« فراسوی مدیریت»
سال پنجم _ شماره ۱۷_ تابستان ۱۳۹۰
ص ص۱۰۹-۹۱

اندازه‌گیری کارایی به صورت فازی در تحلیل پوششی داده‌ها

مریم بالاسیدقصیر*[۱]
اسماعیل علیزاده[۲]

چکیده

مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) ، برای اندازه‌گیری کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی‌های مختلف برای به وجود آوردن خروجی‌های مختلف هستند. برای بحث در مورد داده‌های نادقیق، مفهوم فازی معرفی می شود. این مقاله روشی را برای اندازه‌گیری میزان کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده با توابع هدف فازی معرفی می کند. در این مقاله از اعداد فازی ذوزنقه‌ای استفاده می شود. هدف اصلی تبدیل مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی به مدل‌های قطعی و دقیق DEA است که به وسیله α – برش‌ها، صورت می گیرد. دسته‌ای از مسائل پارامتریک برای توضیح دسته‌ای از مدل‌های قطعی DEA فرمول بندی می شوند.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارائی، توابع عضویت، برنامه‌ریزی پارامتریک

---

[۱]- عضو هیأت علمی، گروه ریاضیات، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران
[۲]- عضو هیأت علمی ، گروه ریاضیات، واحد مرند، دانشگاه آزاد اسلامی، مرند، ایران

مقدمه

اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده، زمانی که چند ورودی و خروجی داریم مشکل است. بنابراین از مجموعه‌ای از اوزان برای جمع کردن ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت جداگانه برای محاسبه نسبت کارایی استفاده می شود. (Charnes,1978:429-444)، روش تحلیل پوششی داده‌ها را معرفی کرد که درآن هر DMU وزن مورد نظر خود را انتخاب می کرد، زمانی که نسبت مجموع خروجی‌ها بر ورودی‌های همه DMU ها کوچک‌تر یا مساوی با یک است، این نظریه به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی جزئی فرمول‌بندی می شود. یکی از جنبه‌های جالب این روش این است که نقطه مقابل بهینگی پارتو است.

در اقتصاد، DMU کارای پارتو نامیده می شود اگر ورودی مصرف خود را کاهش دهد، و یا ورودی دیگر، به همان میزان افزایش خروجی، افزایش پیدا کند یا زمانی که تولیدات‌مان افزایش پیدا کند خروجی دیگر به همان میزان مصرف ورودی‌ها کاهش پیدا کند. کارهای زیادی توسط چارنز صورت گرفته است و مدل‌های گوناگون و کاربردهای زیادی گزارش شده است. اما یک روش دیگر توسط (Seiford,1996:99-137) ارائه شده است. در این روش، میزان کارایی به میزان داده‌ها حساس است و با تغییر جزئی کارایی تغییر پیدا می‌کند. بنابراین، کلید رسیدن به موفقیت با استفاده از روش DEA، میزان درست فاکتورهاست که شامل ورودی‌ها و خروجی‌های کامل است، در این بین، بسیاری از فاکتورها را نمی توان به صورت دقیق اندازه‌گیری کرد. برای بررسی میزان کارایی با داده‌های نادقیق در مراحل تصمیم‌گیری (Bellman & Zade,1970:141-164) مفهوم فازی را معرفی کردند. در روش معمول DEA، مجموعه‌ای از اوزان، یک مجموعه‌ای از محدودیت‌ها را تولید می کردند که قادر به اندازه‌گیری بیشترین میزان کارایی هر DMU بود.

حال به بررسی مدل DEA زمانی که بعضی از توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت فازی هستند، می پردازیم. چون مدل DEA، یک مدل برنامه‌ریزی خطی بود، در مدل جدید اشاره شده، مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت فازی است. متأسفانه، بسیاری از تکنیک‌ها، فقط قادر به حل مسائل برنامه‌ریزی قطعی بودند. مقالاتی وجود دارند که بحث در مورد اندازه‌گیری میزان کارایی، زمانی که توابع عضویت به صورت احتمالی و نه به صورت فازی هستند، می پردازند. (Sengupta,1993:857-871) مدل DEA را به وسیله توابع عضویت تبدیل به مدل برنامه‌ریزی خطی فازی کرد.

در این مقاله، یک روش جدیدی را ارائه می کنیم که قادر به اندازه‌گیری میزان کارایی فازی را برای DMU ها با تابع هدف فازی است. ایده اصلی این روش استفاده از $\alpha-$ برش‌ها با استفاده از قانون توسیع زاده برای تبدیل روش فازی DEA، به مدل‌های قطعی DEA است. روش‌های معمول DEA، به وسیله روش LP حل می گردند. در این بخش، مثال ساده‌ای را برای توضیح این ایده در این مقاله ذکر می کنیم.

