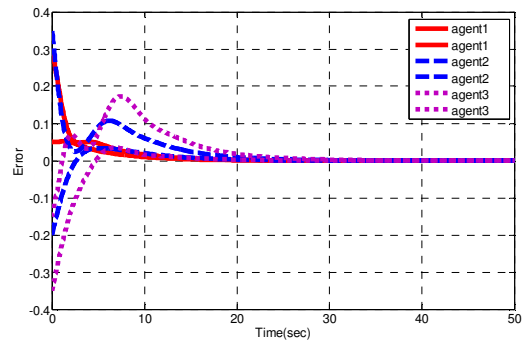
Fig. (13): Output signals of agents in the presence of uncertainty and disturbances

نتایج در سیگنال خروجی عامل‌ها نشان می‌دهد که سرعت در حضور نامعینی در مقایسه با حضور نامعینی و اغتشاش بالاتر است و زمان خیز^۹ کاهش می‌یابد. سرعت و میزان بالازدگی در حضور نامعینی و اغتشاش به سیگنال‌های اغتشاش بستگی دارد. در مثال ارائه شده، سیگنال‌های اغتشاش باعث کاهش سرعت اجماع و هم چنین کاهش میزان نوسانات شده است. شکل‌های (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) نرم دو سیگنال‌های ورودی کنترلی را نمایش می‌دهند.



شکل (۱۴): نرم دو سیگنال ورودی کنترلی [۱]

Fig. (14): 2-Norm of control signal [1]



شکل (۱۰): سیگنال خطا در حضور نامعینی و اغتشاش

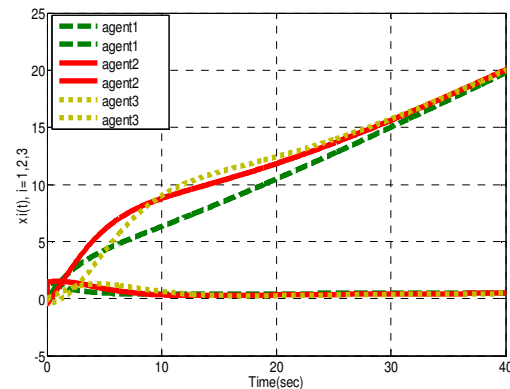
Fig. (10): Error signal in the presence of uncertainty and disturbances

نکته: سیگنال خطا در تحلیل عامل‌های هماهنگ، از اختلاف سیگنال حالات عامل‌ها و سیگنال حالت مرجع به دست می‌آیند. سیگنال خطا در مورد عامل‌های ناهماهنگ، اختلاف خروجی سیگنال عامل‌ها و عامل مرجع است. در تحقیق [۱]، به دلیل اینکه عامل‌ها هماهنگ هستند، سیگنال خطا از اختلاف سیگنال‌های حالت به دست آمده است. در روش ارائه شده از آن جا که عامل‌ها ناهماهنگ هستند، سیگنال خطا اختلاف خروجی عامل‌ها است.

از نتایج سیگنال‌های خطا می‌توان نشان داد که با وجود انتخاب عامل‌ها به صورت ناهماهنگ در روش ارائه شده، سرعت اجماع بیشتر شده و مقدار دامنه و همچنین بالازدگی سیگنال‌ها کاهش یافته است. در روش [۱]، دینامیک عامل‌ها و مرجع یکسان است و به صورت زیر انتخاب شده‌اند.

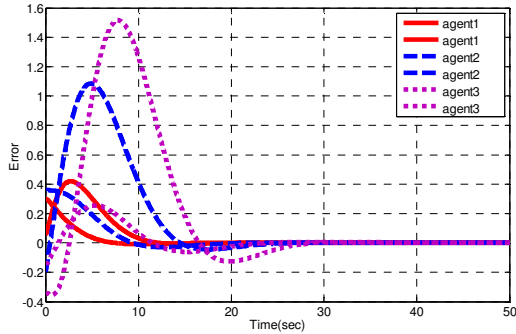
$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

شکل‌های (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) سیگنال حالت عامل‌های تحقیق [۱] و سیگنال خروجی عامل‌های روش ارائه شده در حضور نامعینی و اغتشاش را نمایش می‌دهند.