ایده: در روش DEA که به وسیله (Charnes,1978:429-444) بیان شده است، بازده به مقیاس ثابت در نظر گرفته شده است (Banker,1984:1078-1092) مفروضاتی را به مدل چارنز اضافه کرد که در آن بازده به مقیاس متغییر مناسب بود. این مدل به صورت زیر است:

$$E_r = \max \quad \frac{\sum_{k=1}^{t} u_k Y_{rk}}{(v_0 + \sum_{j=1}^{s} v_j X_{rj})}$$

$$s.t \qquad \frac{\sum_{k=1}^{t} u_k Y_{ik}}{\left(v_0 + \sum_{j=1}^{s} v_j X_{ij}\right)} \le 1 \qquad i = 1......n \qquad (1)$$

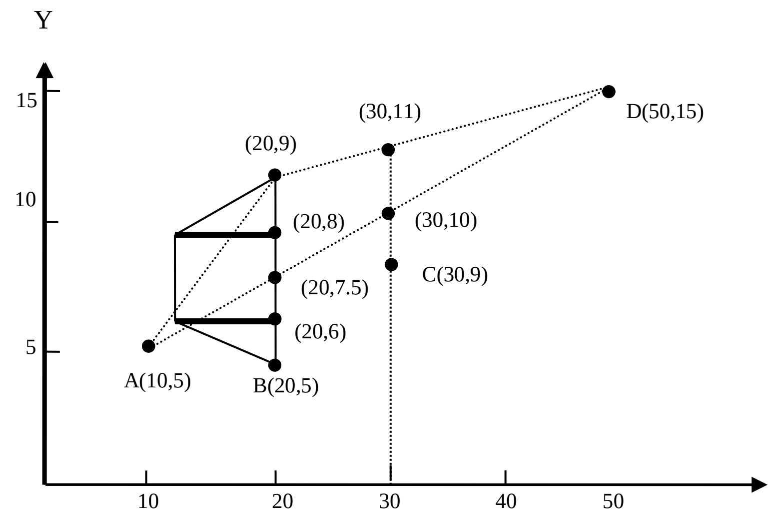
$$u_k, v_j \ge \varepsilon \succ 0$$

زمـــانی کـــه X_{ij} و Y_{ik} ورودی و خروجـــی هســـتند و $j=1,...,s$ و $k=1,...t$ و ε یک عدد غیرارشمیدسی است. مدل (1) یک مساله برنامه‌ریزی خطی کسری است که می توان آن را به مدل برنامه‌ریزی خطی فازی تبدیل کرد.

$$E_r = \max \quad \sum_{k=1}^{t} u_k Y_{rk}$$

$$s.t \qquad v_o + \sum_{j=1}^{s} v_j X_{ij} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{t} u_k Y_{ik} - \left(v_o + \sum_{j=1}^{s} v_j X_{ij}\right) \le 0, i = 1,...,n \qquad (2)$$
$$u_k , v_j \ge \varepsilon,$$



شکل (۱)

بنابراین روش معمول LP را می توان برای حل E_r استفاده کرد.

یک حالت ساده را با یک ورودی و خروجی در نظر می گیریم. چهار DMU را در نظر می گیریم. D, C, B, A در شکل ۱، با 50,30,20,10 واحد ورودی، برای تولید 5 و $(5,6,8,9)$ و 9 و 15واحد خروجی، زمانی که $(5,6,8,9)$ یک عدد ذوزنقه‌ای است. خروجی B، کوچک‌تر یا مساوی با 7.5 است، زمانی که کارایی به صورت نسبی از خروجی بر max کل خروج به وجود می آید، نتایج کارایی D,C,A مساوی 1,0.9,1 است، وکارایی به دست آمده برای B، ما بین $\frac{5}{7.5},\frac{7.5}{7.5}$ بسته به میزان خروجی‌اش است. زمانی که خروجی B مابین $9-7.5$ است، خط تولید B متصل به A است. چون D, B, A در خط تولید قرار می گیرند، نتایج کارایی به دست آمده برابر 1 است، اما کارایی C مابین $\frac{9}{11},\frac{9}{10}$ است. در این مثال، روشن است که کارایی D, A برابر 1 است. فرض می کنیم که $\tilde{E}_C,\tilde{E}_B$ میزان کارایی فازی DMU های C,B است. برای به دست آوردن توابع عضویت $\tilde{E}_C,\tilde{E}_B$، می‌توان از $\alpha-$ برش‌ها استفاده کرد. برای یک مقدارخاص α، با استفاده از کران‌های بالا و پایین $\alpha-$ برش‌ها خروجی B، یک مقدار قطعی به دست می آید. با جمع آوری نتایج با $\alpha-$های مختلف $\tilde{E}_C,\tilde{E}_B$ به دست می آید. با استفاده از مشاهدات شکل ۱، تابع عضویت فازی $\tilde{Y}_B$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tilde{Y}_B}(y)=\begin{cases} y-5 & 5\le y\le 6 \\ 1 & 6\le y\le 8 \\ 9-y & 8\le y\le 9 \end{cases}$$

$[5+\alpha,9-\alpha]$ یک مجموعه $\alpha-$ سطح است . فرض کنیم که $(E_B)_\alpha^u,(E_B)_\alpha^L$ به عنوان کران‌های بالا و پایین $\alpha-$ برش‌ها ی $\mu_{\tilde{E}_B}$ است به عنوان تابع عضویت $\tilde{E}_B$ است.

$$\left(E_B\right)_\alpha^L = \max \quad \frac{(5+\alpha)u}{(v_o+20v_1)}$$

$$s.t \qquad \begin{aligned} &\frac{5u}{(v_0+10v_1)} \le 1\\ &\frac{(5+\alpha)u}{(v_o+20v_1)} \le 1\\ &\frac{9u}{(v_0+30v_1)} \le 1\\ &\frac{15u}{(v_o+50v_1)} \le 1\\ &u, v_1 \ge \varepsilon \end{aligned}$$

$$\left(E_B\right)_\alpha^U = \max \quad \frac{(9-\alpha)u}{(v_o+20v_1)}$$

$$s.t \qquad \begin{aligned} &\frac{5u}{(v_o+10v_1)} \le 1\\ &\frac{(9-\alpha)u}{(v_0+20v_1)} \le 1\\ &\frac{9u}{(v_0+30v_1)} \le 1\\ &\frac{15u}{(v_o+50v_1)} \le 1\\ &u, v_1 \ge \varepsilon \end{aligned}$$

زمانی که کارایی، نسبتی از خروجی‌ها بر max مقدار خروجی‌هاست که در شکل ۱ نمایش داده شده است. واضح است که $\left(E_B\right)_\alpha^L = \frac{(5+\alpha)}{7.5}, \left(E_B\right)_\alpha^U = 1 \forall \alpha : 0 \prec \alpha \le 1$ است.

$$\mu_{\tilde{E}_B}(z)=\begin{cases}\frac{(15z-10)}{2}, & \frac{2}{3}\le z\le\frac{4}{5}\\ 1, & \frac{4}{5}\le z\le 1\end{cases}$$

به طور مشابه،کران‌های بالا و پایین $\alpha-$ برش‌های $\mu_{\tilde{E}_C}$ به صورت زیر حل می شوند:

$$\begin{aligned}
(E_C)_\alpha^L = \max \quad & \frac{9u}{(v_0+30v_1)}\\
& \frac{5u}{(v_0+10v_1)}\le 1\\
& \frac{(5+\alpha)u}{(v_0+20v_1)}\le 1\\
s.t \quad & \frac{9u}{(v_0+30v_1)}\le 1\\
& \frac{15u}{(v_0+50v_1)}\le 1\\
& u,v_1\ge\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E_C)_\alpha^U = \max \quad & \frac{9u}{(v_0+30v_1)}\\
s.t \quad & \frac{5u}{(v_0+10v_1)}\le 1\\
& \frac{(9-\alpha)u}{(v_0+20v_1)}\le 1\\
& \frac{15u}{(v_0+50v_1)}\le 1\\
& u,v_1\ge\varepsilon
\end{aligned}$$

و v_0 آزاد

به راحتی می توان $\forall \alpha : 0 \prec \alpha \leq 1$ $(E_C)_\alpha^L = \frac{27}{(33-2\alpha)}, (E_C)_\alpha^U = \frac{9}{10}$ به دست آورد. متناوباً $\mu_{\tilde{E}_C}(z)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\mu_{\tilde{E}_C}(z) = \begin{cases} \frac{(33z-27)}{2z} & \frac{9}{11} \leq z \leq \frac{27}{31} \\ \frac{9}{10} & \frac{27}{31} \leq z \leq \frac{9}{10} \end{cases}$$

بنابراین، تابع عضویت به صورت فازی است، هم‌چنین توابع عضویت را می توان برای اندازه گیری میزان کارایی فازی به وسیله $\alpha -$ برش‌ها بیان نمود، میزان کارایی واحدهای تصمیم گیرنده می تواند به صورت قطعی باشد، اگرچه تابع هدف فازی است، به عنوان مثال DMU های D,A را در نظر می گیریم. توابع عضویت میزان کارایی می تواند غیرخطی باشد.