شکل (۱۱): سیگنال حالات عامل‌ها [۱]

Fig. (11): State Signals of agents in [1]



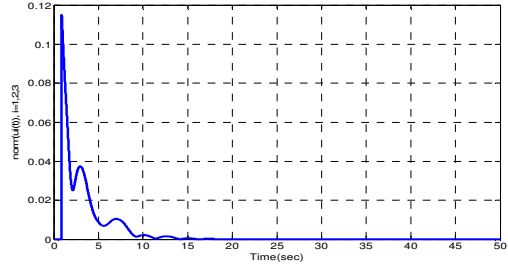
شکل (۱۷): خطای عامل‌ها [۹]
Fig. (17): Error of agents [9]

۴- نتیجه‌گیری

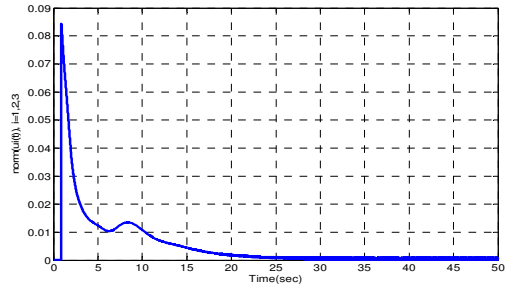
در این تحقیق، مسأله کنترل مقاوم و ردیابی در سیستم‌های چندعاملی با دینامیک ناهمبند و در حضور نامعینی و اغتشاش مورد بررسی قرار گرفته است. با معرفی کنترلر دینامیک خروجی و مجموعه‌ای از توابع لیاپانوف-کراسوفسکی، فرمولهای نیوتن- لاینیز، روش انتگرال جنسن و استفاده از روش خطی‌سازی ضرایب غیرخطی در تأخیر بازه‌ای، شرایط وابسته به تأخیر به منظور مقاوم‌سازی و ردیابی مرجع به صورت نابرابری‌های ماتریسی خطی ارائه گردیده است. در تحقیق مذکور فرض بر آن است که کلیه حالات سیستم در اختیار باشند لذا در طراحی از مشاهده‌گر استفاده نشده است. در مقالات مرجع، مشتق تأخیر را نامعین فرض کرده‌اند. در صورتی که در این تحقیق مشتق پذیر بودن تأخیر مد نظر قرار گرفته شده و در ردیابی عامل‌ها مؤثر واقع گردیده است. در روش ارائه شده می‌توان با تقسیم‌بندی بیشتر بازه تأخیر و بهره‌گیری از ترکیبات محدب میزان تحمل سیستم را در برابر بیشینه تأخیر بالا برد. با بهره‌گیری از ماتریس C_2 مناسب در خروجی مشاهده شده، نتایج ردیابی عامل مرجع سریع‌تر خواهند بود. در این تحقیق، نقش سیگنال مرجع در القای اغتشاش به شبکه در نظر گرفته شده است. حتی زمانی که اغتشاشات سنسورها صفر فرض شود، اغتشاش مربوط به سیگنال مرجع وجود خواهد داشت. نتایج حاصل از شبیه سازی، مؤثر بودن روش ذکر شده را در رسیدن به حداقل محافظه کاری و بیشترین سرعت در ردیابی و اجماع عامل‌های ناهمبند در حضور نامعینی و اغتشاش نشان می‌دهد.

پی نوشت:

- 1- Kronecker
- 2-Newton- Leibniz
- 3-P- Copy internal model
- 4- Cauchy Inequality
- 5-Schur Complement
- 6-Linear Matrix Inequality
- 7-Jenson Inequality
- 8-Multi Input- Multi Output
- 9- Rise time



شکل (۱۵): نرم دو سیگنال ورودی کنترلی در حضور نامعینی
Fig. (15): 2-Norm of control signal in the presence of uncertainty



شکل (۱۶): نرم دو سیگنال ورودی کنترلی در حضور نامعینی و اغتشاش
Fig. (16): 2-Norm of control signal in the presence of uncertainty and disturbances

بردار انرژی سیگنال‌های کنترلی در روش [۱] برابر $\theta_1 = [-0.9668 \quad -1.0492 \quad 0.4527]^T$ و در حضور نامعینی و نامعینی و اغتشاش برابر θ_2 و θ_3 می‌باشند.

$$\theta_2 = [-0.8434 \quad -5.8037 \quad -3.3784 \quad -1.4936 \quad -5.8071 \quad 0.1348]^T$$

$$\theta_3 = [-2.9535 \quad -11.0722 \quad -4.8950 \quad -2.0231 \quad -4.6246 \quad 3.5184]^T$$