مراحل جواب: مجموعه‌ای از DMU ها را در نظر می گیریم، فرض می کنیم که $\tilde{X}_{ij}$ ورودی و $\tilde{Y}_{ik}$ خروجی باشد و به صورت مجموعه‌های فازی با توابع عضویت $\mu_{\tilde{X}_{ij}}, \mu_{\tilde{Y}_{ik}}$ است. بدون خلل به کلیت، فرض می کنیم که توابع هدف فازی هستند. زمانی که مقادیر فازی را به کمک توابع عضویت به مقادیر قطعی تبدیل می کنیم، مدل DEA، فازی را می توان به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r = \max \quad & \frac{\sum_{k=1}^{t} u_k \tilde{Y}_{rk}}{\left(v_0 + \sum_{j=1}^{s} v_j \tilde{X}_{rj}\right)} \\ s.t \quad & \frac{\sum_{k=1}^{t} u_k \tilde{Y}_{ik}}{\left(v_0 + \sum_{j=1}^{s} v_j \tilde{X}_{ij}\right)} \leq 1, i = 1\ldots, n \\ & u_k, v_j \geq \varepsilon \end{aligned} \tag{3}$$

فرض می کنیم که $S\left(\tilde{X}_{ij}\right), S\left(\tilde{Y}_{ik}\right)$، به عنوان تکیه‌گاه $\tilde{X}_{ij}, \tilde{Y}_{ik}$ تعریف شوند. $\alpha-$ برش‌های $\tilde{X}_{ij}, \tilde{Y}_{ik}$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\left(X_{ij}\right)_{\alpha} = \{x_{ij} \in S\left(\tilde{X}_{ij}\right) \big| \mu_{\tilde{X}_{ij}}\left(x_{ij}\right) \geq \alpha\}, \qquad \forall i, j \qquad (4a)$$

$$\left(Y_{ij}\right)_{\alpha} = \{y_{ik} \in S\left(\tilde{Y}_{ik}\right) \big| \mu_{\tilde{Y}_{ik}}\left(y_{ik}\right) \geq \alpha\}, \qquad \forall i, k \qquad (4b)$$

توجه کنید که $\left(X_{ij}\right)_{\alpha}$ و $\left(Y_{ik}\right)_{\alpha}$ ، مجموعه‌های قطعی هستند. با استفاده از $\alpha-$ برش‌ها ، ورودی‌ها وخروجی‌ها را می توان با $\alpha-$ برش‌های متفاوت و سطح‌هایی از بازه‌های اطمینان متفاوت نشان داد.

بنابراین مدل فازی DEA، می تواند به خانواده‌ای از مدل‌های قطعی DEA، با مجموعه‌ای از $\alpha-$ برش‌های متفاوت که در آن، $\{\left(X_{ij}\right)_{\alpha} \mid \quad 0 \prec \alpha \leq 1\}$ و $\{\left(Y_{ik}\right)_{\alpha} \mid \quad 0 \prec \alpha \leq 1\}$ تبدیل کرد.

مجموعه‌های از $\alpha-$ سطح‌ها که در معادلات $(4a),(4b)$ نشان داده شد، بازه‌های قطعی هستند که به صورت زیر نشان داده می شوند:

$$\left(X_{ij}\right)_{\alpha} = \left[\min_{x_{ij}}\{x_{ij} \in S\left(\tilde{X}_{ij}\right) \middle| \begin{array}{l} \mu_{\tilde{X}_{ij}}\left(x_{ij}\right) \geq \alpha\}, \\ \max_{x_{ij}}\{x_{ij} \in S\left(\tilde{X}_{ij}\right) \big| \quad \mu_{\tilde{X}_{ij}}\left(x_{ij}\right) \geq \alpha \end{array} \right] \qquad (5a)$$

$$\left(Y_{ij}\right)_{\alpha} = \left[\min_{y_{ik}}\{y_{ik} \in S\left(\tilde{Y}_{ik}\right) \middle| \begin{array}{l} \mu_{\tilde{Y}_{ik}}\left(y_{ik}\right) \geq \alpha\}, \\ \max_{y_{ik}}\{y_{ik} \in S\left(\tilde{Y}_{ik}\right) \big| \quad \mu_{\tilde{Y}_{ik}} \geq \alpha\} \end{array} \right] \qquad (5b)$$

بر پایه قانون توسیع زاده، تابع عضویت کارایی DMU_r را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mu_{\tilde{E}_r}(z)=\sup_{x,y}\min\{\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}),\mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik}),\forall i,j,k | z=E_r(x,y)\}, \qquad (6)$$

بنابراین $E_r(x,y)$ مشخص شد، روشی برای ایجاد تابع عضویت $\mu_{\tilde{E}_r}$ است که در این مقاله به وسیله $\alpha-$برش‌ها، به محاسبه آن می پردازیم.

براساس معادله (6)، $\mu_{\tilde{E}_r}$، مینیمم مقدار $\mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik}),\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij})$ است که در آن $\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij})\geq\alpha,\mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik})\geq\alpha$ است، و حداقل یکی از $\mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik}),\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij})$ برابر α است. و $Z=E_r,\mu_{\tilde{E}_r}(z)=\alpha \quad \forall i,j,k$.

فرض می کنیم که $0\prec\alpha_2\prec\alpha_1\leq 1$ باشد در این صورت داریم:

$$\left[(X_{ij})^L_{\alpha_1},(X_{ij})^U_{\alpha_1}\right]\subseteq\left[(X_{ij})^L_{\alpha_2},(X_{ij})^U_{\alpha_2}\right],\left[(Y_{ik})^L_{\alpha_1},(Y_{ik})^U_{\alpha_1}\right]\subseteq\left[(Y_{ik})^L_{\alpha_2},(Y_{ik})^U_{\alpha_2}\right]$$

بنابراین،

$$\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij})\geq\alpha,\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij})=\alpha,\mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik})\geq\alpha,\mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik})=\alpha$$ ،

برای به دست آوردن تابع عضویت $\mu_{\ddot{E}_r}$، کران‌های بالا و پایین $\mu_{\tilde{E}_r}$ را به وسیله $\alpha-$ برش‌ها به دست می آوریم.

$$
\begin{aligned}
&(E_r)_\alpha^L = \min E_r(x,y) \\
&s.t \qquad (X_{ij})_\alpha^L \le x_{ij} \le (X_{ij})_\alpha^U, \quad \forall i,j \\
&\qquad\quad\; (Y_{ik})_\alpha^L \le y_{ik} \le (Y_{ik})_\alpha^U, \quad \forall i,k \qquad (7a) \\
&(E_r)_\alpha^U = \max E_r(x,y) \\
&s.t \qquad (X_{ij})_\alpha^L \le x_{ij} \le (X_{ij})_\alpha^U, \quad \forall i,j \qquad (7b) \\
&\qquad\quad\; (Y_{ik})_\alpha^L \le y_{ik} \le (Y_{ik})_\alpha^U, \quad \forall i,k
\end{aligned}
$$

و فرم کلی به صورت زیر است:

$$
(E_r)_\alpha^L = \min_{\substack{(X_{ij})_\alpha^L \le x_{ij} \le (X_{ij})_\alpha^U \\ (Y_{ik})_\alpha^L \le y_{ik} \le (Y_{ik})_\varepsilon^U \\ \forall i,j,k}} \{E_r = \max \quad \frac{\sum_{k=1}^{t} u_k y_{rk}}{\left(v_0 + \sum_{j=1}^{s} v_j x_{rj}\right)}
$$

$$
\begin{aligned}
s.t \quad & \frac{\sum_{k=1}^{t} u_k y_{ik}}{\left(v_0 + \sum_{j=1}^{s} v_j x_{ij}\right)} \le 1, i = 1,\dots,n \qquad (8a) \\
& u_k, v_j \ge \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
(E_r)_\alpha^U = \max_{\substack{(X_{ij})_\alpha^L \le x_{ij} \le (X_{ij})_\alpha^U \\ (Y_{ik})_\alpha^L \le y_{ik} \le (Y_{ik})_\alpha^U \\ \forall i,j,k}} \left\{ \begin{aligned}
& E_r = \max \quad \frac{\sum_{k=1}^{t} u_k y_{rk}}{\left(v_o + \sum_{j=1}^{s} v_j x_{rj}\right)} \\
& s.t \qquad \frac{\sum_{k=1}^{t} u_k y_{ik}}{\left(v_o + \sum_{j=1}^{s} v_j x_{ij}\right)} \le 1, \quad i = 1,\dots,n \qquad (8b) \\
& \qquad u_k, v_j \ge \varepsilon,
\end{aligned} \right.
$$