با توجه به نتایج به دست آمده، روش ارائه شده از سرعت بالاتری برخوردار است و از انرژی کمتری در مقایسه با روش [۱] برای ردیابی مرجع عامل‌های تحت شبکه بهره می‌برد. همچنین در تحقیق [۹] به مسأله پایداری نمایی برای سیستم‌های متأثر از نامعینی و اغتشاش و با استفاده از کنترلر فیدبک حالت پرداخته شده است. دینامیک عامل‌ها در این روش هماهنگ انتخاب شده و گراف ارتباطی مطابق با شکل (۲) در نظر گرفته شده است. نتایج روش [۹] در شکل (۱۷) قابل مشاهده است. میزان بهره نمایی برابر 0.2 انتخاب شده است و دینامیک عامل‌های هماهنگ و نامعینی‌ها نیز مانند مثال (۲) در نظر گرفته شده‌اند.

نتایج نشان می‌دهد، در مقایسه با تحقیق ارائه شده سرعت اجماع کمتر و دامنه سیگنال‌ها بیشتر است. در حالی که میزان دامنه سیگنال‌ها در مقایسه با روش [۱] کمتر می‌باشد. با وجود دشوار بودن تحلیل برای عامل‌های ناهمبند، تحقیق ارائه شده از پاسخ بسیار خوبی در تضمین سرعت اجماع و ردیابی برخوردار است. همچنین کنترلر از انرژی کمتری برای این منظور در مقایسه با سایر روش‌ها برخوردار است.

References

- [1] L. Ding, Q.L. Han, G. Guo, "Network-based leader-following consensus for distributed multi-agent systems", *Automatica*, Vol. 49, No. 7, pp. 2281-2286, July 2013.
- [2] Y. Hu, P. Li, J. Lam, "Consensus of multi-agent systems: a simultaneous stabilization approach", *IET Control Theory and Applications*, Vol. 6, No. 11, pp. 1758-1765, 2012.
- [3] A. Papachristodoulou, M.M. Peet, S.I. Niculescu, "Stability analysis of linear systems with time-varying delays: delay uncertainty and quenching", *Proceeding of the IEEE/CDC*, Vol. 12, pp. 2117-2122, 2007.
- [4] M. Tang, Y.W. Wang, C. Wen, "Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with interval time-varying delays", *IET Control Theory and Applications*, Vol. 6, No. 6, pp. 868-873, 2012.
- [5] M.C. De Oliveira, J.C. Geromel, L. Hsu, "LMI characterization of structural and robust stability", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 296, pp. 27-38, 1999.
- [6] H. Shao, "New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay", *Automatica*, Vol. 45, No. 3, pp. 744-749, March 2009.
- [7] P.L. Liu, "Further improvement on delay-range-dependent stability results for linear systems with interval time-varying delays", *ISA Transactions*, Vol. 52, No. 6, pp. 725-729, 2013.
- [8] F. Souza, "Further improvement in stability criteria for linear systems with interval time-varying delay", *IET Control Theory and Applications*, Vol. 7, No. 3, pp. 440-446, 2013.
- [9] N.T. Thanh, V.N. Phat, " H_∞ control for nonlinear systems with interval non-differentiable time-varying delay", *European Journal of Control*, Vol. 19, No. 3, pp. 190-198, May 2013.
- [10] N.T. Thanh, V.N. Phat, "Decentralized stability for switched nonlinear large-scale systems with interval time-varying delays in interconnections", *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, Vol. 11, pp. 22-36, 2013.
- [11] V.N. Phat, Y. Khongtham, K. Ratchagit, "LMI approach to exponential stability of linear systems with interval time-varying delays", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 436, pp. 243-251, 2012.
- [12] X. Zhu, Y. Wang, G. Yang, "New stability criteria for continuous-time systems with interval time-varying delay", *IET Control Theory and Applications*, Vol. 4, No. 6, pp. 1101-1107, 2010.
- [13] L. YU, J. Wang, "Distributed robust output regulation for multi-agent systems with unknown communication delays", *Proceeding of the IEEE/CCC*, pp. 2838-2843, Hefei, July 2012.
- [14] M.R. Davoodi, K. Khorasani, H.A. Talebi, "A novel distributed robust fault detection and isolation filter design for a network of nonhomogeneous multi-agent systems", *Proceeding of the IEEE/CDC*, pp. 592-599, Maui, HI, Dec. 2012.
- [15] Y. Hu, "Consensus control of multi-agent systems", University of Hong Kong, 2012.
- [16] H.R. Karimi, M. Zapateiro, N. Luo, "A linear matrix inequality approach to robust fault detection filter design of linear systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 347, pp. 957-973, 2010.