این مدل دو مرحله‌ای را می توان به یک مدل یک مرحله‌ای تبدیل کرد. زمانی که ورودی‌ها وخروجی‌ها برای هر DMU، در دامنه‌های مختلف تغییر می کند، برای پیدا کردن کوچک‌ترین نسبت کارایی هر DMU، یک را می توان به عنوان خروجی این DMU و ورودی کلیه DMU هایی که با مقادیر کم‌ترین هستند، قرار داد. متقابلاً، بر پیدا کردن بیشترین کارایی DMU ها، یک را می توان به عنوان خروجی این DMU و وردی کلیهDMU هایی که با مقادیر بیشترین هستند، قرار داد. بنابراین مدل‌های $(8b),(8a)$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
(E_r)_\alpha^L = \max \quad & \frac{\sum_{k=1}^{t} u_k (Y_{rk})_\alpha^L}{\left(v_0 + \sum_{j=1}^{s} v_j (X_{rj})_\alpha^U\right)} \\
s.t \quad & \frac{\sum_{k=1}^{t} u_k (Y_{rk})_\alpha^L}{\left(v_o + \sum_{j=1}^{s} v_j (X_{rj})_\alpha^U\right)} \le 1, i = 1,\dots,n, i \ne r \qquad (9a) \\
& \frac{\sum_{k=1}^{t} u_k (Y_{ik})_\alpha^U}{\left(v_o + \sum_{j=1}^{s} v_j (X_{ij})_\alpha^L\right)} \le 1 \\
& u_k, v_j \ge \varepsilon
\end{aligned}
$$

,

این جفت از مسائل ریاضی در بردارنده مطالعات سیستمی در مورد این که چگونه می توان جواب‌های بهین $(X_{ij})_\alpha^u, (X_{ij})_\alpha^L, (Y_{ik})_\alpha^u, (Y_{ik})_\alpha^L$ را در بازه $\alpha \in (0,1]$، تغییر داد. در این صورت دسته‌ای از معادلات پارامتری به جود می آید.

اگر $(E_r)_\alpha^u, (E_r)_\alpha^L$ به وسیله $\alpha-$برش ها تولید شود، تابع سمت چپ برابربا، $L(z) = \left[(E_r)_\alpha^L\right]^{-1}$ و تابع سمت راست برابر، $R(z) = \left[(E_r)_\alpha^U\right]^{-1}$است. تابع عضویت $\mu_{\tilde{E}_r}$ به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{E}_r}(z)=\begin{cases} L(z) & z_1 \le z \le z_2 \\ 1 & z_2 \le z \le z_1 \\ R(z) & z_3 \le z \le z_4 \end{cases}$$

در غیر این صورت، مجموعه‌ای از بـازه‌هـای $\{[(E_r)_\alpha^L, (E_r)_\alpha^U] \mid \alpha \in (0,1]\}$ ، منعکس کننده شکل $\mu_{\tilde{E}_r}$ است.

البته شکل کامل تابع کاملاً مشخص نیست. برای نشان دادن روش پیشنهادی و توانایی آن در محاسبه میزان کارایی فازی، چهار DMU را در نظر مـی گیـریم. در یک سطح خاص، کران‌های بالا و پایین به صورت زیر است:

ورودی و خروجی چهار DMU

DMU	$Input$	$\alpha - Cut$	$Output$	$\alpha - Cut$
A	$(11,12,14)$	$[11+\alpha, 14-2\alpha]$	10	$[10,10]$
B	۳۰	$[30,30]$	$(12,13,14,16)$	$[12+\alpha, 16-2\alpha]$
C	۴۰	$[40,40]$	۱۱	$[11,11]$
D	$(45,47,52,55)$	$[45+2\alpha, 55-3\alpha]$	$(12,15,19,22)$	$[12+3\alpha, 22-3\alpha]$

$\alpha-$برش ها برحسب معادلات (۹) به صورت زیر حل می شوند:

$$
\begin{aligned}
(E_A)_\alpha^L = \max \quad & \frac{10u}{[v_0+(14-2\alpha)v_1]} \\
s.t \quad & \frac{10u}{[v_0+(14-2\alpha)v_1]} \le 1 \\
& \frac{(16-2\alpha)u}{[v_o+30v_1]} \le 1 \\
& \frac{11u}{[v_o+40v_1]} \le 1 \\
& \frac{(22-3\alpha)u}{[v_o+(45+2\alpha)v_1]} \le 1 \\
& u, v_1 \ge \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(E_A)_\alpha^U = \max \quad & \frac{10u}{[v_o+(11+\alpha)v_1]} \\
s.t \quad & \frac{10u}{[v_o+(11+\alpha)v_1]} \le 1 \\
& \frac{(12+\alpha)u}{[v_o+30v_1]} \le 1 \\
& \frac{11u}{[v_o+40v_1]} \le 1 \\
& \frac{(12+3\alpha)u}{[v_o+(55-3\alpha)v_1]} \le 1 \\
& u, v_1 \ge \varepsilon
\end{aligned}
$$

کران‌های بالا و پایین $\alpha-$ برش‌های $\mu_{\tilde{E}_B}, \mu_{\tilde{E}_C}, \mu_{\tilde{E}_D}$ را نیز می توان به طـور مشابه حل کرد.

چون جواب‌های تحلیلی‌مان در این مثال قابل وصول نیستند، ما از پنجاه و یک مقدار برای α، به ازای $\alpha : 0,0.02,0.04,...,100$ استفاده می کنیم. در شکل دو قسمت ناهموار $\mu_{\tilde{E}_B}, \mu_{\tilde{E}_C}, \mu_{\tilde{E}_D}$، از این مقادیر α تشکیل یافته است. شکل ناهموار به صورت یک تابع پیوسته نشان داده شده است.

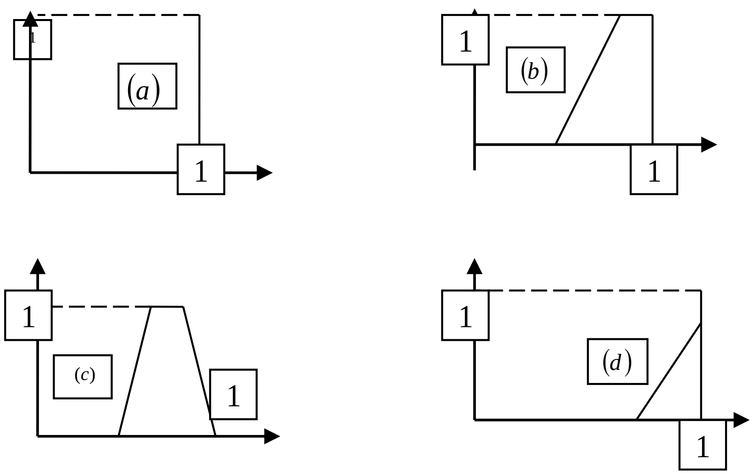
در این مثال متذکر می شویم که اگر چه ورودی و خروجی DMU_A، فازی است، اما میزان کارایی آن یک مقدار قطعی است. به عبارت دیگر تابع عضویت $\tilde{E}_A$ مقدار یک را نشان می دهد. نکته دیگری که باید مدنظر داشت این است که هیچ تناظر یک به یکی مابین، توابع عضویت و میزان کارایی وجود ندارد.

به عنوان مثال، تابع عضویت ورودی و خروجی D ذوزنقه‌ای است، ولی میزان کارایی D، ذوزنقه‌ای نیست. و به درستی با مراجعه به شکل ۲، شکل $\mu_{\tilde{D}}$، نامنظم است.

بحث:

در این بخش با استفاده از روش $\alpha-$برش‌ها، نشان خواهیم داد، زمانی که برخی از ورودی‌ها و خروجی‌ها نادقیق هستند، میزان کارایی آن‌ها نیز نادقیق است. دامنه کارایی DMU ها را می توان در سطوح مختلف به دست آورد. DMU_C را در مثال پیشین در نظر می گیریم. در سطح $\alpha=1$، میزان کارایی C برابر $[0,6395,0.7908]$، است و هم چنین در سطح $\alpha=1$، میزان کارایی برابر $[0.5436,0.9166]$ است.

شکل(۲) : توابع عضویت $\mu_{\tilde{E}_C}(c)\mu_{\tilde{E}_B}(b), \mu_{E_{\tilde{A}}}(a),$



بعد از این که کارایی همه DMU ها محاسبه شد، کار دیگری که باید انجام دهیم، رتبه‌بندی DMU ها برای انتخاب بهترین DMU است. روش‌های زیادی برای رتبه‌بندی فازی DMU ها وجود دارد. به هر حال، توابع عضویت اعداد فازی باید رتبه‌بندی شوند. روش (Chen & klein,1997:26-35) بر پایه $\alpha-$برش‌ها بنا

نهـاده شـده اسـت. فـرض مـی کنـیم کـه h، بیشـترین ارتفـاع $\mu_{\tilde{E}_j}$ بـه ازای $j=1,\dots,m$ باشد، و همچنین فرض می کنیم که h بـه n زیربـازه تقسـیم شـده است، بـه طـوری کـه $\alpha_i = \frac{ih}{n}$، (Chen & klein,1997:26-35) شـاخص زیـر را برای رتبه‌بندی انتخاب کردند:

$$I_j = \left[\frac{\sum_{i=0}^{n}\left(\left(E_i\right)_{\alpha_1}^{U}\right)}{\left[\sum_{i=0}^{n}\left(\left(E_j\right)_{\alpha_1}^{U} - c\right) - \sum_{i=0}^{n}\left(\left(E_j\right)_{\alpha_1}^{L} - d\right)\right]}\right], n \to \infty, \qquad (11)$$

کـه در آن، $c = \min_{i,j}\left\{\left(E_{ji}\right)_{\alpha_1}^{L}\right\}, d = \max_{i,j}\left\{\left(E_{ji}\right)_{\alpha_1}^{U}\right\}$، اسـت. هـر چـه قـدر شاخص I_j، بیشتر باشد، عدد فازی مطلوب به دست می آیـد. بـه صـورت تئـوری، این روش زمانی معتبر است که n، مقدار $\alpha-$برش‌ها به بی نهایت میل می کند. در مثال قبل، $\alpha-$برش‌ها با یازده مقدار α، در شکل دو مشاهده شده است بـه طـوری کـه: $I_A = 1.0, I_B = 0.6966, I_C = 0.3928, I_D = 0.8121$، در نتیجـه $\tilde{E}_A \succ \tilde{E}_D \succ \tilde{E}_B \prec \tilde{E}_C$ به دست می آید.

شکل(۲) : α – برش های میزان کارایی یازده مقدار α:

α	$\left[(E_A)^L_\alpha,(E_A)^U_\alpha\right]$		$\left[(E_B)^L_\alpha,(E_B)^U_\alpha\right]$		$\left[(E_C)^L_\alpha,(E_C)^U_\alpha\right]$		$\left[(E_D)^L_\alpha,(E_D)^U_\alpha\right]$	
۰٫۰	۱٫۰	۱٫۰	0.7183	۱٫۰	۰٫۵۴۳۶	0.9166	0.7498	۱٫۰
۰٫۱	۱٫۰	۱٫۰	0.7340	۱٫۰	۰٫۵۵۲۳	0.9030	0.7783	۱٫۰
۰٫۲	۱٫۰	۱٫۰	0.7500	۱٫۰	۰٫۵۶۱۲	0.8897	0.8075	۱٫۰
۰٫۳	۱٫۰	۱٫۰	0.7662	۱٫۰	۰٫۵۷۰۳	0.8766	0.8375	۱٫۰
۰٫۴	۱٫۰	۱٫۰	0.7829	۱٫۰	۰٫۵۸۰۰	0.8637	0.8682	۱٫۰
۰٫۵	۱٫۰	۱٫۰	0.7997	۱٫۰	۰٫۵۸۹۱	0.8510	0.8998	۱٫۰
۰٫۶	۱٫۰	۱٫۰	0.8169	۱٫۰	۰٫۵۹۸۷	0.8386	0.9322	۱٫۰
۰٫۷	۱٫۰	۱٫۰	0.8343	۱٫۰	۰٫۶۰۸۶	0.8263	0.9655	۱٫۰
۰٫۸	۱٫۰	۱٫۰	0.8522	۱٫۰	۰٫۶۱۸۷	0.8143	0.9998	۱٫۰
۰٫۹	۱٫۰	۱٫۰	0.8703	۱٫۰	۰٫۶۲۹۰	0.8025	1.0	۱٫۰
۱	۱٫۰	۱٫۰	0.8887	۱٫۰	۰٫۶۳۹۵	0.7908	1.0	۱٫۰

نتیجه گیری:

کارهای اولیه در زمینه DEA، در سال 1978، صورت گرفته است و مدل های گوناگون و کاربرد های زیادی از DEA در مدیریت اجرائی تأثیر به سزایی پیدا کرد. در بسیاری از مطالعات، مربوط به حالت قطعی بود و میزان کارایی به صورت قطعی و دقیق محاسبه می شد، مطالعات کمی نیز در زمینه حالت‌های احتمالی صورت گرفته است. در این مقاله روشی را برای پیدا کردن میزان کارایی فازی زمانی که توابع هدف به صورت فازی هستند بیان کردیم. این ایده بر پایه قانون توسیع زاده برای تبدیل مدل DEA فازی به مدل‌های قطعی DEA، به وسیله α – برش‌هاست.

References:

R.D.Banker, A.Charnes, w.w.Cooper," Some models for estimating technical and scale fficiencies in data envelopment analysis", management Sci.30 (1984)1078-1092.

R. E. Bellman, L.A. Zade"Decision-making in a fuzzy environment, Management" Sci .17 (1970) B141-164.

J.J. Buckley," Possibilistic linear programming with triangular fuzzy" Fuzzy Sets and Systems 26(1989)329-341.

A.Charnes, W.WCooper, E. Rhodes," Measuring the efficiency of decision making units", Eur.j.Oper.Res.2 (1978)429-444.

L.M. Seiford, "Data envelopment analysis, the evolution of the state of the ar "t (1978-1995), j.Productivity Anal .7(1996)99-137.

L. M.Sengupta," A fuzzy system approach in data envelopment analysis", Comput.Math. Appl.24 (1992)259-266.

L.M.Sengupta,"Non-parametric approach to stochastic programming", Internet .J.Systems Sci.24 (1993)857-871.

C.B Chen, C.M Klein, A simple approach to ranking a group pf aggregated Fyzzy utilities, IEEE Trans. Systems Man Cybernet. Part B: Cybernet. 27(1997)26-35